

ある種の非線形方程式 の閉軌道について

埼玉大 理工 佐藤 祐吉

2 階の微分方程式

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right)$$

の周期解の存在について考える.

ここで $f(x)$, $g(x)$ に次の条件を置く.

(i) $f(x)$ は連続で

$$f(x) < 0 \quad , \quad \beta_2 < x < \beta_1$$

$$f(x) > 0 \quad , \quad x < \beta_2 \text{ 又は } x > \beta_1$$

(ii) $g(x)$ は Lipschitzian である. 更に

$$g(x) > 0 \quad , \quad x < \alpha \text{ 又は } x > 0$$

$$g(x) < 0 \quad , \quad \alpha < x < 0$$

(iii) $g(x)$ は $x = \alpha, 0$ で微分可能で

$$g'(\alpha) < 0 \quad , \quad g'(0) \equiv 0$$

Sanzone-Conti [1] は $\alpha < \beta_2 < 0 < \beta_1$ の場合に, 周期解が存在する十分条件を与えている。

我々は最初に周期解が存在しない場合を考える。

定理 1. 条件 (i) ~ (iii) と更に (a). $\beta_2 < \alpha$, $0 < \beta_1$,

(b). $\int_0^{\beta_1} g(s) ds \equiv \int_0^{\alpha} g(s) ds$ であるか又は

$\int_0^{x_1} g(s) ds = \int_0^{x_2} g(s) ds$, $\alpha < x_1 < x_2$ となる x_1, x_2 に対して

$$(2) \quad \frac{g(x_1)}{f(x_1)} < \frac{g(x_2)}{f(x_2)} \quad \text{』}$$

このとき, (1) は定数を除いて, 周期解を持たない。

証明. (1) と同値な system

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x)y - g(x) \end{aligned}$$

を考える。この system は, 任意の初期値に対する解は唯一つであり, 又 (3) の limit cycle が (1) の周期解と 1-1 に対応する。したがって (3) の limit cycle が存在しないことを示す。

(3) の critical pt. は $(\alpha, 0)$ と $(0, 0)$ である。

$(\alpha, 0)$ は saddle pt. で, その index は -1 である。

$(0,0)$ は unstable critical pt. で index は $+1$ である。

したがって (3) の limit cycle が存在するならば、 $(0,0)$ のみ
を内部に含まなければならない。

今、(3) の limit cycle が存在したと仮定し、その一つを
 $\Gamma = (x(t), y(t))$ で表わす。(3) より明らかに、 Γ は x 軸と
丁度 2 点で交わる。それを $E_1 = (\xi_1, 0)$, $E_2 = (\xi_2, 0)$ (ξ_1
 $> \xi_2$) とする。又 $(\alpha, 0)$ を内部に含まない α で、直線 $x = \alpha$
と Γ は交わらない。したがって

$$\alpha < \xi_2 < 0 < \xi_1$$

更に $\beta_1 < \xi_1$ とする。換言すれば、 Γ は直線 $x = \beta_1$ と 2 点
で交わらねばならぬ。実際、 $\xi_1 \leq \beta_1$ と仮定すれば

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds$$

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x)$$

とすると、(3) の任意の軌道に沿って $\lambda(x, y)$ を t で微分すると

$$(4) \quad \frac{d\lambda(x, y)}{dt} = -y^2 f(x)$$

Γ 上の任意の 2 点 A, B における $\lambda(x, y)$ の値を $\lambda(A), \lambda(B)$
で表わすと

$$\lambda(A) - \lambda(B) = \int_{t_B}^{t_A} -y^2 f(x) dt$$

$\Gamma = (x(t), y(t))$ の周期を T とする。仮定により

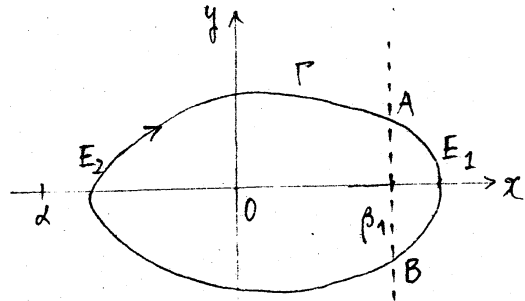
$\alpha < \beta_2 \leq x(t) \leq \beta_1 \leq \beta_1$ ($0 \leq t \leq T$) であるから $f(x(t)) \leq 0$ 従って

$$0 = \lambda(A) - \lambda(A) = \int_0^T -y^2(t) f(x(t)) dt > 0$$

となり矛盾である。

今、図1の様に 直線 $x = \beta_1$ と Γ の交点を A, B とする。

(4)より明らかに、 $\lambda(x, y)$ は 曲線 $\widehat{BE_2A} \{ \widehat{AE_1B} \}$ に沿って、 単調増加 { 減少 } であるから



$$\lambda(B) < \lambda(E_2) < \lambda(A)$$

$$\lambda(B) < \lambda(E_1) < \lambda(A)$$

図. 1

Γ 上の $\widehat{BE_2A}$ に対応する λ , y 面上の曲線を $y_I(\lambda)$, 同様に $\widehat{AE_1B}$ に対応するものを $y_{II}(\lambda)$ とすると、これらは一価連続函数である。更に $\lambda(A) = a$, $\lambda(B) = b$ とおくと

$$(5) \quad \frac{dy(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{y} + \frac{g(x)}{f(x)y^2}$$

であるから

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow a \\ \lambda \rightarrow b}} y_I'(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\substack{\lambda \rightarrow a \\ \lambda \rightarrow b}} y_{II}'(\lambda) = +\infty \quad (y' = \frac{dy}{d\lambda})$$

λ が a に十分近い所では

$$y_I(\lambda) > y_{II}(\lambda), \quad y_I(a) = y_{II}(a)$$

b の近くでは

$$y_I(\lambda) < y_{II}(\lambda)$$

$$y_I(b) = y_{II}(b)$$

従って $y_I(\lambda)$ と $y_{II}(\lambda)$ とは $\lambda = a$, b

以外で交わりなければならぬ。

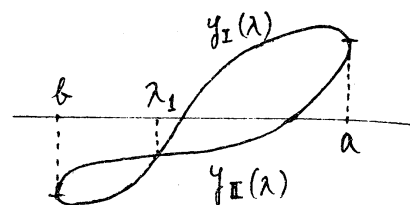


図. 2

$$\bar{\lambda} = \max \{ \lambda; y_I(\lambda) = y_{II}(\lambda), b < \lambda < a \}$$

とあり, $y_I(\bar{\lambda}) \geq 0$ かつ, $\lambda_1 = \bar{\lambda}$ とあり, < 0 かつ

$$\lambda_1 = \min \{ \lambda; y_I(\lambda) = y_{II}(\lambda), b < \lambda < a \}$$

とあり.

λ_1 に対応する Γ 上の点を $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) で表わすと, $y_1 = y_I(\lambda_1) = y_{II}(\lambda_1) = y_2$ である。

$y_I(\lambda_1) \neq 0$ の場合を考える。

$$y'_I(\lambda_1) \geq y'_{II}(\lambda_1)$$

であるから, (5) より

$$(6) \quad \frac{g(x_1)}{f(x_1)} \geq \frac{g(x_2)}{f(x_2)}$$

$$\text{一方, } \lambda_1 = \frac{1}{2} y_1^2 + G(x_1) = \frac{1}{2} y_2^2 + G(x_2) \quad \text{より}$$

$$(7) \quad G(x_1) = G(x_2)$$

$G(x)$ は $0 < x$ ($-\infty < x < 0$) で増加(減少)函数であるので

$$\alpha < x_1 < 0.$$

$G(\alpha) \leq G(\beta_1)$ の場合には

$$G(x_1) < G(\alpha) \leq G(\beta_1) < G(x_2)$$

これは (7) に反する。

$G(\alpha) > G(\beta_1)$ の場合には (6), (7) は条件 (b) に反する。

$y_I(\lambda_1) = y_{II}(\lambda_1) = 0$ の場合

$$\lambda_1 = \lambda(E_1) = \lambda(E_2), \quad y_I(\lambda) > y_{II}(\lambda) > 0, \quad \lambda_1 < \lambda < a$$

である。又、 $f(x_i) \neq 0, g(x_i) \neq 0 (i=1, 2)$ であるので、 λ は $\lambda(E_1)$ の十分近くでは

$$y_I'(\lambda) < y_{II}'(\lambda)$$

となる。このことは又、 $\lambda_1 < \lambda_2 < a, y_I(\lambda_2) = y_{II}(\lambda_2)$

となる λ_2 の存在しなければならぬことを示す。これは矛盾である。
証明終り。

定理 2. (i) ~ (iii) と更に (a). $\beta_2 \leq \alpha < \beta_1 < 0,$

(b). $G(\tilde{x}) = G(\underline{x}), \quad \alpha \leq \tilde{x} < \underline{x}$ なら (i)

$$\tilde{x} + \underline{x} > 2\beta_1$$

(c). $\alpha < x_1 < \beta_1 < x_2 < \gamma$ なる x_1, x_2 に対して

$$f(x_1) + f(x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

ならば $\gamma > 0$ かつ $G(\gamma) = G(\alpha)$

以上の条件の下で, (1) の周期解は存在しない。

証明. 定理 1 と同様に (3) を考える。(3) の limit cycle Γ が存在すると仮定して, 矛盾を導く。

$E_1, E_2, A, B, y_I(\lambda), y_{II}(\lambda)$ を定理 1 と同様な意味で記号を用いると,

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow a \\ \lambda \rightarrow b}} y'_I(\lambda) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow a \\ \lambda \rightarrow b}} y'_{II}(\lambda) = -\infty$$

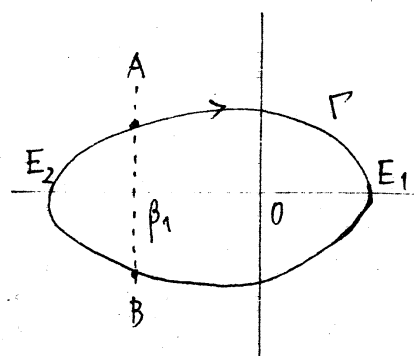


図. 3

であることに注意すると

$$y_I(\lambda) < y_{II}(\lambda) \quad 1 \gg a - \lambda > 0$$

$$y_I(\lambda) > y_{II}(\lambda) \quad 1 \gg \lambda - b > 0$$

を得る。

$\lambda_1, (x_i, y_i) \ (i=1, 2)$ 等も定理 1 と同様な記号として用いると

$$G(x_1) = G(x_2), \quad \beta_1 < x_1 < \beta_1, \quad 0 < x_2$$

従って, 条件 (i), (a), (b) より

$$f(x_1) + f(x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$$

$\therefore$

$$-f(x_1) < f(x_2)$$

$y_I(\lambda_1) \geq 0$ の場合を考える。

x を λ の函数と考え, Γ の $\{x_1 \leq x \leq \beta_1, y \geq 0\}$ に含まれる部分に対応する函数を $x_I(\lambda)$ で, 同様に, $\{\beta_1 \leq x \leq x_2, y \geq 0\}$ に含まれる部分に対応する函数を $x_{II}(\lambda)$ で表わすと, $x_I(\lambda), x_{II}(\lambda)$ は一価連続函数となる。

λ_1 の仮定により

$$y_{II}(\lambda) > y_I(\lambda) > 0, \quad \lambda_1 < \lambda < a$$

又, $0 < -f(x_1) < f(x_2)$ より λ_1 十分近づくとは

$$f(x_{II}(\lambda)) > -f(x_I(\lambda)) > 0$$

従って, λ 十分近づくとは

$$(8). \quad \frac{dx_I(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{y(x_I)f(x_I)} > \frac{1}{y(x_{II})f(x_{II})} = -\frac{dx_{II}(\lambda)}{d\lambda} > 0$$

一方, $x_1 + x_2 > 2\beta_1$ より

$$(9). \quad \int_{\lambda_1}^a \frac{dx_I(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \beta_1 - x_1 < x_2 - \beta_1 = \int_{\lambda_1}^a -\frac{dx_{II}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda$$

(8), (9) より, 次の不等式を満足する λ_2 が存在する。

$$(10). \quad \frac{dx_I(\lambda_2)}{d\lambda} = \frac{dx_{II}(\lambda_2)}{d\lambda}, \quad \frac{dx_I(\lambda)}{d\lambda} > -\frac{dx_{II}(\lambda)}{d\lambda}, \quad \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2$$

ところで, $0 < y_I(\lambda_2) < y_{II}(\lambda_2)$ であるから

$$(11). \quad -f(x_I(\lambda_2)) > f(x_{II}(\lambda_2))$$

(10) を積分することにより

$$\begin{aligned} x_I(\lambda_2) - x_I &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dx_I(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \\ &> \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} -\frac{dx_{II}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = x_{II} - x_{II}(\lambda_2) \end{aligned}$$

すなわち

$$x_I(\lambda_2) + x_{II}(\lambda_2) > 2\beta_1$$

一方、条件(c)の不等式より

$$-f(x_I(\lambda_2)) < f(x_{II}(\lambda_2))$$

が導かれる。これは(11)に反する。

$y_I(\lambda_1) < 0$ の場合も全く類似な方法で矛盾が導かれる。

証明終り

定理 3. (i) ~ (iii) と (a). $\beta_2 < 0 < \beta_1$

(b). $G(\lambda) \leq G(\delta_1)$ ($\delta_1 > 0$, $\int_0^{\delta_1} f(\xi) d\xi = 0$)

(c). $G(x_1) = G(x_2)$, $\alpha < x_1 < x_2$ ならば

$$\int_0^{x_1} f(\xi) d\xi < \int_0^{x_2} f(\xi) d\xi$$

以上の条件の下では、(1)の周期解は存在しない。

最後に周期解の存在する条件を求めてみる。

定理 4. (i) ~ (ii) と (a). $\alpha < \beta_2 < 0 < \beta_1$

$$(b). \quad \exists \omega > 1, \quad \alpha < \exists x_1 < \beta_2$$

$$(12). \quad \omega^2 (G(\alpha) - G(x_1)) \geq G(\alpha) - G(\beta_2)$$

$$(13). \quad 2\omega(1 + \frac{1}{\theta})M \leq \int_{x_1}^{\beta_2} f(x) dx$$

$$(c). \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) > M + \sqrt{2} (G(\alpha) - G(\beta_2))^{\frac{1}{2}}$$

このとき、(1)は少なくとも1つ周期解を有する。

$$\therefore M = \frac{\max\{G(\beta_1), G(\beta_2)\}}{(G(\alpha) - G(\beta_2))^{\frac{1}{2}}} + \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(s) ds$$

$$\theta = \frac{\sqrt{2}}{M} (G(\alpha) - G(\beta_2))^{\frac{1}{2}}$$

次に周期解が1つである条件は

定理5. (i) ~ (iii), (a). $\alpha < \beta_2 < 0 < \beta_1$,

(b). $G(\beta_2) = G(\beta_1)$, (c). $f, g \in C^1$ であるとき、(1)は定数を除いて、高々1つ周期解を持つ。

参考文献

- [1]. Sansone - Conti ; Non-linear differential equations , Pergamon Press . (1964)
- [2]. Sato, Y. ; On the existence of limit cycles of circuits containing one Esaki diode , Comment. Math. Univ. Sancti Pauli , 18 (1970)