

DIPOLE のモジュライ空間

お茶の水女子大学理学部, 大場 清 (KIYOSHI OHBA)

§1. はじめに.

これは, 大阪市立大学の橋本義武氏との共同研究についてのものである. 以下, この報告書では, リーマン面の種数は1以上とする. 我々は [HO1] において, 1点付き閉リーマン面の族のある種の構成法 (井桁による構成法) を示した. この構成法では, 1点付き閉リーマン面の局所的なモジュライを記述することが容易であったが, 全ての1点付き閉リーマン面が構成できるかどうかは, 不明であった. そこで今回は, 井桁による構成法で重要な役割を演じた “dipole” を手がかりに, 全ての閉リーマン面を構成する構成法を示すことにする. ここで dipole とは, 閉リーマン面上の1点にのみ極, それも2位の極をもつ第2種アーベル微分であり, これは第2種アーベル微分の中で最も基本的なものである. 我々の構成法は, “稲妻多角形” というガウス平面上のある種の図形を使うものである. (稲妻多角形の定義は, §2 で与える.)

まず, 1つめの結果は次のものである.

定理 1 [HO3]. 稲妻多角形の全体と, 次の集合の間には自然な全単射が存在する.

$$\{(R, \omega) \mid R \text{ は閉リーマン面, } \omega \text{ は } R \text{ 上の dipole で条件 } H \text{ を満たすもの}\}$$

特に, 任意の1点付きリーマン面は稲妻多角形から構成される.

第2種アーベル微分 ω に対する “条件 H” というのは, ω から誘導されるリーマン面上の計量 g_ω と方角を用いて, 次のように与えられるものである.

条件 H: ω の零点と零点を結ぶ g_ω に関する測地線は, 水平にならない.

このように, 稲妻多角形を用いると, 任意の1点付き閉リーマン面を構成することが出来るが, dipole の観点からみると条件 H を満たすものしか構成できない. そこで, 稲妻多角形の拡張として “深度付き稲妻多角形” というガウス平面上のある種の図形を考える. (先の稲妻多角形は, “深度 0 の稲妻多角形” と解釈される.) すると, 条件 H を満たす満たさないに関わらず, 任意の dipole をもつ閉リーマン面を構成することができる.

定理 2 [HO3]. 深度付き稲妻多角形の全体と, 次の集合の間には自然な全単射が存在する.

$$\{(R, \omega) \mid R \text{ は閉リーマン面, } \omega \text{ は } R \text{ 上の dipole}\}$$

我々は, どのような深度付き稲妻多角形が種数 g の閉リーマン面上の dipole を作るか判定する方法を与えた. リーマン・ロッホの公式を使えば, dipole 付き閉リーマン面のモジュライ空間の次元は, リーマン面の種数を g とすると複素 $4g - 1$ 次元であることがすぐにわかる. 種数 g の dipole を与える深度付き稲妻多角形全体には, 自然な胞体分割の構造があるので, それが種数 g の dipole のモジュライ空間に胞体分割を与える.

また、種数 g の hyperelliptic curve に対して、hyperelliptic involution の固定点の 1 つに極をもつような dipole が考えられるが、その中で、零点を他の固定点の 1 つのみに $2g$ 位の零点、もしくは hyperelliptic involution で移りあう 2 点に各 g 位の零点となるようなものを考えると、定数倍を除いて dipole が一意に決まる。この場合、対応する深度付き稲妻多角形は、点対称な図形（対辺型稲妻多角形）となり、hyperelliptic involution は、その点対称変換に由来するものになることがわかる。

§2. 稲妻多角形

この節では、“稲妻” “稲妻多角形” の定義を与え、稲妻多角形による dipole 付き閉リーマン面の構成法を紹介し、この構成法により任意の 1 点付き閉リーマン面が構成できることを示す。

稲妻(多角形)の紹介の前に、dipole 付きの閉リーマン面について、必要なことを用意しておく。

R を閉リーマン面、 ω を R 上の dipole とし、 $p_\infty \in R$ を ω の極とする。すると ω は $R - \{p_\infty\}$ 上に、 ω の各零点で conical singularity をもつ平坦な計量 g_ω を与える。（ n 位の零点が、角度 $2(n+1)\pi$ の conical singularity になる。）ここで、一点 $x_0 \in R - \{p_\infty\}$ を固定すると、 ω のアーベル積分による正則多価関数

$$\Phi_{\omega, x_0} : R - \{p_\infty\} \ni x \mapsto \int_{x_0}^x \omega \in \mathbb{C}$$

は、 g_ω に関して局所等長写像になっている。（ $\mathbb{C}$ は、通常のように $\mathbb{R}^2$ と同一視して、ユークリッド計量を入れている。）Dipole ω は写像 Φ_{ω, x_0} を通して $R - \{p_\infty\}$ 上の測地線に“方角”を与える。つまり、 $\gamma : [0, 1] \rightarrow R - \{p_\infty\}$ が測地線であるとき、 $\Phi \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ が実軸と平行であるとき、“水平”もしくは“東西”に伸びる測地線という。 ω の零点でないところでは各方向に伸びる測地線はそれぞれ 1 本であるが、 n 位の零点から各方角に伸びる測地線は $n+1$ 本引けることに注意しておく。

では、稲妻、稲妻多角形の定義を与える。

定義 1. n 次の稲妻とは、上半平面 H 上の n 個の点からなる点列 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in H^n$ のことである。

n 次の稲妻が与えられると、(原点) $\rightarrow (a_1) \rightarrow (a_1 + a_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ と $n+1$ 個の点を結んだガウス平面上の有向折れ線が得られる。（図 1）

定義 2. n 次の稲妻多角形とは、 n 次の稲妻 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ と n 次の置換 σ の組 $\Gamma = ((a_1, \dots, a_n), \sigma)$ のことである。ただし σ は、 $\sigma(1) \neq 1, \sigma(n) \neq n, \sigma(i+1) \neq \sigma(i) + 1$ ($i = 1, \dots, n-1$) を満たすものとする。

n 次の稲妻多角形 Γ からは、2つの n 次の稲妻 $(a_1, \dots, a_n)$ と $(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$ が、つまり、2つの有向折れ線

$$(\text{原点}) \rightarrow (a_1) \rightarrow (a_1 + a_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

$$(\text{原点}) \rightarrow (a_{\sigma(1)}) \rightarrow (a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)}) \rightarrow \dots \rightarrow (a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \dots + a_{\sigma(n)})$$

が得られるが, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \cdots + a_{\sigma(n)}$ であるから, 合わせると閉折れ線になる. (図1)

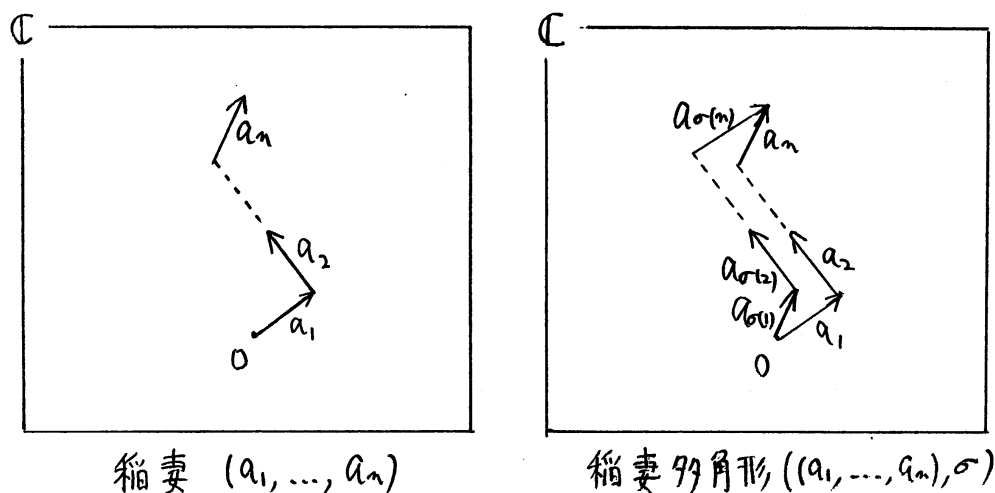


図1. 稲妻と稲妻多角形

稲妻多角形 $\Gamma = ((a_1, \dots, a_n), \sigma)$ が与えられると, そこから1点付きリーマン面が次のように構成される.

まずガウス平面を, 稲妻 $(a_1, \dots, a_n)$ から得られる有向折れ線 (原点) $\rightarrow (a_1) \rightarrow (a_1 + a_2) \rightarrow \cdots \rightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ と2つの半直線 $-\sqrt{-1}t, a_1 + \cdots + a_n + \sqrt{-1}t$ ($t \in [0, \infty)$) で切断し, 右側の部分を D_r とする. また, 稲妻 $(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$ から得られる有向折れ線 (原点) $\rightarrow (a_{\sigma(1)}) \rightarrow (a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)}) \rightarrow \cdots \rightarrow (a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \cdots + a_{\sigma(n)})$ と2つの半直線 $-\sqrt{-1}t, a_1 + \cdots + a_n + \sqrt{-1}t$ ($t \in [0, \infty)$) で切断し, 左側の部分を D_l とする. 次に, D_r と D_l をそれぞれの境界に共通にある2つの半直線部分 $-\sqrt{-1}t, a_1 + \cdots + a_n + \sqrt{-1}t$ ($t \in [0, \infty)$) を同一視により貼り合わせ, さらに, D_r の境界にある a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) と D_l の境界にある a_i を平行移動により貼り合わせ, 無限遠点を1点 p_∞ でコンパクト化することにより, 1点 p_∞ 付き閉リーマン面 (R_Γ, p_∞) ができる. これが稲妻多角形による閉リーマン面の構成法である. (図2)

ガウス平面上の座標を z とすると, $\mathbb{C}P_1$ 上のアーベル微分 dz は無限遠点 ∞ のみで2位の極をもつ dipole で, ガウス平面の平行移動に対して不変であるから, 稲妻多角形により構成されたリーマン面 R_Γ には, dz から自然に p_∞ でのみ2位の極をもつ dipole ω_Γ が存在することになる.

このように, 稲妻多角形から dipole 付きの閉リーマン面 $(R_\Gamma, \omega_\Gamma)$ が構成されるが, 稲妻多角形の頂点は, ω_Γ の零点に対応し, その他には零点をもたないこともわかる. さらに, 各零点から東西に伸びる測地線は必ず p_∞ に至ることが見て取れる. 特に, 零点と零点を結ぶ東西に伸びる測地線は存在しない. つまり, 以下の“条件 H”を満たすことになる.

条件 H: dipole 付き閉リーマン面 (R, ω) に対して, ω の零点と零点を結ぶ g_ω に関する測地線は, 水平にならない.

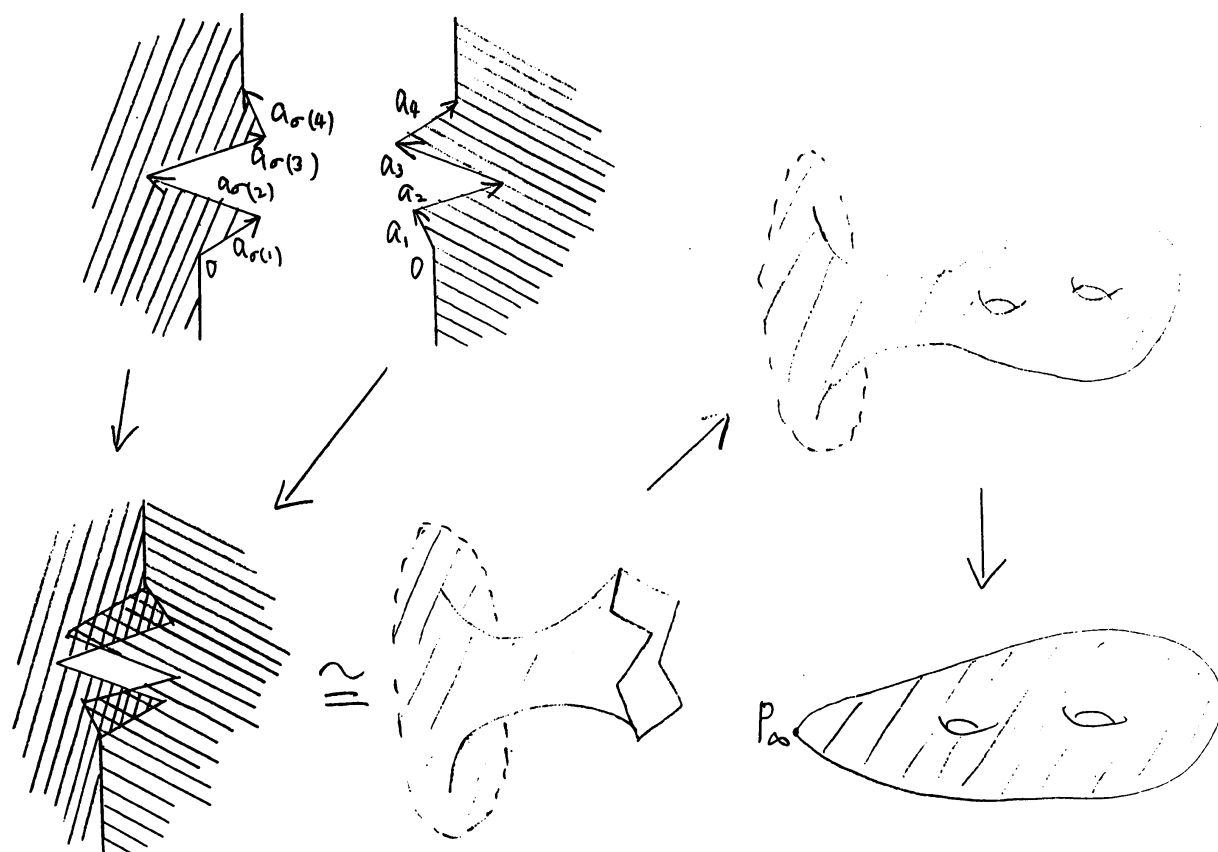


図2. 稲妻多角形による構成法

逆に、条件 H を満たす dipole 付き閉リーマン面は、稲妻多角形から上記のようにして構成できる。つまり、次が成り立つ。

定理 1 [HO3]. 稲妻多角形の全体と、次の集合

$$\{(R, \omega) \mid R \text{ は閉リーマン面}, \omega \text{ は } R \text{ 上の dipole で条件 } H \text{ を満たすもの}\}$$

の間には自然な全単射が存在する。

もし、dipole 付き閉リーマン面 (R, ω) が条件 H を満たさなければ、適当な複素数 $c \in \mathbb{C}^\times$ により $(R, c\omega)$ が条件 H を満たすようにすることができるので、次の系が成り立つ。

系 . 任意の 1 点付き閉リーマン面は稲妻多角形から構成される。

定理 1 を示すには、次の補題がキーになる。（この補題は、条件 H を満たすか満たさないかに依らず成り立つ。）

補題 1. (R, ω) を dipole 付き閉リーマン面とし、 $p_\infty \in R$ を ω の極とする。このとき、もし点 $x \in R - \{p_\infty\}$ から西へ（または東へ）測地線を伸ばせば極 p_∞ に至るのであれば、 x から東へ（または西へ）測地線を伸ばせば零点に至るか極 p_∞ に至る。

(補題1の証明) $x \in R - \{p_\infty\}$ から西へ測地線を伸ばせば極 p_∞ に至るとする.

p_∞ を含み ω の零点を1つも含まない開円板 D を適切に取れば, ω は第2種アーベル微分であるから Φ_{ω, x_0} の $D - \{p_\infty\}$ への制限のひとつの枝 Φ_∞ が取れて, Φ_∞ は双正則で $D - \{p_\infty\}$ の像が, ある正数 r に対して $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$ となるようにできる. 仮定により, x から西に測地線を伸ばせば, いつか D 内に, 特に, Φ_∞ で移したときに実部が $-r$ より小さくなるような点に至ることが分かる. 一方, $R - D$ の計量 g_ω に関する面積は有限となることに注意する.

x が ω の零点から西に伸びる測地線上に存在しているならば, x から東へ行けば ω の零点に至るので, 補題1は成り立つ. そこで, x は ω の零点から西に伸びる測地線上には存在していないとし, さらに, 東に測地線を伸ばしても p_∞ に至らないとする.

ω の零点は有限個であり, n 位の零点から西に伸びる測地線は $n+1$ 本なので, 結局, ω の零点から西に伸びる測地線は有限本であり, そのような測地線は, もし一旦 $D - \{p_\infty\}$ 内の $\text{Re}(\Phi_\infty(x')) < -r$ となる点 x' を通れば, Φ_∞ の虚部の値は $\text{Im}(\Phi_\infty(x'))$ で一定になるので, 少なくとも $D - \{p_\infty\}$ 内では, このような測地線全体は閉集合である. そこで, x から西に伸びる測地線上にあり, $x_1 \in D - \{p\}$ かつ $\text{Re}(\Phi_\infty(x_1)) < -r$ となる点 $x_1 \in R - \{p_\infty\}$ を一つ固定する. x から東に測地線を伸ばしても p_∞ に至らないから, $|\text{Im}(\Phi_\infty(x_1))| < r$ であり, ある正数 $\varepsilon < r - |\text{Im}(\Phi_\infty(x_1))|$ が存在し, x_1 の $D - \{p_\infty\}$ に含まれる ε -近傍 $U_\varepsilon(x_1)$ 内にあるどの点からも西へ測地線を伸ばせば極 p_∞ に至り, また, 東へ行っても ω の零点には至らないようにできる. さらに, $U_\varepsilon(x_1)$ の西側の領域 W (つまり, 東に測地線を伸ばして $U_\varepsilon(x_1)$ に入るような $R - \{p_\infty\}$ の点全体の集合) は $D - \{p_\infty\}$ に含まれており, 単連結になっていることが見て取れることに注意する.

ここで, $U_\varepsilon(x_1)$ の東側の領域 E を考える. $W \cup E$ が単連結であることを示そう. 任意の実数 t に対して写像 $f_t: W \cup E \rightarrow W \cup E$ を, $p \in W \cup E$ に対して p から測地線に沿って距離 t だけ西に行った点を対応させるものとする. $W \cup E$ 内には g_ω の特異点はないので, f_t は well-defined であり連続写像である. $\gamma: [0, 1] \rightarrow W \cup E$ を $W \cup E$ 内の任意のループとすると, $\gamma([0, 1])$ はコンパクトであるから, 十分大きな t に対して $f_t \circ \gamma([0, 1])$ は W に含まれることになるが, W は単連結なので, γ は1点に潰れる. よって, $W \cup E$ は単連結である.

$W \cup E$ が単連結であることより, $\Phi_{\omega|U_\varepsilon(x_1)}$ を解析接続して双正則写像 $\Phi_{W \cup E}: W \cup E \rightarrow \Phi_{W \cup E}(W \cup E) \subset \mathbb{C}$ が得られる. $\Phi_{W \cup E}(W \cup E)$ は $\mathbb{C}$ の帯領域である. そして, E も単連結であり, 面積無限であることがわかる. ここでもし, $\Phi_\infty(E \cap (D - \{p_\infty\})) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re} z > 0\} \neq \emptyset$ ならば, x_1 から東に伸びる測地線は x を通って p_∞ に至ることになり, 仮定に矛盾する. したがって $\Phi_\infty(E \cap (D - \{p_\infty\})) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re} z > 0\} = \emptyset$ となり, このとき $E \cap (D - \{p_\infty\})$ は, 面積有限であり, $E - D$ は面積無限になる. これは, $R - D$ の面積が有限であることに反するので矛盾である. よって, x から東に測地線を伸ばすと p_∞ に至る. $\square$

(定理1の証明) (R, ω) を dipole 付きの閉リーマン面とし, $p_\infty \in R$ を ω の極とする.

R_0 を, 西に測地線を伸ばしたら p_∞ に至るか, 東に測地線を伸ばしたら p_∞ に至るような $R - \{p_\infty\}$ の点全体の $R - \{p_\infty\}$ での閉包とする. R_0 には, ω の零点から東西に伸びて p_∞ に至る測地線が有限本存在する. それらで R_0 を切断すると, 補題1により, R_0 は有限個の帯領域 $B_1, B_2, \dots, B_n$ と上半平面と双正則な2つの領域 D_+ と D_- とに別れ,

ω のアーベル積分により平行移動の自由度を除いて、各帯領域 B_i は $\mathbb{C}$ 内の東西に伸びる帯領域 B_i に双正則に写され、 D_+ は上半平面 H_+ に、 D_- は下半平面 H_- に双正則に写される。

$D_+(H_+)$ の境界は、 ω の零点から東西に伸びる測地線であるが、条件 H により、 ω の零点はただ1つである。同様に、 $D_-(H_-)$ の境界も1つの零点から東西に伸びる測地線、各帯領域 B_i (B_i) の北側の境界、南側の境界も1つの零点から東西に伸びる測地線である。(図3)

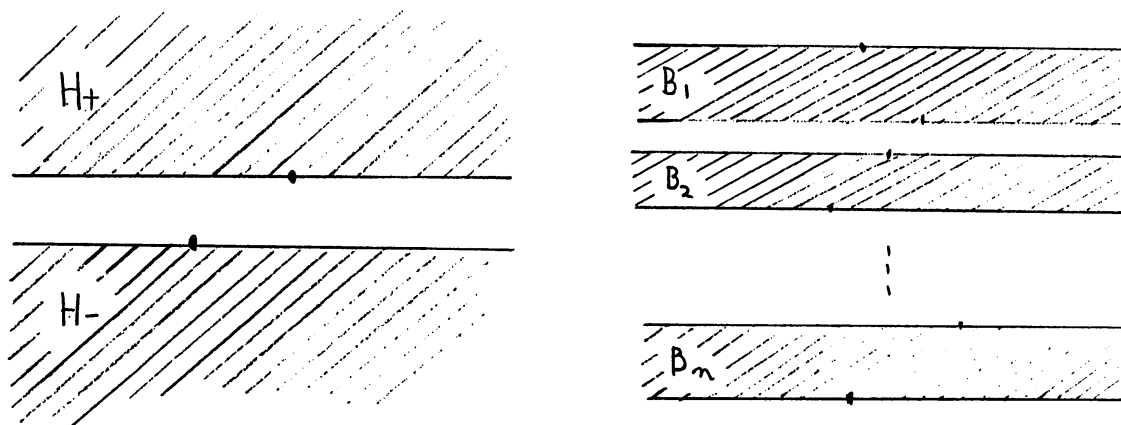


図3.

ここで、各帯領域 B_i の南北の境界上に一つずつ存在する零点を結ぶ測地線で B_i を切断して西側の領域 B_i^w と東側の領域 B_i^e の2つにわけると。そして、南側の境界にある零点から北側の境界にある零点へのベクトルを $a_i \in \mathbb{C}$ とする。また、 H_+ を境界にある零点から北へ伸びる測地線に沿って切断して西側の領域 H_+^w と東側の領域 H_+^e の2つにわけると。 H_- も同様に H_-^w と H_-^e の2つにわけると。(図4)

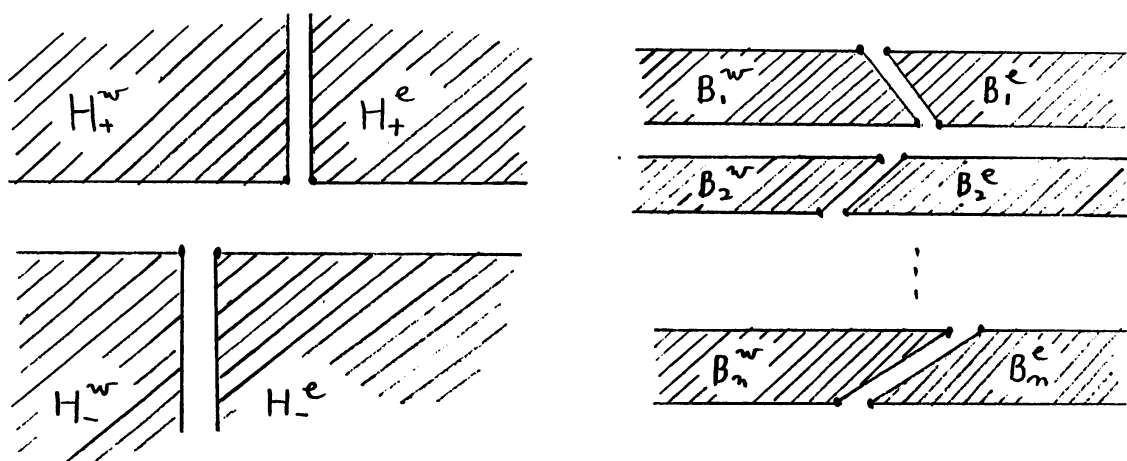


図4.

R_0 は $\mathbb{C}$ 内の領域 $H_+^e, H_+^w, H_-^e, H_-^w, B_1^e, B_1^w, \dots, B_n^e, B_n^w$ を次のように平行移動のみを使って貼り合わせることににより回復される。まず、 H_-^e を $\mathbb{C}$ 内に、零点に当たる点が原点になるように置き、それ基礎に $B_1^e, B_2^e, \dots, B_n^e, H_+^e$ を東西に伸びる境界で貼り合わせ、出来た $\mathbb{C}$ 内の領域を R_0^e とする。必要なら番号を付け変えることにより、 H_-^e に $B_1^e, \dots, B_n^e, H_+^e$ と順々に貼り合わせることにしたとしてよい。次に、 H_-^w を $\mathbb{C}$ 内に、零点に当たる点が

原点になるように置き、それを基礎に $B_1^w, B_2^w, \dots, B_n^w, H_+^w$ を東西に伸びる境界で貼り合わせ、出来た $\mathbb{C}$ 内の領域を R_0^w とする。このとき、貼り合わせる順番は n 次の置換 σ を使って $B_{\sigma(1)}^w, B_{\sigma(2)}^w, B_{\sigma(n)}^w, H_+^w$ の順で表されたとする。最後に、 R_0^e と R_0^w の境界にそれぞれある 2 つの半直線 $-\sqrt{-1}t, a_1 + \dots + a_n + \sqrt{-1}t$ ($t \in [0, \infty)$) で同一視し、また、 R_0^e の境界にある辺 a_i と R_0^w の境界にある辺 a_i をそれぞれ平行移動で貼り合わせることににより、 R_0 が得られる。(図 5)

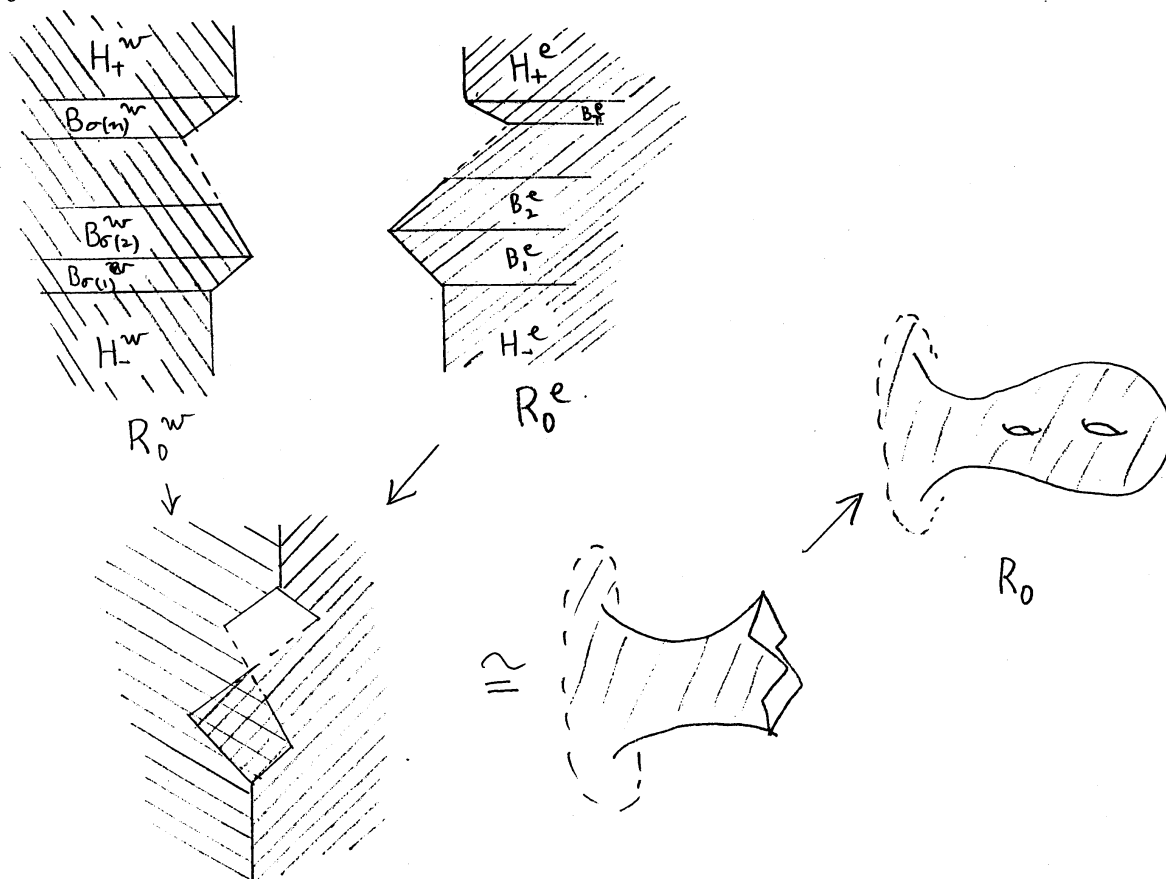


図 5.

上で見たことより、 $R_0 \cup \{p_\infty\}$ は閉じたりーマン面になるので、 $R_0 \cup \{p_\infty\} = R$ であることがわかる。また、dipole ω は、 $\mathbb{C}$ の座標 z の微分 dz を R_0^e, R_0^w に制限して得られるアーベル微分から得られる。ここで、原点、 $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_n$ に対応する R_0^e の点が ω の零点に当たることより、置換 σ は $\sigma(1) \neq 1, \sigma(i+1) \neq \sigma(i) + 1, \sigma(n) \neq n$ であることが分かる。よって、 (R, ω) は、稲妻多角形 $((a_1, \dots, a_n), \sigma)$ から得られる dipole 付き閉リーマン面である。□

§3. 深度付き稲妻多角形

前節では、稲妻多角形による dipole 付き閉リーマン面の構成法を紹介し、それにより任意の 1 点付き閉リーマン面が構成できることを示したが、前節の構成法では、条件 H を満たさない dipole 付き閉リーマン面を構成することは出来ない。そこで、この節では、稲妻多角形による構成法を拡張して、任意の dipole 付き閉リーマン面を構成する。

(R, ω) を任意の dipole 付き閉リーマン面, p_∞ を ω の極とする. 定理 1 の証明のときと同様に, R_0 を, 西に測地線を伸ばしたら p_∞ に至るか, 東に測地線を伸ばしたら p_∞ に至るような $R - \{p_\infty\}$ の点全体の $R - \{p_\infty\}$ での閉包とする.

補題 1 は条件 H を満たすか満たさないかによらず成り立つので, ω の零点から東または西に伸びて p_∞ に至る測地線 (有限本) で R_0 を切断すると, R_0 は有限個の帯領域 $B_1, B_2, \dots, B_n$ と上半平面と双正則な 2 つの領域 D_+ と D_- とに別れ, ω のアーベル積分により平行移動の自由度を除いて, 各帯領域 B_i は $\mathbb{C}$ 内の東西に伸びる帯領域 B_i に双正則に写され, D_+ は上半平面 H_+ に, D_- は下半平面 H_- に双正則に写される.

$D_+ (H_+)$ の境界は, 東西に伸びる測地線であり, その上に ω の零点が 1 つ以上存在する. 同様に, $D_- (H_-)$ の境界にも東西に伸びる測地線でその上に 1 つ以上の零点が存在し, 各帯領域 $B_i (B_i)$ の北側の境界も南側の境界も東西に伸びる測地線で 1 つ以上の零点が乗っている. 零点と零点を結ぶ測地線は有限個であることに注意すれば, それぞれの測地線に乗っている零点の個数が有限個であることがわかる.

このとき, H_- を, その境界の測地線上の最も西にある ω の零点から南に伸びる測地線に沿って切断する. H_+ を, その境界の測地線上の最も東にある ω の零点から北に伸びる測地線に沿って切断する. さらに, B_i を, 南側の境界上の最も東にある ω の零点から北側の境界上の最も西にある ω の零点へのベクトルを複素数 a_i で表し, この測地線で切断する. (図 6)

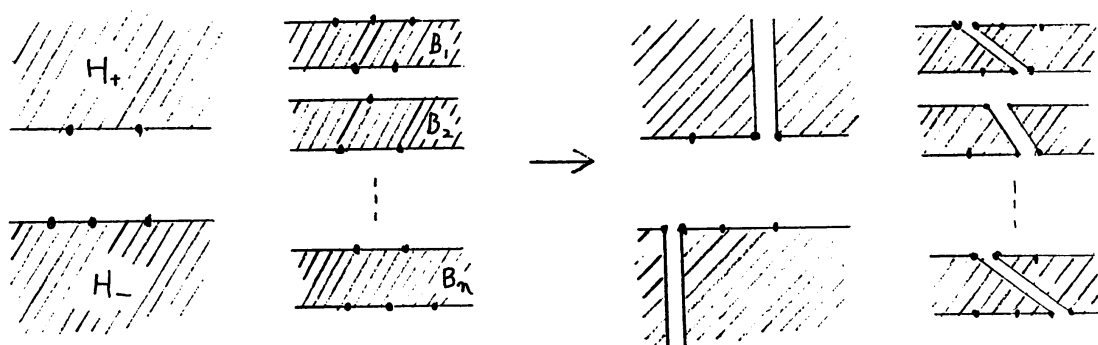


図 6. R_0 の分割

もし $R - (\{p_\infty\} \cup R_0)$ が空であれば, 図 6 にあるいわば “半帯領域” たちの境界を適切な平行移動で貼り合わせることで $R - \{p_\infty\}$ が得られる.

もし $R - (\{p_\infty\} \cup R_0)$ が空でなければ, $R - (\{p_\infty\} \cup R_0)$ 内の ω の零点から R_0 へ至る南北に伸びる測地線はたかだか有限本である事がわかる. (証明略) このとき, 補題 1 と同様に次の補題が証明される. (証明は略)

補題 2. もし $R - (\{p_\infty\} \cup R_0)$ が空でなければ, 点 $x \in R - (\{p_\infty\} \cup R_0)$ から南へ (または北へ) 測地線を伸ばせば R_0 に至るのであれば, x から北へ (または南へ) 測地線を伸ばせば R_0 に至るか ω の零点に至る.

そこで, 南か北へ測地線を伸ばせば R_0 に至る $R - (\{p_\infty\} \cup R_0)$ の点全体の集合の閉包を R_1 とする. 定理 1 で見たのと同様に, R_1 にある ω の零点と R_0 を結ぶ南北測地線で R_1 を切断し, ω のアーベル積分で $\mathbb{C}$ に写すと幾つかの長方形領域 $R_1^1, \dots, R_1^k$ になる. さらに,

R_1^i を、西側の境界上の最も北にある ω の零点から東側の境界上の最も南にある ω の零点へのベクトルを複素数 b_i で表し、この測地線で切断する。(図7)

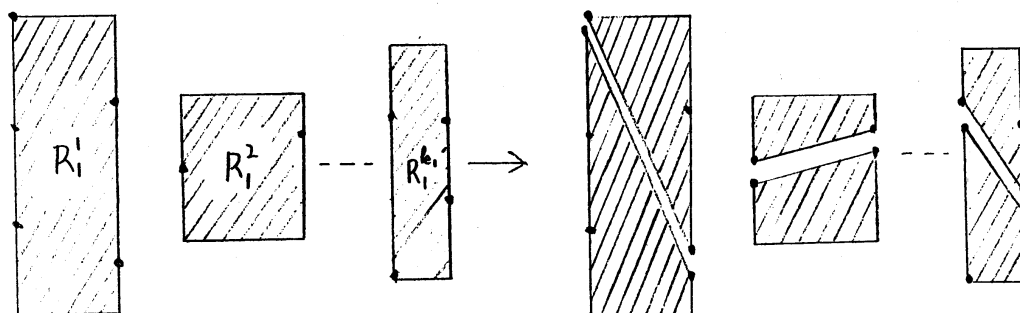


図7. R_1 の分割

もし $R - (\{p_\infty\} \cup R_0 \cup R_1)$ が空であれば、図6にあるいわば“半帯領域”たちの境界を適切な平行移動で貼り合わせたあと、図7にある“台形領域”を貼り合わせることで $R - \{p_\infty\}$ が得られる。

もし $R - (\{p_\infty\} \cup R_0 \cup R_1)$ が空でなければ、 $R - (\{p_\infty\} \cup R_0 \cup R_1)$ の境界は R_1 の境界の一部であり、 $R - (\{p_\infty\} \cup R_0 \cup R_1)$ 内の ω の零点から R_1 へ至る東西に伸びる測地線はたかだか有限本である事がわかり、次の補題が証明される。(証明は略)

補題 3. もし $R - (\{p_\infty\} \cup R_0 \cup R_1)$ が空でなければ、点 $x \in R - (\{p_\infty\} \cup R_0 \cup R_1)$ から西へ(または東へ)測地線を伸ばせば R_1 に至るのであれば、 x から東へ(または西へ)測地線を伸ばせば R_1 に至るか ω の零点に至る。

そこで、東か西に測地線を伸ばせば R_1 に至る $R - (\{p_\infty\} \cup R_0 \cup R_1)$ の点全体の集合の閉包を R_2 とする。 R_2 にある ω の零点と R_1 を結ぶ東西測地線で R_2 を切断し、 ω のアーベル積分で $\mathbb{C}$ に写すと幾つかの長方形領域 $R_2^1, \dots, R_2^{k_2}$ になる。さらに、 R_2^i を、南側の境界上の最も東にある ω の零点から北側の境界上の最も西にある ω の零点へのベクトルを複素数 c_i で表し、この測地線で切断する。(図8)

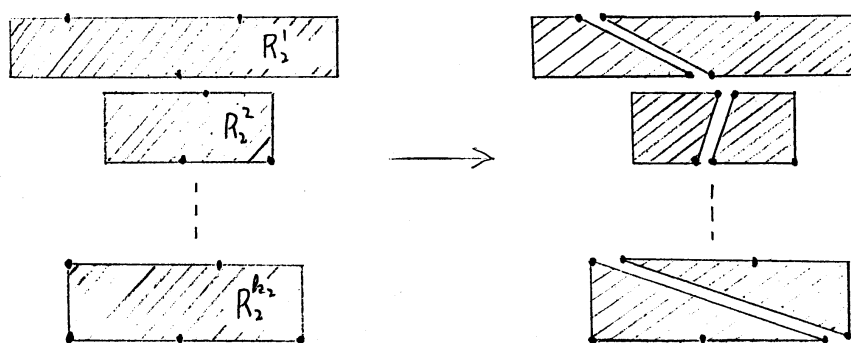


図8. R_2 の分割

もし $R - (\{p_\infty\} \cup R_0 \cup R_1 \cup R_2)$ が空であれば、図 6 にある“半帯領域”たちの境界を適切な平行移動で貼り合わせたあと、図 7 にある“台形領域”を貼り合わせ、図 8 にある“台形領域”を貼り合わせることで $R - \{p_\infty\}$ が得られる。

もし $R - (\{p_\infty\} \cup R_0 \cup R_1 \cup R_2)$ が空でなければ、上の操作を繰り返す。実は、種数が有限であれば、 ω の零点の周りでの角度の総和が押さえられる事から、この操作は有限回で終る事が分かることが分かる。

では、上の分解を逆の手順で構成することを考える。

まず、“深度付き稲妻”を定義するために、深度付きの n 項の複素数列

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ d_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_n \\ d_n \end{pmatrix} \right)$$

を考える。ここで、各 a_i は複素数 (ベクトルと呼んだりする)、各 d_i は 0 以上の整数で深度(depth) と名付ける。

この深度付き複素数列に、まず、次のような深度の条件 1), 2), R-3) を考える。

1): $d_1 = 0, 1, \text{ or } 2$.

2): $d_n = 0, \text{ or } 1$.

R-3): $d_{i+1} - d_i = -1, 0, 1, \text{ or } 2$.

例えば以下のようなものである。

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{10} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

すると、深度が 1 以上の複素数を取り出すことによる数列たち (“深度 1 の部分列”と呼ぶことにする)、深度が 2 以上の複素数を取り出すことによる数列たち (“深度 2 の部分列”と呼ぶことにする)、 $\dots$ 、と部分列が考えられる。上の例では次のようになる。

深度 1 の部分列: $(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ と (a_9, a_{10}) の 2 つ

深度 2 の部分列: $(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ の 1 つ

深度 3 の部分列: (a_3) と (a_5) の 2 つ

複素数 a_i たちに次のような条件 4), 5), 6), 7), R-8), R-9) を考える。

4): d_i が奇数なら, $\text{Re} a_i > 0$.

5): d_i が偶数なら, $\text{Im} a_i > 0$.

6): 奇数深度のどの部分列 β に対しても

$$\sum_{a_i \in \beta} a_i \in \mathbb{R}_+$$

7): 偶数深度のどの部分列 γ に対しても

$$\sum_{a_i \in \gamma} a_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}_+$$

R-8): 奇数深度のどの部分列 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ に対しても

$$\operatorname{Im}(b_1 + \dots + b_i) \geq 0 \quad (1 \leq \forall i \leq k)$$

R-9): 偶数深度のどの部分列 $\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_l)$ に対しても

$$\operatorname{Re}(c_1 + \dots + c_i) \leq 0 \quad (1 \leq \forall i \leq l)$$

そして、次のように“深度付き n 次の稲妻”を定義する。

定義 3. 深度付き n 次の稲妻とは、深度付き n 項の複素数列であって、条件 1), 2), R-3), 4), 5), 6), 7), R-8), R-9) を満たすもののことをいう。そして、現れる深度の中の最大のものを、その深度付き稲妻の深度という。

深度付き稲妻からも、 $\mathbb{C}$ 上に原点からベクトル $a_1, a_2, \dots$ と繋げていくことにより、折れ線図形ができる。この図形のことも“深度付き稲妻”という。そして、深度 1 の各部分列 $(b_1, \dots, b_k)$ をベクトル $\sum_{i=1}^k b_i$ に置き換え、それらと半直線 $-t\sqrt{-1}$ ($t \in [0, \infty)$) と深度ゼロのベクトルと半直線 $\sum_{i=1}^n a_i + t\sqrt{-1}$ ($t \in [0, \infty)$) を繋げてできる $\mathbb{C}$ を二分する単純折れ線の右側の領域、深度 1 の各部分列 $(b_1, \dots, b_k)$ に対して、そこに含まれる深度 2 の各部分列 $(c_1, \dots, c_l)$ をベクトル $\sum_{i=1}^l c_i$ に置き換え、それらと深度 1 のベクトルとベクトル $\sum_{i=1}^k b_i$ を繋げてできる $\mathbb{C}$ の有界領域、 $\dots$ と、深度付き稲妻からは $\mathbb{C}$ の幾つかの領域が得られる。(図 9)

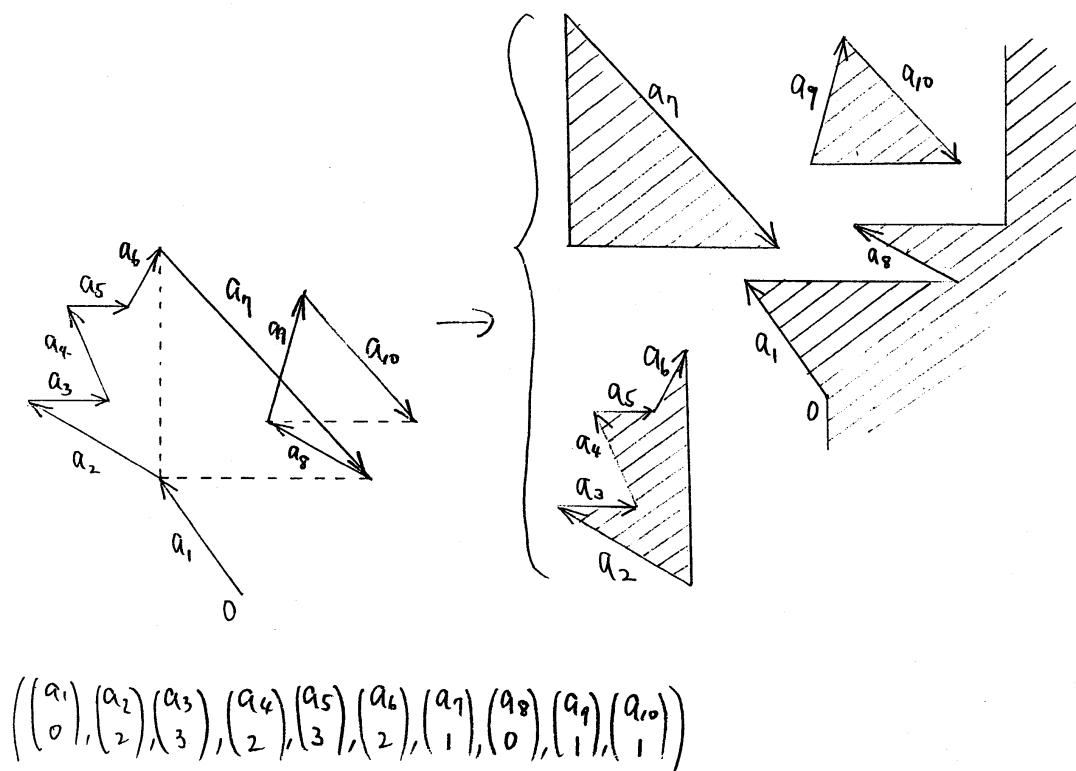


図 9. 深度付き稲妻とそれによる $\mathbb{C}$ の幾つかの領域

さらに, “深度付き n 次の稲妻多角形” を次のように定義する.

定義 4. 深度 d の n 次の稲妻多角形とは, 深度 d の n 次の稲妻と n 次の置換の組

$$\Gamma = \left(\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ d_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_n \\ d_n \end{pmatrix} \right), \sigma \right)$$

のことである. ただし σ は, $\sigma(1) \neq 1, \sigma(n) \neq n, \sigma(i+1) \neq \sigma(i) + 1$ ($i = 1, \dots, n-1$) を満たし, 深度付き n 項の複素数列

$$\left(\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ d_{\sigma(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{\sigma(2)} \\ d_{\sigma(2)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{\sigma(n)} \\ d_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \right)$$

が上の条件 1), 2), 4), 5), 6), 7) と下の条件 L-3), L-8), L-9) を満たすとする.

L-3): $d_{\sigma(i+1)} - d_{\sigma(i)} = -2, -1, 0, 1$.

L-8): 奇数深度のどの部分列 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ に対しても

$$\operatorname{Im}(b_1 + \dots + b_i) \leq 0 \quad (1 \leq \forall i \leq k)$$

L-9): 偶数深度のどの部分列 $\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_l)$ に対しても

$$\operatorname{Re}(c_1 + \dots + c_i) \geq 0 \quad (1 \leq \forall i \leq l)$$

深度付き稲妻多角形 Γ からは, 原点から始まる 2 つの折れ線図形が得られ, そこから $\mathbb{C}$ 内の幾つかの領域が得られる. (ただし, σ で写して作る深度付き稲妻に対しては, 最初に得られる領域は左側のものを取ることにする.) すると, 稲妻多角形のとくと同じように得られた幾つかの領域を対応する境界上の辺を平行移動で貼り合わせることで, dipole を持つ閉リーマン面 $(R_\Gamma, \omega_\Gamma)$ が構成される. (図 10)

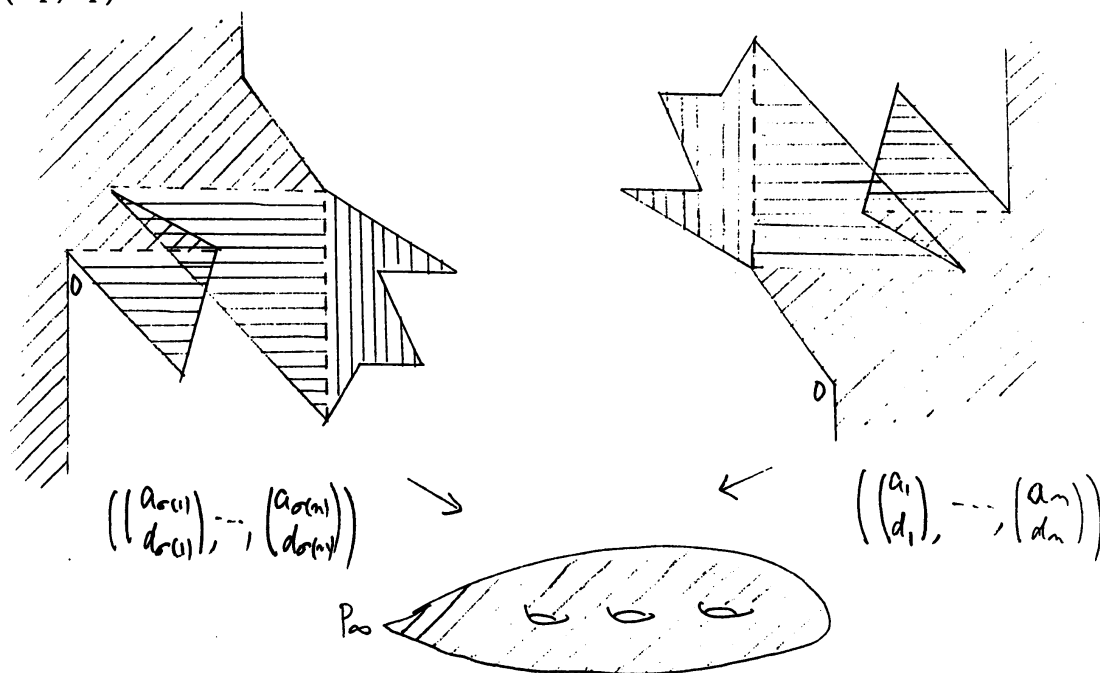


図 10. 深度付き稲妻多角形による閉リーマン面の構成

このようにして、次の定理が得られる。

定理 2 [HO3] . 深度付き稲妻多角形の全体と、次の集合の間には自然な全単射が存在する。

$$\{(R, \omega) \mid R \text{ は閉リーマン面}, \omega \text{ は } R \text{ 上の dipole}\}$$

さて、種数を g としたとき、dipole のモジュライ空間 MD_g は、リーマン・ロッホの公式からすぐに複素 $4g - 1$ 次元であることが分かる。深度付き稲妻多角形の各頂点は、出来上がった dipole の零点に対応するが、最も一般的な場合は 1 位の零点が $2g$ 個あるときである。このとき、零点の周りの角度の総和は $8g\pi$ であり、これは種数が g の dipole の極の周りの角度の総和の最大である。また、これは $2\pi \times (8g - 2) - \pi \times (8g - 2)$ より $8g - 2$ 角形の外側の角の総和と一致する。したがって、次が分かる

命題 種数 g の dipole を深度付きの稲妻多角形で表した場合、次数は $4g - 1$ 以下になる。また、dipole が 2 位以上の零点を持たない場合は次数はちょうど $4g - 1$ になる。

条件 H を満たす dipole が open dense に存在することとこの命題から、種数 g の dipole のモジュライ空間 MD_g の中で、次数がちょうど $4g - 1$ の深度 0 の稲妻多角形で表されるものの全体が open dense であることが分かる。そこで、更に詳しく 2 位以上の零点を持たない dipole を表す深度 0 の稲妻多角形で、次数が $4g - 1$ のものを表す条件を求めると、それは置換 σ に関する次の条件 (H) になる。

$$(H) \begin{cases} \sigma(1) \neq 1, \quad \sigma(n) \neq n, \quad \sigma(i+1) \neq \sigma(i) + 1 \\ \sigma^{-1}(\sigma(1) - 1) = \sigma^{-1}(1) - 1 \\ \sigma^{-1}(\sigma(4g - 1) + 1) = \sigma^{-1}(4g - 1) + 1 \\ \sigma^{-1}(\sigma(i) + 1) - 1 = \sigma^{-1}(\sigma(i + 1) - 1) \end{cases}$$

そこで、(H) を満たす置換 σ に対して

$$C(\sigma) := \{((a_1, \dots, a_{4g-1}), \sigma) \mid a_1, \dots, a_{4g-1} \text{ は虚部が正の複素数}\}$$

$$D(\sigma) := \{(R_\Gamma, \omega_\Gamma) \mid \Gamma \in C(\sigma)\}$$

とすると、次の定理が成り立つ。

定理 3 [HO2] . (1) 各 $D(\sigma)$ は MD_g の open cell であり、 $(a_1, \dots, a_{4g-1})$ は局所座標を与える。

(2) $D := \coprod_{\sigma} D(\sigma)$ は MD_g において open dense である。

さて、最後に hyperelliptic curve 上の特殊な dipole について証明なしで状況を述べる。そのために、次のような形の n 次の置換 σ を“対辺型”置換と呼ぶことにする。

$$\sigma(1) = n, \sigma(2) = n - 1, \dots, \sigma(n) = 1$$

E を種数 g の hyperelliptic curve, ι を hyperelliptic involution とすると、 ι の固定点を 2 つ $p_\infty, p_0 \in E$ を選ぶと、 p_∞ に 2 位の極をもち p_0 に $2g$ 位の零点を持つ dipole が $\mathbb{C}^\times$ の自由度を除いて一意に決まる。このような dipole を深度付き稲妻多角形で表すと $2g$ 次で置換部分

が対辺型のものになり, ι は, 稲妻多角形で表される $\mathbb{C}$ 内の領域の 180 度回転で表される. また逆に, そういった深度付き稲妻多角形は, 種数 g の hyperelliptic curve 上の hyperelliptic involution の固定点の 1 つに 2 位の極をもち, hyperelliptic involution の別の固定点に $2g$ 位の零点を持つような dipole を表す.

E, ι, p_∞ を上のように置き, ι の固定点ではない点を p_0 とし, $\iota(p_0) = p_1$ とすると, p_∞ に 2 位の極をもち, p_0 と p_1 にそれぞれ g 位の零点を持つような dipole が $\mathbb{C}^\times$ の自由度を除いて一意に決まる. このような dipole を深度付き稲妻多角形で表すと $2g + 1$ 次で置換部分が対辺型のものになり, ι は, 稲妻多角形で表される $\mathbb{C}$ 内の領域の 180 度回転で表される. また逆に, そういった深度付き稲妻多角形は, 種数 g の hyperelliptic curve 上の hyperelliptic involution の固定点の 1 つに 2 位の極をもち, hyperelliptic involution で移りあう 2 点にそれぞれ g 位の零点を持つような dipole を表す.

最後に, 上に述べたようなタイプの dipole は, hyperelliptic curve を固定すれば一般的には $\mathbb{C}$ で parametrize されることを注意しておく.

REFERENCES

- [B1] C.-F. Bödigheimer, *Interval exchange spaces and moduli spaces*, Contemp. Math. 150 (1993) 33-50.
- [B2] C.-F. Bödigheimer, *Cyclic homology and moduli spaces of Riemann surfaces*, Astérisque 226 (1994) 43-55.
- [HO1] Y. Hashimoto and K. Ohba, *Cutting and pasting of Riemann surfaces with Abelian differentials, I*, Int. J. Math. 10 (1999) 587-617
- [HO2] Y. Hashimoto and K. Ohba, *On the anti-parallel Igata construction of Riemann surfaces*, Aspects of Complex Analysis, Differential Geometry, Mathematical Physics and Applications (1999) 60-76.
- [HO3] Y. Hashimoto and K. Ohba, *On the moduli space of dipoles*, in preparation.