

Schrödinger Operators with Periodic Potentials and Constant Magnetic Fields

阪大理 吉富 和志 (Kazushi Yositomi)

1 Introduction and main results

考える作用素は、ポテンシャルが周期的な定数磁場のSchrödinger 作用素

$$H(\lambda) = (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 V(x) \text{ in } L^2(\mathbf{R}^2)$$

である。ただし $D_{x_j} = -i \partial / \partial x_j$ ($j = 1, 2$), λ は正のパラメータ、 $b \in \mathbf{R}$ は定数とする。 $H(\lambda)$ に対応する磁場は $B = -2b \, dx_1 \wedge dx_2$ である。ポテンシャル $V(x)$ には次の仮定をおく。

$$(H.1) \quad V(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$$

$$(H.2) \quad V(x + \gamma) = V(x) \text{ in } \mathbf{R}^2 \text{ for any } \gamma \in \Gamma := 2\pi\mathbf{Z} \oplus 2\pi\mathbf{Z}$$

$$(H.3) \quad V(x) \geq 0 \text{ in } \mathbf{R}^2$$

$$(H.4) \quad V(x) = 0 \iff x \in \Gamma$$

$$(H.5) \quad V''(x) = 2 \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mu_1, \mu_2 > 0$$

Direct integral decomposition を用いるために、磁場 B に次の仮定をおく。

$$(H.6) \quad \langle B, \Gamma \wedge \Gamma \rangle \subset 2\pi\mathbf{Z} \text{ i.e. } b \in \frac{1}{4\pi}\mathbf{Z}$$

この仮定により $H(\lambda)$ のスペクトルはバンド構造を持つ。研究の目標は、 $\lambda \rightarrow \infty$ としたときの $H(\lambda)$ のスペクトルの漸近挙動を調べることである。磁場の

無い場合(すなわち、 $b=0$ の場合)に、B.Simon [1]と、A.Outassout[2]はground state bandの幅がexponential orderで減少することを示した。Simonはその証明に確率論的な方法を用い、OutassoutはB.Helffer-J.Sjöstrand [3]らによるWKB解析による方法を用いている。今回の研究では、磁場のある場合に、ground state bandの幅に対する exponential order の評価を得た。以下その内容を簡単に述べる。

$d_V(x, y)$ を $V(x)$ に対応する Agmon distance、 $s_0 := \min_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} d_V(0, \gamma) (> 0)$

$x_0 \in \mathbf{R}^2, r > 0$ に対し $B_V(x_0, r) := \{x \in \mathbf{R}^2 : d_V(x_0, x) < r\}$ とおく。

Theorem A (H.1)から(H.6)を仮定する。このとき、 $\forall \eta > 0$ に対し $H(\lambda)$ の ground state bandの幅は $O(e^{-(s_0-2\eta)\lambda})$ (as $\lambda \rightarrow \infty$) である。

幾何学的な仮定を付け加えれば、Theorem Aの評価は次のように精密化される。

$\Lambda := \{\gamma \in \Gamma : d_V(0, \gamma) = s_0\}$ とおく。 $\gamma \in \Lambda$ に対し次を仮定する。

(H.7) There is a unique geodesic κ of length s_0 joining 0 and γ .

(H.8) $x_0 \in \kappa \cap B_V(0, s_0) \cap B_V(\gamma, s_0)$

$\Gamma_0 \subset\subset B_V(0, s_0) \cap B_V(\gamma, s_0)$: smooth curve which intersects κ transversally at x_0 where x_0 is the only point in $\overline{\Gamma_0} \cap \kappa$

$\Rightarrow \exists C > 0$ s.t.

$d_V(x, 0) + d_V(x, \gamma) \geq s_0 + C d_V(x, x_0)^2$ for any $x \in \Gamma_0$

$F_0 := \{\pm(0, 2\pi), \pm(2\pi, 0), \pm(2\pi, 2\pi), \pm(2\pi, -2\pi)\}$ とおく。

Theorem B (H.1)から(H.9)を仮定する。このとき、 $H(\lambda)$ の ground state bandの幅は $(b_0 \lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda^{\frac{1}{2}})) e^{-s_0 \lambda}$ (as $\lambda \rightarrow \infty$) である。
ただし $b_0 > 0$: independent of λ

以下でこれらの証明の概略を述べる。

2 Preliminaries

$\Gamma = 2\pi\mathbf{Z} \oplus 2\pi\mathbf{Z}$ の fundamental domain を E , Γ の dual lattice を Γ^* , Γ^* の fundamental domain を E^* とする。すなわち、 $E = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$, $\Gamma^* := \{\gamma^* \in \mathbf{R}^2 : \gamma \cdot \gamma^* \in 2\pi\mathbf{Z} \ \forall \gamma \in \Gamma\} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, $E^* = [0, 1) \times [0, 1)$ とする。

$H_B^2(\mathbf{R}^2) := \{u \in L^2(\mathbf{R}^2) : T_i u, T_i T_j u \in L^2(\mathbf{R}^2) \ \forall i, j \in \{1, 2\}\}$
 $, T_1 := D_{x_1} + bx_2, T_2 := D_{x_2} - bx_1$ とおいて,
 $Dom(H(\lambda)) := H_B^2(\mathbf{R}^2)$ と定義する。 $H(\lambda)$ は self-adjoint である。
 $H_B^2(\mathbf{R}^2)$ に内積を

$$(u, v)_{H_B^2(\mathbf{R}^2)} := (u, v)_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \sum_{i=1}^2 (T_i u, T_i v)_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \sum_{i,j=1}^2 (T_i T_j u, T_i T_j v)_{L^2(\mathbf{R}^2)}$$

$(u, v \in H_B^2(\mathbf{R}^2))$ で定義する。

$\forall \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma, u \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^2)$ に対し

$$(\mathbf{T}_\gamma^B u)(x) := e^{ib\gamma_1\gamma_2} e^{-ib(x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1)} u(x - \gamma),$$

$u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2), \theta \in E^*$ に対し

$$(\mathcal{U}u)(x, \theta) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B u)(x) \quad (x \in \mathbf{R}^2)$$

とおく。

$\theta \in E^*$ に対し

$$\mathcal{H}_{B,\theta} := \{v \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^2) : \mathbf{T}_\gamma^B v = e^{-i\gamma \cdot \theta} v \text{ a.e. in } \mathbf{R}^2 \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

$$\mathcal{H}_{B,\theta}^2 := \{v \in \mathcal{H}_{B,\theta} : T_i v, T_i T_j v \in \mathcal{H}_{B,\theta} \ \forall i, j \in \{1, 2\}\} \text{ と定義する。}$$

$\mathcal{H}_{B,\theta}$ に内積を $(u, v)_{\mathcal{H}_{B,\theta}} := \int_E u(x) \overline{v(x)} dx, u, v \in \mathcal{H}_{B,\theta}$ で定義する。

$\theta \in E^*$ に対し

$H(\lambda; \theta) := (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 V(x)$ in $\mathcal{H}_{B,\theta}$ with domain $\mathcal{H}_{B,\theta}^2$ と定義する。

Proposition 2.1

$\mathcal{U}$ は $L^2(\mathbf{R}^2)$ から $\int_{E^*}^\oplus \mathcal{H}_{B,\theta} d\theta$ への unitary operator に一意に拡張され、次が成り立つ

$$(2.1) \quad \mathcal{U} H(\lambda) \mathcal{U}^{-1} = \int_{E^*}^\oplus H(\lambda, \theta) d\theta$$

ただし $\mathcal{H} := \int_{E^*}^{\oplus} \mathcal{H}_{B,\theta} d\theta$ の内積は

$$(u, v)_{\mathcal{H}} := (\text{vol } E^*)^{-1} \int_{E^*} \int_E u(x, \theta) \overline{v(x, \theta)} dx d\theta \quad (u, v \in \mathcal{H})$$

で定義する。

$H(\lambda, \theta)$ は正定値で compact resolvent をもつので、spectrum は purely discrete である。 $H(\lambda, \theta)$ の多重度を込めて下から j 番目の固有値を $\mathcal{E}_j(\lambda, \theta)$ とする。 $\mathcal{E}_j(\lambda, \theta)$ は θ の連続関数であるから、次が成り立つ。

$$(2.2) \quad \sigma(H(\lambda)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_j(\lambda, E^*) \quad \text{ただし} \quad \mathcal{E}_j(\lambda, E^*) := \{\mathcal{E}_j(\lambda; \theta) : \theta \in E^*\}$$

$\mathcal{E}_j(\lambda; E^*)$ は閉区間または 1 点集合で、 $\mathcal{E}_j(\lambda; E^*)$ を j -th band、 $\mathcal{E}_1(\lambda; E^*)$ を ground state band という。従って $H(\lambda)$ の spectrum の解析は $\mathcal{E}_j(\lambda; \theta)$ の解析に帰着される。

$\Lambda_0 := \{(2j+1)\sqrt{\mu_1} + (2k+1)\sqrt{\mu_2} : j, k \geq 0; \text{ integers}\}$ とおき、 Λ_0 の元で重複度を込めて n 番目に小さい元を v_n とする。このとき次の定理が得られる。

Theorem 2.2

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ に対し $\mathcal{E}_n(\lambda; \theta) = v_n \lambda + o(\lambda) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$

ただし error term は $\theta \in E^*$ に関し一様である。

Outline of proof

この定理の証明には Harmonic approximation を用いる(cf.[1])。

(H.6) より $V(x) = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + O(|x|^3) \quad (\text{as } |x| \rightarrow 0)$ である。

(1.1) で $V(x)$ を $\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2$ で置き換えた次の作用素:

$$(2.3) \quad H_0(\lambda) := (D_{x_1} + b x_2)^2 + (D_{x_2} - b x_1)^2 + \lambda^2 (\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2) \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^2)$$

の固有値、固有関数を用いて各 $\mathcal{E}_j(\lambda; \theta)$ を近似する。

$H_0(\lambda)$ は Weyl 擬微分作用素の正準変換による不変性を用いると、次の Harmonic oscillator と unitary 同値になる。

$$(2.4) \quad -\Delta + m_1(\lambda) x_1^2 + m_2(\lambda) x_2^2 \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^2)$$

ただし $m_1(\lambda), m_2(\lambda)$ は λ に関する 2 次方程式

$$t^2 - ((\mu_1 + \mu_2)\lambda^2 + 4b^2)t + \mu_1 \mu_2 \lambda^4 = 0$$

の解で、 $m_1(\lambda) < m_2(\lambda)$ を満たすものとする。

よって $H_0(\lambda)$ の eigenvalue は $(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)} + (2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$,
 $(j, k \geq 0; \text{integers})$ で、

$$v_{j,k} := \begin{cases} (2j+1)\sqrt{\mu_1} + (2k+1)\sqrt{\mu_2} & (\mu_2 \geq \mu_1) \\ (2j+1)\sqrt{\mu_2} + (2k+1)\sqrt{\mu_1} & (\mu_2 \leq \mu_1) \end{cases}$$

とおけば $(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)} + (2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)} = v_{j,k}\lambda + O(1)$ (as $\lambda \rightarrow \infty$)
 である。

$(2j+1)\sqrt{m_1(\lambda)} + (2k+1)\sqrt{m_2(\lambda)}$ に対応する $H_0(\lambda)$ の固有関数を $\psi_{j,k}(\lambda; x)$
 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \geq 0} : C.O.N.S. \text{ in } L^2(\mathbf{R}^2)$ とする。 $\psi_{j,k}$ は具体的に計算でき次が成り
 立つ。

(2.5) $|\psi_{j,k}(\lambda; x)| \leq C_{j,k} \lambda^{\frac{1}{2}} \exp(-c\lambda|x|^2)$, ($C_{j,k}, C > 0 : \text{const. indep. of } \lambda$)
 である。

$v_n = v_{j_n, k_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), $(j_n, k_n) \neq (j_m, k_m)$ if $n \neq m$
 とおける。

$$\psi_n := \psi_{j_n, k_n}, \quad \varphi_n(\lambda; x; \theta) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B \psi_n)(\lambda; x) \quad (\theta \in E^*) \text{ とおく。}$$

(2.5) より次がなりたつ。

$$(2.6) \quad (\varphi_n(\lambda; x; \theta), \varphi_m(\lambda; x; \theta))_{\mathcal{H}_{B, \theta}} = \delta_{nm} + O(e^{-c\lambda}) \quad (\text{as } \lambda \rightarrow \infty)$$

$$(2.7) \quad (H(\lambda; \theta) \varphi_n(\lambda; x; \theta), \varphi_m(\lambda; x; \theta))_{\mathcal{H}_{B, \theta}} = v_n \lambda \delta_{nm} + O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{as } \lambda \rightarrow \infty)$$

ただし各 error term は $\theta \in E^*$ に関し一様である。

Schmidt の直交化法と、Rayleigh-Ritz Principle を用いて

$$\mathcal{E}_n(\lambda; \theta) \leq v_n \lambda + O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \text{ を得る。}$$

また、Simon[1] と同様に I.M.S. localization formula を用いれば

$$\mathcal{E}_n(\lambda; \theta) \geq v_n \lambda - O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \text{ を得る。} \quad \square$$

3 Outline of Proof of Theorem A

この章では Theorem A の証明の概略を説明する。まず、 $d_V(x, y)$ の定義を正確に述べる。

$x, y \in \mathbf{R}^2$ に対し、

$$d_V(x, y) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(t))} |\dot{\gamma}(t)| dt$$
ただし、 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$; piecewise C^1 path s.t. $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ と定義する。
 $x_0 \in \mathbf{R}^2, r > 0$ に対し $B_V(x_0, r) := \{x \in \mathbf{R}^2 : d_V(x_0, x) < r\}$,
 $s_0 := \min_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} d_V(0, \gamma) (> 0)$ とおく。

$\eta > 0$: 十分小 に対し $W_\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ として
 $W_\eta = 1$ on $B_V(0, \frac{\eta}{4})$, $W_\eta \geq 0$ in $\mathbf{R}^2$, $\text{supp } W_\eta \subset B_V(0, \frac{\eta}{2})$
を満たすものを選ぶ。
 $\tilde{V}(x) := V(x) + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} W_\eta(x - \gamma)$ とおく。

$\mathcal{E}_1(\lambda; \theta)$ ($\theta \in E^*$) を近似するために次の作用素を導入する:

$$(3.1) \quad \tilde{H}(\lambda) := (D_{x_1} + bx_2)^2 + (D_{x_2} - bx_1)^2 + \lambda^2 \tilde{V}(x) \text{ in } L^2(\mathbf{R}^2)$$

with domain $H_B^2(\mathbf{R}^2)$

§2 とほぼ同様にして次のことが判る。 $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ に対し $\tilde{H}(\lambda)$ は十分大きい λ に対して、その essential spectrum の下に少なくとも n 個の固有値をもち、 $\tilde{H}(\lambda)$ の多重度を込めて j 番目の固有値は $v_j \lambda + o(\lambda)$ ($as \lambda \rightarrow \infty$) である。

$\tilde{\mathcal{E}}(\lambda)$ を $\tilde{H}(\lambda)$ の first eigenvalue ($\tilde{\mathcal{E}}(\lambda) = (\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})\lambda + o(\lambda)$), $\tilde{\phi}(\lambda)(x)$ を $\tilde{\mathcal{E}}(\lambda)$ に対応する $\tilde{H}(\lambda)$ の eigenfunction で、 $\|\tilde{\phi}(\lambda)\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} = 1$ とする。
Helffer-Sjöstrand [2] とほぼ同様に、 $\tilde{\phi}(\lambda)$ は次の decay estimate を満たす:

Lemma 3.1 $\forall \varepsilon > 0$ に対し

$$(3.2) \quad \|e^{\lambda(1-\varepsilon)d_{\tilde{V}}(x,0)} \tilde{\phi}(\lambda)(x)\|_{H_B^2(\mathbf{R}^2)} = O(e^{\varepsilon\lambda}) \quad (as \lambda \rightarrow \infty)$$

さらに、楕円型作用素に対する a priori estimate と Sobolev の埋込定理を用いて次が得られる。

Lemma 3.2 $\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha \in \mathbf{N}^2 \exists C_{\alpha,\varepsilon} > 0 : \text{const. s.t.}$

$$|\partial_x^\alpha \tilde{\phi}(\lambda)(x)| \leq C_{\alpha,\varepsilon} e^{-\lambda(d_{\tilde{V}}(x,0)-\varepsilon)} \text{ in } \mathbf{R}^2$$

$\chi_\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ として、

$\text{supp } \chi_\eta \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$, $0 \leq \chi_\eta \leq 1$ in $\mathbf{R}^2$, $\chi_\eta = 1$ on $B_V(0, s_0 - \eta)$ を満たすものを選ぶ。

$\tilde{\psi}(\lambda)(x) := \chi_\eta(x)\tilde{\phi}(\lambda)(x)$ とおく。

$\theta \in E^*$ に対し $\tilde{\psi}_\theta(\lambda)(x) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{\psi})(x)$ ($\in \mathcal{H}_{B,\theta} \cap C^\infty(\mathbf{R}^2)$)

とおいて、次を得る。

$$(3.3) \quad H(\lambda; \theta) \tilde{\psi}_\theta(\lambda) = \tilde{\mathcal{E}}(\lambda) \tilde{\psi}_\theta(\lambda) + \tilde{r}_\theta(\lambda)$$

ただし、 $\tilde{r}_\theta(\lambda)(x) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}(\lambda))(x)$,

$$\tilde{r}(\lambda) := -\Delta \chi_\eta \tilde{\phi} - 2\nabla \chi_\eta \cdot \nabla \tilde{\phi} - 2bi((x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}) \chi_\eta) \tilde{\phi}$$

(3.2),(3.3)を用いて次の評価を得る。

$$(3.4) \quad \|\tilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = 1 + O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)}),$$

error termは $\theta \in E^*$ に関しuniform.

$$(3.5) \quad \|\tilde{r}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}} = O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)}), \text{ error termは } \theta \in E^* \text{ に関しuniform.}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって、} \text{dis}(\tilde{\mathcal{E}}(\lambda), \sigma(H(\lambda; \theta))) &\leq \frac{\|(H(\lambda; \theta) - \tilde{\mathcal{E}}(\lambda)) \tilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}}{\|\tilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}} \\ &= \frac{\|\tilde{r}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}}{\|\tilde{\psi}_\theta\|_{\mathcal{H}_{B,\theta}}} = O(e^{-\lambda(s_0-2\eta)}) \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{\mathcal{E}}(\lambda) = v_1 \lambda + o(\lambda)$, $\mathcal{E}_1(\lambda; \theta) = v_1 \lambda + o(\lambda)$, $\mathcal{E}_2(\lambda; \theta) = v_2 \lambda + o(\lambda)$ (ただし、 $v_1 = \sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2} < v_2$, 各error termは $\theta \in E^*$ に関して一様) を用いてTheorem Aの結論を得る。□

4 Outline of Proof of Theorem B

この章ではTheorem Bの証明の概略を述べる。§3で得た $\mathcal{E}_1(\lambda; \theta)$ の評価は $\theta \in E^*$ に関し一様な評価であったが、bandの幅をより精密に評価するには、 $\mathcal{E}_1(\lambda; \theta)$ の $\theta \in E^*$ に依存する評価を得ることが必要である。この定理の証明にはW.K.B.解析が本質的な役割を果たす。

まず、準備として関数解析的な定義を述べる。一般に H : Hilbert sp.
 $E, F \subset H$: closed subsp. とする。

$\Pi_F : H \rightarrow F$; orthogonal projection onto F とする。

$$\vec{d}(E, F) := \sup_{x \in E, \|x\|=1} \text{dis}(x, F) = \|(1 - \Pi_F)|_E\|_H \text{ とおく。}$$

ここで、 $\theta \in E^*$ に対し $E_\theta(\lambda) := \{k\tilde{\psi}_\theta(\lambda) : k \in \mathbf{C}\}$, $F_\theta(\lambda)$ を $H(\lambda; \theta)$ の $\mathcal{E}_1(\lambda; \theta)$ に対応する固有空間とする。§3の内容と、関数解析的方法(see [3], Prop.2.5)を用いて次の補題を得る。

Lemma 4.1

$$\vec{d}(E_\theta(\lambda), F_\theta(\lambda)) = O(e^{-(s_0-2\eta)\lambda}) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

error term は $\theta \in E^*$ に関し一様である。

この補題と Lemma 3.1, Lemma 3.2 から次が得られる。

Lemma 4.2

$$\mathcal{E}_1(\lambda; \theta) = \tilde{\mathcal{E}}(\lambda) + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} + O(e^{-(2s_0-5\eta)\lambda})$$

(as $\lambda \rightarrow \infty$)

$s'_0 := \min_{\gamma \in \Gamma \setminus (\Lambda \cup \{0\})} d_V(\gamma, 0) (> s_0)$ において、Lemma 3.2 より

$$(4.1) \quad \mathcal{E}_1(\lambda; \theta) = \tilde{\mathcal{E}}(\lambda) + \sum_{\gamma \in \Lambda} e^{i\gamma \cdot \theta} (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \tilde{O}(e^{-s'_0\lambda}) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

を得る。(ただし $\tilde{O}(e^{-s'_0\lambda})$ とは $\forall \eta > 0$ に対し、 $O(e^{-(s'_0-\eta)\lambda})$ という意味である) また直接的な計算により次が判る:

$$(4.2) \quad (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \psi)_{L^2(\mathbf{R}^2)} = \overline{(\mathbf{T}_{-\gamma}^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)}} \quad \forall \gamma \in \Lambda$$

$\gamma \in \Lambda$, $a > 0$ に対し

$$E_\gamma^{(a)} := \{x \in \mathbf{R}^2 : d_V(0, x) + d_V(\gamma, x) \leq s_0 + a\} \text{ とおく。}$$

$a > 0$: 十分小 に対し、 $E_\gamma^{(a)} \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta) \cap B_V(\gamma, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$ である。

Ω : open domain with smooth boundary を

$$0 \notin \overline{\Omega}, \gamma \in \Omega, E_\gamma^{(a)} \cap \overline{\Omega} \subset B_V(\gamma, s_0 - \frac{3}{4}\eta), E_\gamma^{(a)} \cap \Omega^c \subset B_V(0, s_0 - \frac{3}{4}\eta)$$

を満たすように選ぶ。 $\tilde{\Gamma}_\gamma := \partial\Omega \cap E^{(a)}$ とおく。 $n = (n_1, n_2)$ を $\partial\Omega$ の outer unit normal とする。eigenfunction の decay estimate を用いて次の補題を得る。

Lemma 4.3

$$(4.3) \quad (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} \equiv \int_{\tilde{\Gamma}_{-\gamma}} \{ \phi \frac{\partial}{\partial n} (\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \tilde{\phi}}) - (\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \tilde{\phi}}) \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\phi} \} dS \\ - 2bi \int_{\tilde{\Gamma}_{-\gamma}} \phi \overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \tilde{\phi}} (x_2 n_1 - x_1 n_2) dS \quad \text{mod } O(\lambda^{-\infty} e^{-s_0 \lambda})$$

$(\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)}$ を $\text{mod } O(\lambda^{-\infty} e^{-s_0 \lambda})$ で近似するために、 $\tilde{H}(\lambda)$ の固有関数を W.K.B. 解で近似する。以下、W.K.B. 解について述べる。

$\varepsilon > 0$: 十分小に対し

$\Omega_\varepsilon :=$ the set consists of $\{0\}$ and the union of the interiors of all minimal geodesics from 0 to some point in $\mathbf{R}^2$, of length strictly less than $s_0 - \varepsilon$.

とおく。 $d(x) := d_V(x, 0)$ において、 $d(x) \in C^\infty(\Omega_0)$, $|(\nabla d)(x)|^2 = V(x)$ in Ω_0 が成り立つ。

Lemma 4.4 $\exists e_1, e_2, \dots \in \mathbf{R} \quad (e_1 = \sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})$

$$\exists \mathcal{E}(\lambda) \sim e_1 \lambda + e_2 + e_3 \lambda^{-1} + \dots \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

$$\exists a_0(x), a_1(x) \dots : \text{complex valued } C^\infty \text{ function in } \Omega_0$$

$$\text{with } a_0(x) \neq 0 \text{ in } \Omega_0, a_0(0) = 1, a_j(0) = 0 \quad (j \geq 1)$$

$$\exists a(x, \lambda) : \text{complex valued } C^\infty \text{ function of } x \text{ in } \Omega_\varepsilon$$

$$\text{s.t. } a(x, \lambda) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \lambda^{-j}$$

$$(i.e. \max_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |\partial_x^\alpha (a(x, \lambda) - \sum_{j=0}^N a_j \lambda^{-j})| = O(\lambda^{-(N+1)}) \quad \forall N \in \mathbf{N})$$

$$, (H(\lambda) - \mathcal{E}(\lambda))\theta(\lambda) = O(\lambda^{-\infty}) e^{-\lambda d(x)} \text{ in } \Omega_\varepsilon$$

$$(i.e. \sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |e^{\lambda d(x)} (H(\lambda) - \mathcal{E}(\lambda))\theta(\lambda)| = O(\lambda^{-\infty}))$$

$$\text{where } \theta(\lambda) := \lambda^{\frac{1}{2}} a(x, \lambda) e^{-\lambda d(x)}$$

$\varepsilon > 0$ を固定する。 $\|\theta(\lambda)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 1$ と normalize しておく。

$K \subset \Omega_\varepsilon$: compact とする。 $\eta > 0$ を十分小さく取って、 $\Omega_\varepsilon \subset B_V(0, s_0 - \eta)$ とする。

$\widehat{K}$ を K の点と $\{0\}$ とを結ぶ minimal geodesic 全体のなす集合とする。 $\widehat{K} \subset \Omega_\varepsilon$ である。

$\tilde{\Omega} : \widehat{K}$ の開近傍を $\tilde{\Omega} \subset \subset \Omega_\varepsilon$ となるように選ぶ。

$\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ を、 $\chi = 1$ in nbd. of $\widehat{K}$, $\text{supp } \chi \subset \tilde{\Omega}$ を満たすように選ぶ。

Lemma 4.4を用いて、 $|(\chi\theta(\lambda), \tilde{\phi}(\lambda))_{L^2(\mathbf{R}^2)}| = 1 + O(\lambda^{-\infty})$ を得る。

このことから、十分大きい λ に対して、 $\tilde{\phi}(\lambda)$ は $(\chi\theta(\lambda), \tilde{\phi}(\lambda))_{L^2(\mathbf{R}^2)} > 0$ を満たすとしてよい。

$\omega(\lambda) = \chi(\tilde{\phi}(\lambda) - \theta(\lambda))$ とおく。

Lemma 4.5 $\tilde{K}$: nbd. of $\widehat{K}$ が存在して $(\tilde{K} \subset \subset \tilde{\Omega})$
 $\omega = O(\lambda^{-\infty})e^{-\lambda d(x)}$ in $H^2(\tilde{K})$ が成り立つ。

この補題と(4.3)より

$$(4.4) \quad (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} \equiv \int_{\tilde{\Gamma}_{-\gamma}} \left\{ \theta \frac{\partial}{\partial n} (\overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \theta}) - \overline{(\mathbf{T}_{-\gamma}^B \theta)} \frac{\partial}{\partial n} \theta \right\} dS \\ - 2bi \int_{\tilde{\Gamma}_{-\gamma}} \theta \overline{\mathbf{T}_{-\gamma}^B \theta} (x_2 n_1 - x_1 n_2) dS$$

を得る。仮定 (H.7), (H.8) と Morse lemmaを用いて、

$$(4.5) \quad (\mathbf{T}_\gamma^B \tilde{r}, \tilde{\psi})_{L^2(\mathbf{R}^2)} = (\tilde{b}_\gamma \lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda^{\frac{1}{2}})) e^{-s_0 \lambda} \quad (\lambda \rightarrow \infty) \quad , \gamma \in \Lambda \\ \text{with } \tilde{b}_\gamma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$$

を得る。仮定(H.9) と $\tilde{b}_\gamma = \overline{\tilde{b}_{-\gamma}}$ for $\gamma \in \Lambda$ であることを用いて定理の結論を得る。□

References

- [1] B. Simon : *Semiclassical Analysis of Low-Lying Eigenvalues III. Width of the Ground State Band in Strongly Coupled Solids*, Anal. Phys. ,158 (1984),415-420.
- [2] A. Outassourt: *Comportement semi-classique pour l'opérateurs de Schrödinger à potentiel périodique*, J. Funct. Anal. 72 (1987) 65-93.
- [3] B. Helffer-J. Sjöstrand : *Multiple wells in the semi-classical limit I*, Comm. in P.D.E. , 9(4), (1984) 337-408.