

W-algebras with non-admissible levels and the Deligne exceptional series

東京大学・大学院数理科学研究科 川節 和哉

Kazuya Kawasetsu

Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

頂点作用素代数 (VOA) の理論において, 指標のモジュラー不変性は重要な性質である.

VOA のうち比較的小さなものとして, W 代数がある. W 代数は, アフィン VOA に量子化された Drinfeld-Sokolov リダクションを適用して構成される VOA である. W 代数がモジュラー不変性を持つのは, レベルが許容数の場合に限られる, と予想され広く信じられてきた (cf. [KW3]).

本稿では, 拡大の理論を用いて, その予想の反例を与える. また, 拡大の理論を用いてモジュラー不変性を示すことが出来るような W 代数を分類し, その結果, Deligne の例外系列と呼ばれる系列が現れることを観察する. この結果より, これまで考えられていたよりもずっと多くの, 性質の良い W 代数が存在する可能性が高まり, さまざまな応用が期待される.

1 Deligne 例外系列

Deligne 例外系列とは, 有限次元単純リー環の列

$$A_1 \subset A_2 \subset G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$$

である [D]. これらのリー環の, 随伴表現のいくつかのテンソル積の既約成分に関して, Deligne 次元公式と呼ばれる, 注目すべき次元公式が確立されている [CdM, D, LM]. それらは, 双対 Coxeter 数 $h^\vee$ の有理式の形で表される. 例えば,

$$\dim \mathfrak{g} = \frac{2(h^\vee + 1)(5h^\vee - 6)}{h^\vee + 6}, \quad \dim L(2\theta) = \frac{5h^{\vee 2}(2h^\vee + 3)(5h^\vee - 6)}{(h^\vee + 12)(h^\vee + 6)},$$

などである.

本稿では, Deligne 例外系列を前述の W 代数の研究において観察する.

2 頂点作用素代数

この章では, 頂点作用素代数の基本的な概念について復習する.

2.1 頂点代数と頂点作用素代数

頂点代数 (VA) とは, ベクトル空間 V , 元 $|0\rangle \in V$ (真空元), 線形写像 $\partial : V \rightarrow V$ (微分作用素), 線形写像

$$Y : V \otimes V \rightarrow V((z)), \quad (a, b) \mapsto Y(a, z)b = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)bz^{-n-1},$$

(z は形式元) の四つ組であって, 次の公理を満たすものである:

1. $Y(|0\rangle, z) = \text{id}_V$, $Y(a, z)|0\rangle \in a + V[[z]]z$;
2. $[\partial, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z)$, $\partial|0\rangle = 0$;
3. (局所性) 任意の $a, b \in V$ に対して, ある $N \in \mathbb{Z}_+$ が存在して, $(z-w)^N[Y(a, z), Y(b, w)] = 0$.

形式的ベキ級数 $Y(a, z)$ ($a \in V$) は, 頂点作用素と呼ばれる. 中心電荷 $c \in \mathbb{C}$ の頂点作用素代数 (VOA) とは, 頂点代数 V と, 元 $\omega \in V$ (共形元) の組であって, 次の公理を満たすものである:

1. $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega(n)z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ が, ベクトル空間 V 上に, Virasoro 代数 $\text{Vir} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}C$ の, 中心電荷 c の加群の構造を引き起こす. つまり, V 上,

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{n^3-n}{12}\delta_{n+m,0}c$$

が成り立つ. さらに, L_0 の作用が半単純である. また, L_0 の各固有空間が有限次元である.

V を中心電荷 c の VOA とする. V 上の加群とは, ベクトル空間 M と, 線形写像 $Y^M : V \otimes M \rightarrow M((z))$, $(a, v) \mapsto Y^M(a, z)v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)vz^{-n-1}$, の組であって, 然るべき公理を満たすものである. 局所性と同様の公理や, $L_0 = \omega(1)$ が M に半単純に作用すること, 各斉次空間が有限次元であることなどを公理に持つ.

V の部分空間 I であって, $Y(V, z)I \subset I((z))$ を満たすものをイデアルという. I がイデアルであるとき, 商空間 V/I 上に中心電荷 c の VOA の構造が引き起こされる. V の真のイデアルが存在しないとき, V は単純であるという.

2.2 単純カレント拡大

本節では, 単純カレント拡大 (cf. $[C, L, Y]$) について復習する.

V を VOA とする. 与えられた VOA から, 新しい VOA を構成する方法として, V と V -加群 M との直和 $V \oplus M$ を考えたい. 今, “積” $Y(a, z)b$ ($a, b \in V$), $Y^M(a, z)v$ ($a \in V, v \in M$) は与えられている. また, Y^M の転置 $(Y^M)^* : M \otimes V \rightarrow M((z))$ を考えることが出来る. そこで, 与えるべきは, M の元同士の “積” である.

M, N, P を V -加群とする. $\begin{pmatrix} P \\ M \ N \end{pmatrix}$ -型の交絡作用素とは, 線形写像 $I : M \otimes N \rightarrow P\{z\}$, $(u, v) \mapsto I(u, z)v = \sum_{n \in \mathbb{C}} u(n)vz^{-n-1}$, であって, 然るべき公理を満たすものである. V の作用と “compatible” であることなどを公理に持つ. ここで, $P\{z\}$ は, P 係数の z の複素ベキを許す形式的ベキ級数のなす空間である.

V -既約加群 M が単純カレントであるとは, 任意の既約加群 N について, 既約加群 P が存在して, $\begin{pmatrix} P \\ M \ N \end{pmatrix}$ -型の交絡作用素のなす線形空間が 1 次元であり, P と同値でない既約加群 P' に関

して, $\begin{pmatrix} P' \\ M \ N \end{pmatrix}$ -型の交絡作用素のなす空間が 0 であることである。(これは, 任意の既約加群 N に対して, M, N のフュージョン積 $M \boxtimes N$ が再び既約加群であることと同値である)。

例 (Virasoro 極小模型). Virasoro 極小模型 $L(c, 0)$ ($c = c_{p,q} = 1 - 6(p-q)^2/pq$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $p, q \geq 2$, $(p, q) = 1$) を考える. 既約加群 $L(c, h)$ が単純カレントであるための必要十分条件は, $h = 0, (p-2)(q-2)/4$ である.

例 (アフィン VOA). 非負整数レベル k の単純アフィン VOA $L_k(\mathfrak{g})$ の単純カレントはよく知られている. $\mathfrak{g} = E_7$ のとき, レベル 1 単純アフィン VOA $L_1(E_7)$ の既約加群の同値を除いた全体は, 随伴加群 $L_1(E_7)$ と $L_1(E_7; \varpi_7)$ であるが, 両者とも単純カレントである. ($\{\varpi_i\}_{i=1, \dots, 7}$ は E_7 の基本ウェイト. 番号付けは Bourbaki に従う.)

V を C_2 -余有限な単純 VOA とし, M を単純カレント V -加群とする. I を $\begin{pmatrix} V \\ M \ M \end{pmatrix}$ -型の 0 でない交絡作用素とし, 任意の $u, v \in M$ に対して, $I(u, z)v \in V((z))$ とする. このとき, ある種の偶数性の仮定の下で,

$$Y^{\text{new}} = Y \oplus Y^M \oplus (Y^M)^* \oplus I: (V \oplus M) \otimes (V \oplus M) \rightarrow (V \oplus M)((z))$$

によって, $V \oplus M$ が VOA の構造を持つ. これを, V の M による単純カレント拡大と呼ぶ. 単純カレント拡大の一般論により, $V \oplus M$ は再び C_2 -余有限である. さらに, V が有理的ならば, $V \oplus M$ は $\mathbb{Z}_2$ -有理的である. ここで, $\mathbb{Z}_2$ -有理的であるとは次で定義される. $W = V \oplus M$ とおく. 二元からなる自己同型の群 $\mathbb{Z}_2 = \{\text{id}_W, \text{id}_V \oplus (-\text{id}_M)\}$ を考える. 任意の $g \in \mathbb{Z}_2$ に関して, 任意の g -twisted W -加群が完全可約であり, g -twisted W -既約加群が同値を除いて有限個であるとき, $W = V \oplus M$ は $\mathbb{Z}_2$ -有理的であると言う.

3 W 代数

3.1 W 代数とモジュラー不変性

W 代数は, ヴィラソロ VOA の拡大 [Zam] の一般化である. 様々な研究が行われ, その後, 量子化された Drinfeld-Sokolov リダクション (量子リダクション) による構成が与えられた [FF, KRW, KW2]. 本節では, 量子リダクションを復習する.

$\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー環, $f \in \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ のべき零元, $k \in \mathbb{C}$ を複素数とする. ユニバーサルアフィン VOA $M^k(\mathfrak{g})$ (Segal-Sugawara 共形元 ω^{aff}) を考える. また, $\mathfrak{g}$ に依存して定まる特定の VOA $\mathcal{F}^{\text{ne}}, \mathcal{F}^{\text{ch}}$ (ボゾン・フェルミオン VOA) (共形元 $\omega^{\text{ne}}, \omega^{\text{ch}}$) を考える. テンソル積 $VA \ C = M^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{F}^{\text{ne}} \otimes \mathcal{F}^{\text{ch}}$ を考える. $VA \ C$ に VOA の構造を, 共形元 $\omega = \omega^{\text{aff}} + \omega^{\text{ne}} + \omega^{\text{ch}} + \partial x \in C$ によって入れる. ここで, x は $\mathfrak{g}$ の半単純元であって, $[x, f] = -f$ 等の条件を満たすものである. C 上のある特定の次数付け (L_0 による次数付けではない) と微分 d (f に依存して定まる) を考える. つまり, C に複体構造 $(C^\bullet, d)$ (BRST 複体) を入れる. BRST 複体の 0-th コホモロジーを, $W^k(\mathfrak{g}, f)$ と書き, ユニバーサル W 代数と呼ぶ (C から VOA 構造を誘導する). なお, 上記の構成において, アフィン VOA $M^k(\mathfrak{g})$ をその加群に置き換えて, 同様の構成を考えると, W 代数上の加群を得る. この構成法を, 量子化された Drinfeld-Sokolov リダクションと呼ぶ.

$W^k(\mathfrak{g}, f)$ の各斉次元のウェイトは、半整数である。単純商 VOA を $W_k(\mathfrak{g}, f)$ と書き、単純 W 代数と呼ぶ。

W 代数のモジュラー不変な表現は、アフィン VOA $L_k(\mathfrak{g})$ のモジュラー不変な表現の量子リダクションで得られると考えられている。従って、二条件『アフィン VOA $L_k(\mathfrak{g})$ の表現の指標がモジュラー不変性を持つこと』と、『レベル k が許容数であること』とは同値であるという Kac-Wakimoto 予想 [KW1] より、 $W_k(\mathfrak{g}, f)$ が C_2 -余有限かつ有理的であるのは、レベル k が許容数である場合に限られる、と広く信じられてきた (cf. [KW3])。

ここで、 $k \in \mathbb{C}$ が許容数であるとは、

$$k + h^\vee = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (p, q) = 1, \quad p \geq \begin{cases} h^\vee & (r^\vee, q) = 1, \\ h & (r^\vee, q) = r^\vee. \end{cases}$$

ここで、 $r^\vee$ はレーシング数である。つまり、 $\mathfrak{g} = ADE$ のとき $r^\vee = 1$ 、 $\mathfrak{g} = BC$ のとき $r^\vee = 2$ 、 $\mathfrak{g} = G_2$ のとき $r^\vee = 3$ 。例えば、非負整数は許容数である。また、負整数は許容数でない。

本稿では、その反例、すなわち、 C_2 -余有限かつ有理的な W 代数であって、非許容レベルを持つものを与える。

3.2 極小べき零元に付随する W 代数

f を $\mathfrak{g}$ の極小べき零元と仮定する。このとき f は、最低ルートベクトル $f = f_\theta$ (θ は最高ルート) という形を持つ。半単純元 $x = \theta/2 \in \mathfrak{g}$ を考える。このとき、 W 代数 $W^k = W^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ は、中心電荷

$$c_W = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h^\vee} - 6k + h^\vee - 4. \quad (3.1)$$

の VOA である。ad(x)-固有空間分解 (極小次数付け)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-1/2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_1.$$

を考える。 $\mathfrak{g}^f$ を、 $\mathfrak{g}$ における f の中心化部分代数とし、 $\mathfrak{g}^\natural = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}^f$ とおく。

W^k は、共形元 ω と、線形に定義された特定のプライマリーベクトル

$$J^{\{a\}}, \quad a \in \mathfrak{g}^\natural \quad (\text{共形ウェイト } 1);$$

$$G^{\{v\}}, \quad v \in \mathfrak{g}_{-1/2} \quad (\text{共形ウェイト } 3/2)$$

によって強生成され、これらの元による PBW 型の基底を持つ [KW2]。強生成されるということは、VOA の頂点代数としての構造が、生成元間の作用素積展開 (OPE) によって原理的に計算できることを意味する。これらの生成元間の OPE は次で与えられる [KW2]

$$J^{\{a\}}(z)J^{\{b\}}(w) \sim \frac{J^{\{a,b\}}}{z-w} + \left(\left(k + \frac{1}{2}h^\vee \right) (a|b) - \frac{1}{4}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(a, b) \right) \frac{|0\rangle}{(z-w)^2},$$

$$J^{\{a\}}(z)G^{\{v\}}(w) \sim \frac{G^{\{[a,v]\}}}{z-w},$$

$$G^{\{u\}}(z)G^{\{v\}}(w) \sim X(z-w) \in \langle \omega, J^{\{a\}} | a \in \mathfrak{g}^\natural \rangle_{VA}[(z-w)^{-1}].$$

$X(z-w)$ は具体的に求められている (省略する). ここで, $\kappa_{\mathfrak{g}_0}(\cdot, \cdot)$ は, リー環 $\mathfrak{g}_0$ の Killing 形式である.

$V^k = \langle J^{\{a\}} | a \in \mathfrak{g}^{\natural} \rangle_{VA}$ ($J^{\{a\}}$ で生成された頂点部分代数) とおく. これは, 有限次元リー環 $\mathfrak{g}^{\natural}$ と, 不変内積 $(a, b)^{\natural} = (k + h^{\vee}/2)(a|b) - 1/4\kappa_{\mathfrak{g}_0}(a, b)$ に付随するアフィン VOA である. その Segal-Sugawara 共形元を $\sigma \in V^k$ と置く. 元 $\omega - \sigma$ は, ヴィラソロ VOA U^k を生成する. また, テンソル積 VOA $V^k \otimes U^k$ は W^k に埋め込まれている.

例. $\mathfrak{g} = E_8$ とする. このとき, $\mathfrak{g}_0 = E_7 \oplus \mathbb{C}\theta$, $\mathfrak{g}_{-1/2} = \underline{56}$ (E_7 -加群として), $\mathfrak{g}^f = E_7 \oplus \underline{56} \oplus f_{\theta}$, $\mathfrak{g}^{\natural} = E_7$ である. また, $a, b \in \mathfrak{g}^{\natural}$ に対して, $\kappa_{\mathfrak{g}_0}(a, b) = \kappa_{E_7}(a, b) = 2 \cdot 18(a|b)$ である. よって, $(\cdot, \cdot)^{\natural} = (k+6)(\cdot|\cdot)$ である. 従って, V^k はレベル $k+6$ アフィン VOA $M^{k+6}(E_7)$ (中心電荷 $c_{\text{aff}} = 133(k+6)/(k+6+18)$) である. また, 中心電荷を比べて, $U^k \cong V(c', 0)$, $c' = c_W - c_{\text{aff}} = -3(k+6)(k+10)(2k+29)/(k+24)(k+30)$ である.

単純商 $\pi : W^k \rightarrow W_{\mathfrak{g},k} = W_k(\mathfrak{g}, f_{\theta})$ を考える. $V_{\mathfrak{g},k} = \pi(V^k)$, $U_{\mathfrak{g},k} = \pi(U^k)$ とおく. このとき, テンソル積 VOA $V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k}$ が $W_{\mathfrak{g},k}$ に埋め込まれている.

そこで, $V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k}$ -加群としての, $W_{\mathfrak{g},k}$ の分解を考えたい.

$\mathfrak{g}$ が A 型でないと仮定する. このとき, $\mathfrak{g}^{\natural}$ は半単純リー環である. また, 次の条件を考える:

- (1) $V_{\mathfrak{g},k}, U_{\mathfrak{g},k}$ は, C_2 -余有限かつ有理的な単純 VOA;
- (2) 随伴表現でない単純カレント $V_{\mathfrak{g},k}, U_{\mathfrak{g},k}$ -加群 N, M が存在して, $W_{\mathfrak{g},k} \cong (V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k}) \oplus (N \otimes M)$ ($V_{\mathfrak{g},k} \otimes U_{\mathfrak{g},k}$ -加群として) である.

次が本稿の主定理である.

定理 3.1. $[K]$ 上の条件 (1), (2) を満たす組 $(\mathfrak{g}, k)$ の完全なリストは次で与えられる:

1. $\mathfrak{g} = sp(4)$, $k = 1/2$;
2. $\mathfrak{g} = G_2, D_4, F_4, E_6, E_7, E_8$, $k = -h^{\vee}/6$.

これら $(\mathfrak{g}, k)$ に関して, $W_k(\mathfrak{g}, f_{\theta})$ は C_2 -余有限かつ $\mathbb{Z}_2$ -有理的である. 次の同型を得る:

1. $W_{1/2}(sp(4), f_{\theta}) \cong (L_1(A_1) \otimes L(-25/7, 0)) \oplus (L_1(A_1; \alpha/2) \otimes L(-25/7, 5/4))$,
2. $W_{-h^{\vee}/6}(\mathfrak{g}, f_{\theta}) \cong (V \otimes L(-3/5, 0)) \oplus (N \otimes L(-3/5, 3/4))$. ただし, V と N は, 次の同型で定まる VOA V とその上の加群である:

$$L_1(\mathfrak{g}) \cong (V \otimes L_1(A_1)) \oplus (N \otimes L_1(A_1; \theta/2)).$$

定理中のリストの 2 は, Deligne 例外系列を思い起こさせる. $\mathfrak{g} = A_1, A_2$, $k = -h^{\vee}/6 = -1/3, -1/2$ を考える. このとき, やはり上記の同型が成り立つ. (ただし, $\mathfrak{g} = A_1$ のときは,

$V = \mathbb{C}|0\rangle$, $N = 0$ と解釈する) . $\mathfrak{g}$ が Deligne 例外型リー環のとき, 同型は具体的には,

$$\begin{aligned}
W(A_1) &\cong L(-3/5, 0), \\
W(A_2) &\cong (V_{\sqrt{3}A_1} \otimes L(-3/5, 0)) \oplus (V_{\sqrt{3}A_1 + \sqrt{3}\alpha/2} \otimes L(-3/5, 3/4)), \\
W(G_2) &\cong (V_3(A_1) \otimes L(-3/5, 0)) \oplus (V_3(A_1; 3\alpha/2) \otimes L(-3/5, 3/4)), \\
W(D_4) &\cong (V_1(A_1)^{\otimes 3} \otimes L(-3/5, 0)) \oplus (V_1(A_1; \alpha/2)^{\otimes 3} \otimes L(-3/5, 3/4)), \\
W(F_4) &\cong (V_1(C_3) \otimes L(-3/5, 0)) \oplus (V_1(C_3; \varpi_3) \otimes L(-3/5, 3/4)), \\
W(E_6) &\cong (V_1(A_5) \otimes L(-3/5, 0)) \oplus (V_1(A_5; \varpi_3) \otimes L(-3/5, 3/4)), \\
W(E_7) &\cong (V_1(D_6) \otimes L(-3/5, 0)) \oplus (V_1(D_6; \varpi_6) \otimes L(-3/5, 3/4)), \\
W(E_8) &\cong (V_1(E_7) \otimes L(-3/5, 0)) \oplus (V_1(E_7; \varpi_7) \otimes L(-3/5, 3/4)).
\end{aligned}$$

ここで, $V_{\sqrt{3}A_1}$ は, 格子 $\sqrt{3}A_1$ (A_1 はルート格子) に付随する格子 VOA である.

定理中の $(\mathfrak{g}, k)$ に対して, 単純カレント拡大の一般論と分解の式より, $W_{\mathfrak{g}, k} = W_k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ は C_2 -余有限かつ $\mathbb{Z}_2$ -有理的である. 従って, [DLM, V] より, W の (ツイスト) 表現の指標のモジュラー不変性を得る.

さて, $\mathfrak{g} = D_4, E_6, E_7, E_8$ のとき, 数 $k = -h^\vee/6 = -1, -2, -3, -5$ は許容数でない. そこで, この定理は, C_2 -余有限かつ有理的であって, 非許容レベルを持つ W 代数の例を与える.

定理の証明は, $(\mathfrak{g}, k)$ の組を制限すること, 定理のリスト中の $(\mathfrak{g}, k)$ に関して同型を示すこと, に分けられる. 同型を示すには, 両辺 (右辺は単純カレント拡大の構造を入れる) の生成元と OPE を与えて, それらがコンパチブルであることを具体的に計算して示せばよい.

参考文献

- [C] Carnahan, S. “Building vertex algebras from parts.” arXiv preprint arXiv:1408.5215 (2014).
- [CdM] Cohen, A. M., and de Man, R. “Computational evidence for Deligne’s conjecture regarding exceptional Lie groups”, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996): 427–432.
- [D] Deligne, P. “La série exceptionnelle de groupes de Lie”, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996): 321–326.
- [DLM] Dong, C., Li, H., and Mason, G. “Modular-Invariance of Trace Functions in Orbifold Theory and Generalized Moonshine.” Comm. Math. Phys. 214.1 (2000): 1–56.
- [FF] Feigin, B., and Frenkel, E. “Quantization of the Drinfel’d-Sokolov reduction”. Phys. Lett. B, 246(1-2) (1990):75–81.
- [KRW] Kac, V. G., Roan, Shi-Shyr, and Wakimoto, M. “Quantum reduction for affine superalgebras”. Comm. Math. Phys., 241(2-3) (2003): 307-342.
- [KW1] Kac, V. G., and Wakimoto, M. “Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras” Proc. Natl. Acad. Sci. 85 (1988): 4956–4960.
- [KW2] Kac, V. G., and Wakimoto, M. “Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras.” Adv. Math. 185.2 (2004): 400–458.

- [KW3] Kac, V. G., and Wakimoto M. “On rationality of W-algebras.” *Transformation Groups* 13.3-4 (2008): 671–713.
- [K] Kawasetsu, K. “ $\mathcal{W}$ -algebras with non-admissible levels and the Deligne exceptional series.” arXiv preprint arXiv:1505.06985 (2015).
- [L] Lam, C. H. “Induced modules for orbifold vertex operator algebras.” *J. Math. Soc. Japan* 53.3 (2001): 541–557.
- [LM] Landsberg, J. M., and Manivel, L. “Triality, exceptional Lie algebras, and Deligne dimension formulas”, *Adv. Math.* **171** (2002): 59–85.
- [V] Van Ekeren, J. “Modular invariance for twisted modules over a vertex operator superalgebra.” *Comm. Math. Phys.* 322.2 (2013): 333–371.
- [Y] Yamauchi, H. “Module categories of simple current extensions of vertex operator algebras.” *J. Pure and Appl. Alg.* 189.1 (2004): 315–328.
- [Zam] Zamolodchikov, A. B. “Infinite additional symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory.” *Theor. Math. Phys.* 65.3 (1985): 1205–1213.