

乱れた散逸的振動場における振動数同期とその破れ

京大理 郡 宏 (kori@ton.scphys.kyoto-u.ac.jp) 蔵本 由紀

細胞の持つ生化学反応のループは力学系でリミットサイクル振動子として記述される。その代表的な例として神経細胞や心筋細胞が挙げられる。生体ではこれらが密に集まった組織が頻繁に見られ、固有の機能を担っている。例えばナメクジの嗅覚系や粘菌では、細胞集団を伝播する位相波によって情報伝達を行っている。通常、細胞集団は一様な性質を持たず、また外部からも攪乱を受ける乱れた場であるが、乱れによって伝達が阻害されない機構を備えていると考えられる。一般に、散逸的な振動場ではこのような機構が備わっていることが期待され、それを簡単なモデルを用いて明らかにしていくことが本研究の目的である。位相波は、バルクより高い振動数を持つ振動子、いわゆるペースメーカー (PM) がソースとなる。位相波が安定に伝播する領域はペースメーカーに振動数が一致している領域である。この位相波が何らかの原因で伝播を阻害されるとき、完全な振動数同期は破れ、固有の振動数に近づく。従って場の振動数分布は位相波伝播の安定性を知るよい指標となる。本研究では一様な振動場の一端に PM を導入し、位相波伝播のノイズに対する安定性を調べる。空間次元は現実的な系を記述する意味では 2 次元以上が適当であるが、今回は 1 次元での現象を明らかにする。

モデル化を以下のように行う。場を記述するモデルは結合リミットサイクル振動子の標準モデルである複素 Ginzburg-Landau 方程式 (CGL)、 $\partial_t A(r, t) = (1 + ic_0)A - (1 + ic_2)|A|^2 A + (1 + ic_1)\nabla_r^2 A$ を用いる。 A_x は複素変数、 c_0, c_1, c_2 は実数パラメータで $c_0 - c_2$ が固有振動数を与える。ここでは細胞集団のモデル化が念頭にあるので空間を離散化する (と勢いで離散化はしてみたが、これは以後の議論に本質的な影響を与えない。結果は連続系でも全く同じである)。場の乱れとしてノイズを導入する。場より振動数が $\Delta\omega$ だけ大きい PM を左端におく。PM には結合もノイズも入れないが、これは解析を容易にするためで以後の結果に大差はない。これより 1 次元系のモデルは

$$\partial_t A_0(t) = (1 + i\Delta\omega)A_0 - (1 + ic_2)|A_0|^2 A_0$$

$$\partial_t A_x(t) = A_x - (1 + ic_2)|A_x|^2 A_x + K(1 + ic_1)(A_{x+1} + A_{x-1} - 2A_x) + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\mu f_x(t)$$

となる。 x はサイト ($x = 1, 2, \dots, N$)、 N はシステムサイズ、 K は格子定数の逆数である。右端は自由境界とする。 $f_x(t)$ は分散 1 の白色ガウスノイズで実数パラメータ μ がノイズの強度を与える。以後、 $1 + c_1 c_2 > 0$ (Benjamin-Feir 安定)、 $c_2 - c_1 > 0$ を仮定する。数値シミュレーションでは $\Delta\omega = 0.1, c_1 = -0.4, c_2 = 0, K = 1$ としてある。

まず、ノイズがゼロ ($\mu = 0$) のときを考える。場は進行波解 $A_x(t) = A^0 \exp[i(dx - \omega_d t + \phi)]$ に $t, x \rightarrow \infty$ で漸近する。ここで ϕ は任意定数、 $A^0 = \sqrt{1 - k^2}$ 、 $\omega_d = (c_2 - c_1)k^2$ 、 $k^2 \equiv 2(1 - \cos d)$ である。 k は連続極限での波数であり、便宜上、 d ではなく k を波数と呼ぶ。 $\Delta\omega < c_2 - c_1$ のとき PM へ振動数同期をする進行波解が存在し、隣り合う振動子の位相差 d は $\omega_d = \Delta\omega$ より決まる。この解が安定なとき波は無限遠まで透過し、大域的な振動数同期状態が得られる。CGL の進行波解の安定性解析は Eckhaus によってなされており、小さな k では安定であるが、ある臨界値 $k = k_E$ で不安定化し、これは Eckhaus 不安定性と呼ばれている。上述のパラメータは $\Delta\omega < (c_2 - c_1)k_E^2 (= 0.4/3)$ を満たし進行波解は安定である。実際数値シミュレーション

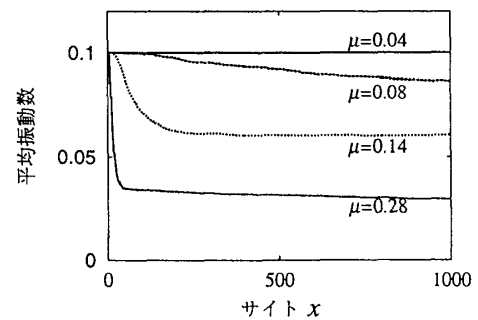


図 1: ノイズ下での振動数分布。PM($x = 0$) の振動数が 0.1、バルクの固有振動数は 0 である。

では十分大きい N (システムサイズ) で大域的な振動数同期状態が確認できる。当然のことながら、進行波に局所的な摂動を加えても直ちに減衰する。比較的大きな摂動でも同様で、局所的な摂動では振動数同期は容易には破れない。

さて本題の、ノイズが加えられた場合である。摂動に対してはロバストな構造を持つ進行波解であるが、ノイズに対してはまるで異なる挙動を見せる。図1は長時間平均を取った振動数分布を様々なノイズ強度に対してプロットしたものである。弱いノイズ (e.g. $\mu = 0.04$) では大域的な振動数同期を本質的に保っているのに対しある程度以上のノイズ (e.g. $\mu = 0.14$) では PM 近傍では振動数同期を保つが、ある特徴的なサイト付近 (e.g. $x \sim 50$) で急激に振動数が減少している。また、振動数がある程度落ち込んだ後 (e.g. $x > 500$) は再び振動数同期を保ち、ほとんど減衰しなくなる。結果はより大きなシステムサイズに対しても同様であり、大きければ大きいほど $\mu \sim 0.05$ にある転移が明確になる。

この現象は以下のように説明される。ノイズが十分小さいときは進行波は“安定”で十分遠方まで波は透過する。ある臨界値を越えるノイズでは進行波が“不安定化”し、伝達が阻害され波数が下がる。ある程度、波数が下がると再び波が“安定化”し、再び十分遠方まで波は透過する。実際、この安定性の変化を引き起こすノイズ強度の臨界値は次のように理論付けられる。ノイズが無いときの波の安定性は $A_x(t) = A^0[1+a_x(t)]\exp[i(dx+\omega_d t+\phi_x(t))]$ として、振幅と位相の微小な揺らぎ a, ϕ についての発展方程式を調べればよい。 $a, \phi \sim \exp(\sigma t + ipx)$ とすると、波数 p の揺らぎに対する安定性は図3のように求まる。 $k > k_E$ に対しては長波長 (小さな p) の揺らぎに対しすでに不安定 ($\Re(\sigma) > 0$) であるが、現在問題としているのは $k < k_E$ の方であり $p = 0$ を除く全ての波数に対し安定である。 $p = 0$ の揺らぎは一様な位相のシフトであり、固有値は常に0となる。ここでノイズを考える。波数 p の揺らぎの振幅を ϵ_p とおくと、微小な ϵ_p に対し Langevin 方程式 $\epsilon_p = \Re(\sigma)\epsilon_p + \mu f(t)$ が成り立つ。これは調和ポテンシャル中の拡散方程式と等価であり、 ϵ_p の分散の発展は $\langle \epsilon_p^2 \rangle = \frac{\mu^2}{|\Re(\sigma)|} (1 - \exp[\Re(\sigma)t])$ に従う。 ϵ_p は $O(1)$ までこの発展方程式に従い、それ以上の発展は非線形性によって抑えられると期待される。つまり $|\Re(\sigma)| = \mu^2$ を満たす p を $\tilde{p}$ とすると (図3参照)、この波数までの揺らぎが $O(1)$ まで発展する。従ってノイズ下では進行波の波数が $k - \tilde{p} < k < k + \tilde{p}$ で揺らぐことがわかる。ここで $k + \tilde{p}$ が k_E より大きい時、進行波は局所的に Eckhaus 不安定となって伝達が阻害され、波数は進行波が安定化するまで自発的に落ちる。つまり、 $k + \tilde{p} = k_E$ を与える μ が臨界値 μ_c である。

実際この μ_c を計算し、図1のシミュレーションで得られた右端の振動数とともにプロットしたのが図3である。実線が理論値でこれより左の領域が安定、右が不安定である。理論上は $\Delta\omega$ が $\mu < \mu_c$ まで保たれ、不安定領域に入ると安定化するまで自発的に波数が下がる。 $\mu = 0.05$ 近傍で多少ずれているのは、システムサイズが十分でないためである。

さて、 $N \rightarrow \infty$ での挙動、2次元系への拡張、生体に対する考察などと続けたいのですが紙面の都合などのためここまでは。ここまでは “noise-induced Eckhaus instability” が適切な題名かもしれませんが。この先に興味を持たれる方は一声かけてください。雨雪雷槍、構わずに参上します。

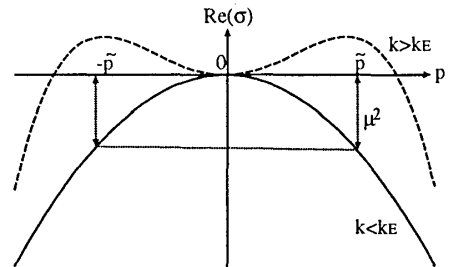


図 2: 分散関係

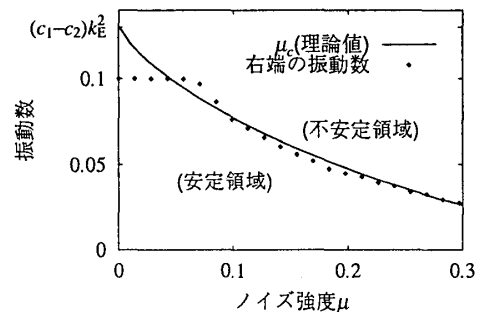


図 3: 右端での振動数とノイズの臨界値