

応用数学を理解するための数学ソフトウェアの役割 —工学専攻の授業を通しての考察—

日本大学・理工学部 山本修一 (Shuichi Yamamoto)
College of Science and Technology,
Nihon University

1 はじめに

最近の数学ソフトウェアは、グラフの描画機能だけでなく、動画の作成機能も飛躍的に向上している。グラフの描画機能の進化によって、テイラー展開やフーリエ級数展開が格段に理解しやすくなった。一方、動画は偏微分方程式、特に 1 次元の熱方程式や波動方程式など、その解の挙動が平面上で動きとして表現される分野でその威力が顕著に発揮される。

10 年以上工学専攻の学生を対象に応用数学という授業で、*Mathematica* という数式処理ソフトを活用してきた。そのような授業の実践からフーリエ解析や 1 次元の熱方程式に関して、数学ソフトウェアの役割について考察し下記のような報告をした ([6])。

フーリエ解析では、フーリエ係数を先に紙と鉛筆で計算させ、その後それに対応する動画を見せてその挙動を観察させてフーリエ級数展開の理解を深める授業を提案した。

また、簡単な偶関数 $f(x)$ のフーリエ変換を例にして、イメージするのが難しい 2 つの関数 $f(y)$ と $\cos sy$ (s は実数) の積のグラフを視覚化し、変数 s に応じて描かれる積のグラフに対してその面積を 2π で割った値がどのようなグラフを描くか、その対応関係を見せる動画を作りフーリエ変換の仕組みを理解させた。さらに、積分公式を近似する動画を見せるなど、フーリエ解析の理解に対し数学ソフトウェアのグラフ表現力がいかに威力を発揮するかを、学生のアンケート調査をもとに考察した。

1 次元の熱方程式では、動画を活用すれば解の挙動が手に取るように理解できることを論じた。例えば、長さが π の棒の両端を氷漬けし、 $t = 0$ における棒の位置 x の温度を $\sin x + \sin 3x$ と仮定したとき、その後の時間 $t(> 0)$ における棒の温度 $u(t, x)$ は熱方程式 $u_t = u_{xx}$ (ただし、簡単のために熱拡散係数を 1 とした) に従う。微分積分学を少し勉強すれば、この解は $u(t, x) = e^{-t} \sin x + e^{-9t} \sin 3x$ であることはすぐわかる。

しかし、数学ソフトウェアが表現する動画を活用すれば、この解がフーリエの法則を見事に表現していることを視覚的に体感できるだけでなく、数式の果たす重要性も視覚的に理解できるなどその役割を明らかにした。

本論文では、数学ソフトウェアが表現する動画が最も本領を発揮すると思われる 1 次元波動方程式を取り上げ、*Mathematica* を活用し、そこでの数学ソフトウェアの役割について論じる。

考察にあたっての我々の立場を明らかにする。大学初年次に学習する微分積分学などと比べると、少し習得しにくい数学、例えばフーリエ解析や偏微分方程式を、証明を基

盤にするのではなくその内容を視覚的に関連付けて、できるだけ短期間に応用できる段階まで引き上げるのが授業の狙いである

応用数学をどのような観点で捉えるかにもよるが、工学を専攻する一般的な学生にとっては“あらゆる場面で数学を上手に活用できる力”をあまり時間をかけないで身に付けさせることが重要である。そのためには、学習する数学の内容に適切なイメージを関連付けていくことが有効であると考えている。証明を辿りながら数学を理解する手法も正しいが、人によってはかなりの時間が必要であり、工学を専攻する学生にそこまでのモチベーションを要望できない実情もある。

最近の学生の変化から、微分方程式の授業では解の存在や一意性にあまり言及しないで解法だけに終始する場合が多くなっている。この方向がいいかどうかは別にして、数学ソフトウェアを活用して解の挙動を視覚的に観察しながら学ぶ方が、一般的な学生は微分方程式の意義と重要性をより理解しやすいと考えている。

また、微分方程式の学び方について様々な議論があると思うが、解を求める計算手法に終始するのではなく、解の挙動（動きなど）を視覚的に観察しながら学び、『解の挙動と結び付けた微分方程式の理解』を提案したい。このことを波動方程式を例にして論じ、そこでの数学ソフトウェアが果たす意義も明らかにする。

2 実践した授業の内容

授業は工学専攻（機械系，電子情報系）の学生を対象に行っている。前期は応用数学 I，後期は応用数学 II の授業を担当している。受講生は大体前期博士課程の 1 年生である。大学の 1 年，2 年で、微分積分学，線形代数学，定数係数 2 階線形微分方程式を学んでいるが，他の工学の授業でフーリエ解析や偏微分方程式に係わった学生もいる。以下はその授業内容である。

(1) 応用数学 I（前期 2 単位）

三角関数の和と積（フーリエ解析で重要な役割を演じる性質の視覚化），データの最小 2 乗法，関数の多項式近似（ラグランジュやニュートンの補間法），関数の局所近似（テイラー展開），関数の直交性とフーリエ係数，フーリエ級数展開，積分公式とフーリエ変換，離散フーリエ変換（デジタルからアナログへ）。

(2) 応用数学 II（後期 2 単位）

微分方程式の解について（差分近似を通して），定数係数の 2 階線形微分方程式（解の挙動を中心した考察），線形微分方程式と行列基本解，フーリエ解析と一次元偏微分方程式の解法 (i) 熱方程式（差分近似解法と解の挙動を中心した考察），(ii) 波動方程式（差分近似解法と解の挙動を中心した考察）。

授業では，パソコンからプロジェクタを介して前方のスクリーンに投影できるようになっている。使用する数学ソフトウェアは *Mathematica* である。授業では，ほぼすべての内容について視覚化，可能であれば動画にするなどしてイメージを強調する。

3 解の挙動を観察しながら理解する偏微分方程式（1次元波動方程式の理解を通して）

微分方程式は、数学ソフトウェアの役割が最も期待できる分野の一つである。ここでは1次元波動方程式に対してその役割について論じたい。

1次元波動方程式では簡単な初期値問題とそれに対する解法を最初に学ぶが、まず、何を学ぼうとしているのか、ピーンと来ない学生が多くいる。波動という現象が学びの中に位置付けられていないのである。波動現象を学びの対象として誘導するのも数学ソフトウェアの重要な役割である。

1次元波動方程式の基本的な初期値問題は、「連続な関数 $u = u(t, x)$ で波動方程式

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (c \text{ は正の定数}) \quad (0 < t, -\infty < x < \infty)$$

を満たし、かつ初期条件 $u(0, x) = f(x), u_t(0, x) = g(x) \quad (\infty < x < \infty)$ を満たすような $u(t, x)$ を求めよ」というものである。ただし $f(x), g(x)$ は任意の関数である。

この問題に対して、その解の候補として、ダランベールの解

$$u = u(t, x) = \frac{1}{2} \{f(x - ct) + f(x + ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

がある。さらに、区間 $[0, L]$ 上で区分的に滑らかな関数 $f(x), g(x)$ に対して、境界条件として、 $f(0) = f(L) = 0$ および $g(0) = g(L) = 0$ を仮定し、 $0 < t, 0 < x < L$ において波動方程式を満たし、かつ $u(0, x) = f(x), u_t(0, x) = g(x), u(t, 0) = u(t, L) = 0$ (L は正の定数) を満たす解 $u = u(t, x)$ を求める問題とすれば、解としてフーリエ級数

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (C_k \cos \frac{ck\pi}{L}t + D_k \sin \frac{ck\pi}{L}t) \sin \frac{k\pi}{L}x$$

を考えることもできる。ただし、 C_k, D_k はフーリエ係数として以下のように与えられる。

$$C_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L}x dx, \quad D_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{k\pi}{L}x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

後者の境界条件を設定した場合、振動する弦の挙動と結び付き、この挙動の方が学生はイメージしやすいのでこの場合を主として考察する。

さて、この問題の解法を理解しようとするとき、ダランベールの解では、 $f(x)$ や $g(x)$ に適当に微分可能性を仮定すれば、表現する数式が解を与えることは偏微分を実行するだけなのでそんなに難しくなく、しかし、 $g(x) = 0$ とするとき、 $f(x)$ のグラフが t の増加とともに左右に速度 c で進行する波の重ね合わせであることを理解し、その挙動までイメージできる学生は少ない。そもそも進行する波の概念がない。

さらに、 $g(x) \neq 0$ のときは積分表示が含まれるのでイメージするのはもっと困難になる。よって、学生の多くは単に解を表す数式として終わってしまい、この解が表現する挙動についてこれ以上深く知りたいとは思わない。

また、解をフーリエ級数として表現した場合、一様収束などの条件を仮定してうまくフーリエ係数を決めれば、形式的に解（形式解）になることの検証も難しくはない。

工学系の入門テキスト（[1],[2],[3]）では、収束性などは後回しにして最初は深く言及しないが、それでも三角関数のグラフの和のイメージになれていない学生にとっては、多くの三角関数のグラフの和を考えるので解のイメージは全く湧かない。

このような学生の学習状況を考えると、数式で理解させようとする板書中心の授業では、授業を通して彼らに“わかった”と思わせることはそう簡単ではない。

イメージできないものは応用できないというのが我々の主張である。具体的な例を通してその挙動を観察し、学生に“わかった”と感じさせることが、応用への早道だと考えている。そのために数学ソフトウェアの活用を提案したい。

ダランベールの解は、時間 t に伴う表現を動画によって観察すればその本質がわかりやすい。また、フーリエ級数で表現される解なら、有限和の挙動から推定せざるを得ないが、動画として和の個数を増やしながらその挙動を観察することで本質の理解に近づくことができる。さらに両方の解法を動画で観察することによって、理論の厳密さを欠いた議論の妥当性も実感させてくれる。

動画を見ることができない場合は、その挙動を断片的な図でわからせるより方法はないが、動画の方が、“わかった”と思わせる効果があることは言うまでもない。

以下、初期変位のグラフに微分できない点が含まれる場合と初期速度がある場合について、いくつかの例を考察して数学ソフトウェアの役割について論じる。

(a) 初期変位のグラフに微分できない点が含まれる場合

このときは、有限個の例外点を除けば条件を満たす解は広義な解として定義される。

例えば、初期変位が下の三角形（図 4-1）で初期速度がない場合を考える。

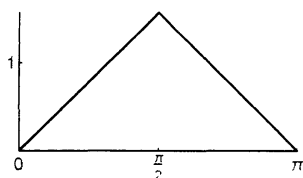


図 4-1

上の図から、 $x = \frac{\pi}{2}$ で微分できないことがわかる。このとき広義な解になるがこの広義な解の挙動を理解したい。テキストで説明する場合は動画を活用できないので、動画の1シーンを断片的に図として示し、その挙動の様子をわからせようとしている。例えば、解の挙動を説明するのに下にあるような図（図 4-2）を用いたり（[2]）、フーリエ級数を利用する場合、その収束性などの不備を補足する意味で、ダランベールの解のように表現し直し、その解が示す重ね合わせの図（図 4-3）を断片的に示すことで、解の挙動（図 4-2）をわからせる例がある（[1]）。

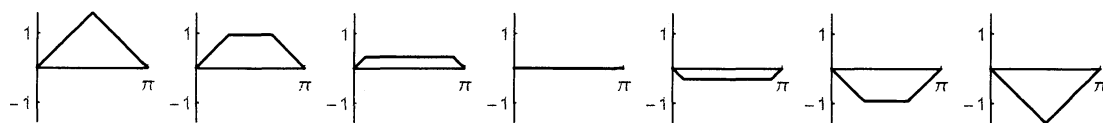


図 4-2

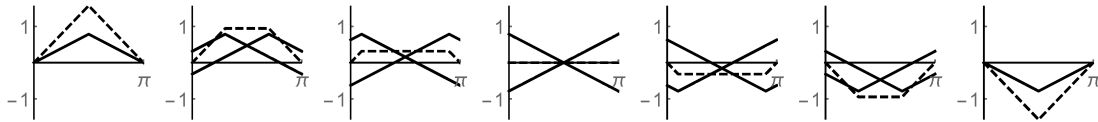


図 4-3

さて、動画を活用して学ぶ場合を考察する。まず、三角形の初期変位（図 4-1）を周期 2π の奇関数（図 4-4）に拡張し

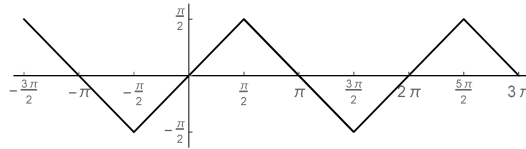


図 4-4

この関数のフーリエ級数展開は下記の式で与えられることを動画で視覚的に確認する。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \sin \frac{k\pi}{2}}{k^2 \pi} \sin(kx)$$

以下は、和を $k = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ までとした場合のそれぞれのグラフ（図 4-5）である。

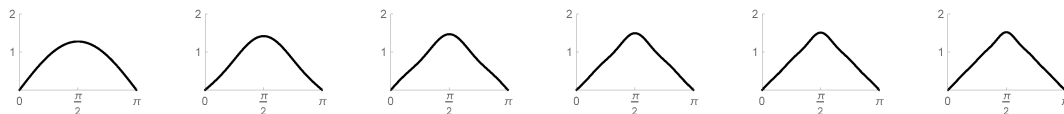


図 4-5

簡単のため $c^2 = 1$ とする。ここで解をフーリエ級数に表現して考察する。このとき、無限和のグラフは観察できないので

$$u(t, x, n) = \sum_{k=1}^n \frac{4 \sin \frac{k\pi}{2}}{k^2 \pi} \cos(kt) \sin(kx)$$

として n を大きくしながら観察する。まず、図 4.5 の最後のグラフを初期変位として考察する。すなわち、 $u(t, x, 11)$ を考えて $t = 0$ から t の値を大きく変化させながら挙動を観察する。この挙動は下に示される図（図 4.6）が断片的な 1 シーンとなる動画として得られる。

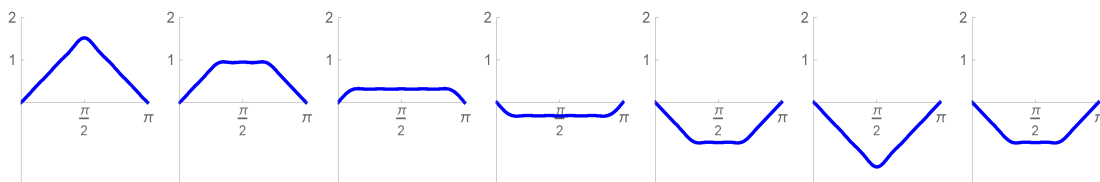


図 4-6

この動画の挙動を見る限り、 $n \rightarrow \infty$ のとき、時間が $t = 0$ の直後に三角形の頭から折れるような挙動（図 4-2）に近づくか、明確に推測できない。そこで三角関数の積を和にする公式を用いて $u(t, x, n)$ を以下のように表現する。

$$u(t, x, n) = \sum_{k=1}^n \frac{2 \sin \frac{k\pi}{2}}{k^2 \pi} \sin k(x+t) + \sum_{k=1}^n \frac{2 \sin \frac{k\pi}{2}}{k^2 \pi} \sin k(x-t)$$

このとき、上の式の右辺の第一項と第二項とその和の 3 つのグラフが示す動画を和の個数を増やしながら観察する。下の図 4-7 は $u(t, x, 11)$ のときに、 $t = 0$ から t の値を大きく変化させたとき、上の 3 つのグラフの挙動を表す動画を断片的に示した図である。

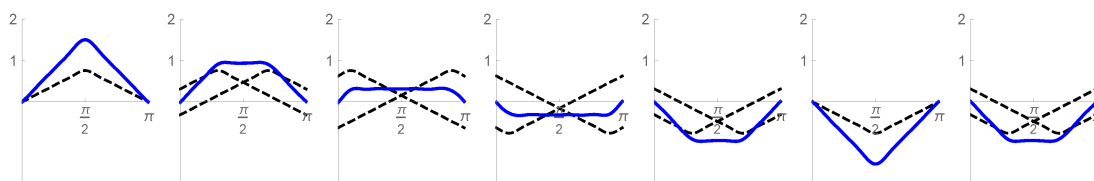


図 4-7

上の動画（図 4-7）において、 $n \rightarrow \infty$ とする。図 4.4 のグラフが表す関数のフーリエ級数展開の式から、上の式の右辺の第一項と第二項の 2 つのグラフ（点線）は先の尖った三角形のグラフ（図 4-4 のグラフを t だけ左右に移動させたグラフ）に近づくはずである。故に、和として描かれる実線のグラフは、 $n \rightarrow \infty$ のとき三角形の先が x 軸に平行に折れるようなグラフの挙動（図 4-2, 図 4-3）に近づくことが得心される。

これを通してダランベールの解が広義な解として妥当であることが理解される。また、このように広義な解の挙動を動画で観察することで、フーリエ級数で表現される解とダランベールの解とが一致することを視覚的に理解することができる。まさに、フーリエ級数の理論が美しく花開く瞬間でもあり感動する。

慣れれば何でもないかも知れないが、初めて学ぶ学生には動画を活用して解のイメージを育成することは重要であり、このことを通して深い理解につながると考えている。

(b) 初期速度を持つ場合

ダランベールの解によれば、初期速度 $u_t(0, x) = g(x)$ のとき、振動現象は

$$\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds = \frac{1}{2c} \{G(x+ct) - G(x-ct)\}$$

によって記述される。ただし、 $G(x)$ は $g(x)$ の原始関数である。しかし、この式から初期速度が振動現象にどのように影響を及ぼすか、イメージできる学生は少ない。

以後、 $f(x) = 0$ かつ $c^2 = 1$ とする。最初に、 $g(x) = \sin x$ のとき、弦の振動としてイメージしやすいので、この仮定で動画を活用する場合を考察する。

この場合 $G(x) = -\cos x$ だから $(-\cos(x+t) + \cos(x-t))/2$ に従って変位が生じるはずである。まず、関数 $(-\cos(x+t))/2$ と $(\cos(x-t))/2$ のグラフ（それぞれ実線と点線で表す）を $t = 0$ から t の値を大きくすると、実線、点線がそれぞれ左へ、右へと進行する動画になり、その挙動を断片的に示せば以下のような図（図 4.8）になる。

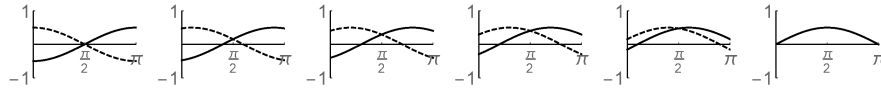


図 4-8

続いてそれらの重ね合せ（和）の変位を先の動画（図 4-8）に追加して観察すると断片的に以下の図（図 4.9）が示す挙動になる。

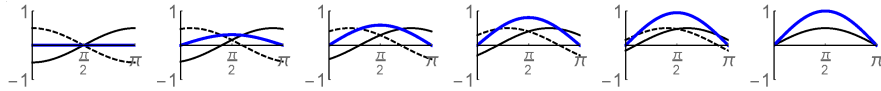


図 4-9

この動画から確かに初速度 $g(x) = \sin x$ に対応する振動現象として納得できる。

次に、初期速度が $g(x) = x$ ($0 \leq x < 1$) かつ $g(1) = 0$ の場合を考察する。 $x = 1$ で連続でない。このとき広義な解としてその現象をイメージする必要がある。(a) と同様に、初期速度のグラフを以下のように周期 2 の奇関数（図 4.10）に拡張する。またその原始関数（点 $x = 2k - 1$ を除く）として、下の図 4-11 のグラフで定義される周期 2 の偶関数を考える。ただし、 k は整数で、関数は閉区間 $[-1, 1]$ では $x^2/2$ である。

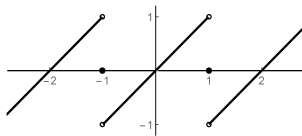


図 4-10

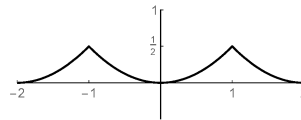


図 4-11

まず、フーリエ級数を利用して解を求める。 $c^2 = 1$ で $L = 1$ としているので

$$D_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^1 x \sin k\pi x dx = \frac{-2(-1)^k}{k^2\pi^2}$$

と計算される。初期変位はないので、 $C_k = 0$ 。よって形式解は

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^k}{k^2\pi^2} \sin(k\pi x) \sin(k\pi t)$$

と表される。さらにこの式に三角形の積を和にする公式を適用すると

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2} \cos k\pi(x+t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2} \cos k\pi(x-t) \right)$$

と表せる。ここで、動画によって、図 4-10 のグラフが表す関数の原始関数の 1 つが

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2} \cos k\pi x$$

であることがわかる。実際、図 4-11 のグラフを y 軸方向に $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2}$ だけ移動したグラフになる。これは証明すべき内容であるが動画で視覚的に確認できる所が重要である。

従って、ダランベールの解 $u(t, x) = (G(x+t) - G(x-t))/2$ の妥当性が確認でき、その動画は、不連続な初期速度をもつにも関わらず、三角形の頂点が以下の断片的な図（図 4-12）のように反時計回りに回転する連続的な挙動を表現する。

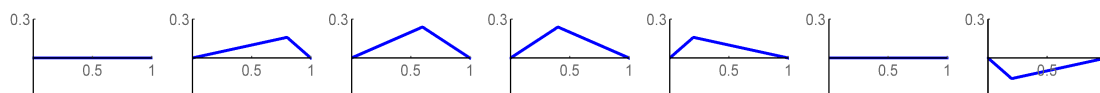


図 4-12

このように数学ソフトウェアを活用して考察することで，振動現象が生じる仕組みが視覚的にかつ容易に理解できる．また，図 4-10 と図 4-11 の関係を考察すれば逆に振動現象から初期速度を推測することも可能になり，まさに応用に手が届く境地に近づく．

4 まとめ

数学ソフトウェアを活用して 1 次元波動方程式の学び方の提案をしてきた．ここでは，左右に進行する 2 つのグラフの重ね合わせが解になるのが特徴であり，それを動画で観察して初めて波動現象として実感できる．また，そこにフーリエ級数を用いた絶妙なアプローチが混ざり合う．その融合がすべて視覚的に理解でき応用への道も開ける．

また，フーリエ級数で表される解は，収束性などいくつかの条件を仮定して得られるものであるが，動画による例を通して考察すればその正当性を感じ取ることができる．

工学専攻の学生にはむしろその方がいいとさえ考える．厳密性よりも，むしろ，数学の世界に存在する美しい関係を視覚的に理解し，それに感動し，応用にまで結ぶつけてほしいと期待する．

授業では数学的ソフトウェアは主に動画の作成に活用され，その動画をプロジェクタでスクリーンに投影することで，学生理解のための支援的役割を担った．これに対する学生の反応を見るために平成 23 年度の授業におけるレポート提出時に，成績とは無関係とした上で，以下の問に対して選択肢から選ぶようなアンケート調査を要請した．

問 1 数学的に解を導き，Mathematica を使ったアニメーションでビジュアルに確認する方法で授業を展開しましたが，内容を理解する上で効果的だったと思いますか

問 2 微分方程式の解を Mathematica で実際に見ることは微分方程式の理解を深めるのに役に立ちますか

問 3 Mathematica で実際に解の挙動を見ることで，微分方程式はより重要であると思いましたか

回答者は 17 名で，回答する選択肢は，問 1 と問 3 では，(A) 非常にそう思う，(B) かなりそう思う，(C) どちらともいえない，(D) あまりそう思わない (E) 全くそう思わない，問 2 では，(A) 非常に役に立った，(B) かなり役に立った，(C) どちらともいえない，(D) あまり役に立たなかった (E) 全く役に立たなかった，である．

アンケート調査の結果

問の番号	1	2	3
(A)	6	7	7
(B)	11	8	7
(C)	0	2	3
(D)	0	0	0
(E)	0	0	0

上のアンケート調査の結果を見ると、学生は好感をもって受け入れたと判断できる。すべてビジュアルが良いというわけでもない。学生自身と相容れない場合も起こる。やはり「学生にとってわかりやすい」という視点を忘れてはいけないと考えている。

一方、授業者側の立場からは、数式で成り立つ関係を数学的ソフトウェアを活用して視覚的に教授できるように、また、できれば動画として、と準備する段階で、それまで達し得なかった深い理解や新しい発見が伴った。数学を実験しながら学ぶ手法も、分野によっては非常に重要だと何度も思った。感動を覚えるときもあった。

また、今回のように波動方程式の解の挙動が視覚的にわかると、初期変位や初期速度を別の式で設定した場合、どのような挙動が示されるか、知りたくてたまらなくなる。さらに、数学ソフトウェアを活用すれば、フーリエ係数の計算に必要な積分の値は瞬時に計算してくれる。コンピュータの専門家でない者でも、少し慣れれば簡単に解の挙動がわかる動画を作ることができる。操作も増々簡単になってきている。

学習者はコンピュータの画面に映し出される解の挙動だけに集中でき、結果によっては、理論的な整合性にも目を向けざるを得なくなる。まさにアクティブラーニングにつながるのである。アクティブラーニングは高校、大学初年次教育だけにある問題ではない。大学院で学ぶ学生にも適用されてしかるべきである。

このようなアクティビティは視覚的な関連付けによる効果が大きく、数式のみ解を得ただけでは喚起されないと考えている。

数学を習得する場合、いつも数学ソフトウェアを手元におき、実験しながら学ぶ時代になっているのかも知れない。特に数学の応用を目的とする工学専攻の学生にはこのような学び方が好ましいと考える。

参考文献

- [1] ドナルド・A・マックオーリ：偏微分方程式，マックオーリ 初歩から学ぶ 数学大全 5（入江克/入江美代子訳），講談社，2010.
- [2] E. クライツグ：フーリエ解析と偏微分方程式（原書第 8 版），技術者のための高等数学 3（阿部寛治訳），培風館，2007.
- [3] 小出眞路：工学系のための偏微分方程式，森北出版，2006
- [4] 日本 Mathematica ユーザー会：入門 Mathematica，東京電機大学出版局，2009.
- [5] 谷川明夫：フーリエ解析入門，共立出版，2007
- [6] 山本修一：イメージ化がもたらす深い理解と数学の有用性—ソフト Mathematica を活用して—，京都大学数理解析研究所講究録 1780 「数学的ソフトウェアの効果的利用に関する研究」,pp. 221-231, 2012
- [7] 山本芳彦：数学実験入門，岩波書店，2000.