

漸化式を用いるベッセル関数 $J_\nu(x)$ の数値計算法の誤差解析

中部大学経営情報学部 吉田年雄 (Toshio Yoshida)

1. はじめに

m を適当に選ばれた正の偶整数とし, α を小さな任意定数とする.

$$F_{\nu+m+1}(x) = 0, F_{\nu+m}(x) = \alpha \quad (1)$$

を出発値として, $J_\nu(x)$ が満足する漸化式

$$F_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} F_\nu(x) - F_{\nu+1}(x) \quad (2)$$

を繰り返し使うことにより, $F_{\nu+m-1}(x), F_{\nu+m-2}(x), \dots, F_\nu(x)$ を順次, 計算する. それを用いれば, ある $N(<m)$ に対して, $n=0, 1, \dots, N$ についての $J_{\nu+n}(x)$ の近似式が次式で与えられる.

$$J_{\nu+n}(x) \approx F_{\nu+n}(x) / \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k F_{\nu+2k}(x) \quad (3)$$

ただし,

$$\varepsilon_k = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{(\nu+2k)\Gamma(\nu+k)}{k!} \quad (4)$$

である. この $J_\nu(x)$ の計算法については, $0 \leq \nu < 1$ の場合に対して, 既に二宮¹⁾, 牧之内²⁾らによって誤差解析を含めて研究されている. 特に, 二宮

は計算値の誤差に対する有用な評価式を与えている。二宮による誤差解析における式変形では、かなり面倒な手続きを必要とするが、本稿で提案している方法では、式変形を比較的容易（機械的）に行うことができる。

2. 誤差解析

n を正整数とする。関数 $J_{v+n}(x)$ および $Y_{v+n}(x)$ は共に同じ漸化式(2)を満足する。逆に式(2)の一般解は

$$F_{v+n}(x) = \xi J_{v+n}(x) + \eta Y_{v+n}(x) \quad (5)$$

によって表わされる。ここで ξ および η は任意定数である。これらの任意定数は式(1)によって決定される。式(1)から次式が得られる。

$$F_{v+m+1}(x) = \xi J_{v+m+1}(x) + \eta Y_{v+m+1}(x) = 0 \quad (6)$$

式(5)と(6)から η を消去すると次式を得る。

$$F_{v+n}(x) = \xi \left(J_{v+n}(x) - \frac{J_{v+m+1}(x)Y_{v+n}(x)}{Y_{v+m+1}(x)} \right) \quad (7)$$

上式と次の関係式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k J_{v+2k}(x) = 1 \quad (8)$$

より

$$\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k \left(\frac{F_{v+2k}(x)}{\xi} + \frac{J_{v+m+1}(x)Y_{v+2k}(x)}{Y_{v+m+1}(x)} \right) + \sum_{k=m/2+1}^{\infty} \varepsilon_k J_{v+2k}(x) = 1 \quad (9)$$

が得られる。式(7)と(9)から ξ を消去すると次式が求められる。

$$J_{v+n}(x) = \frac{F_{v+i}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k F_{v+2k}(x)} (1 - \Phi_{v,m}(x)) + \frac{J_{v+m+1}(x)Y_{v+n}(x)}{Y_{v+m+1}(x)} \quad (10)$$

ここで,

$$\Phi_{v,m}(x) = \left(\sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k \frac{J_{v+m+1}(x) Y_{v+2k}(x)}{Y_{v+m+1}(x)} + \sum_{k=m/2+1}^{\infty} \varepsilon_k J_{v+2k}(x) \right) \quad (11)$$

である. 式(10)は, $J_{v+n}(x)$ とその近似式との基本的な関係式である.

したがって, 式(1)を出発値として, 漸化式(2)を繰り返し適用することより得られた $F_{v+m-1}(x), F_{v+m-2}(x), \dots, F_v(x)$ を用いて, 式(3)により, 10進 p 桁の精度で $J_{v+n}(x)$ が計算できるためには,

$$|\Phi_{v,m}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \quad (12)$$

および

$$|\Theta_{v,m,n}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \quad (13)$$

が成り立てばよい. ここで,

$$\Theta_{v,m,n}(x) = \frac{J_{v+m+1}(x) Y_{v+n}(x)}{J_{v+n}(x) Y_{v+m+1}(x)} \quad (14)$$

である.

$J_{v+n}(x)$ の近似式(3)の相対精度 $E_{v,m,n}(x)$ は, 式(10)より,

$$E_{v,m,n}(x) = \frac{\Phi_{v,m}(x) - \Theta_{v,m,n}(x)}{1 - \Phi_{v,m}(x)} \quad (15)$$

と表され, さらに, $|\Phi_{v,m}(x)| \ll 1$ ならば,

$$E_{v,m,n}(x) \approx \Phi_{v,m}(x) - \Theta_{v,m,n}(x) \quad (16)$$

と表される.

3. $\Phi_{v,m}(x)$ の変形

式(11)で表わされる $\Phi_{v,m}(x)$ を変形しよう.

$$\begin{aligned}
\Phi_{v,m}(x) &= \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k \frac{J_{v+m+1}(x)Y_{v+2k}(x)}{Y_{v+m+1}(x)} + 1 - \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k J_{v+2k}(x) \\
&= \frac{Y_{v+m+1}(x) + \frac{2}{\pi x} \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k R_{m-2k, v+2k+1}(x)}{Y_{v+m+1}(x)}
\end{aligned} \tag{17}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
R_{m-2k, v+2k+1}(x) &= \frac{\pi x}{2} (J_{v+m+1}(x)Y_{v+2k}(x) - J_{v+2k}(x)Y_{v+m+1}(x)) \\
&= \sum_{i=0}^{m/2-k} \frac{(-1)^i (m-2k-i)! \Gamma(v+m-i+1)}{i! (m-2k-2i)! \Gamma(v+2k+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k+2i}
\end{aligned} \tag{18}$$

はLommel多項式³⁾である.

式(17)の右辺の分子の第1項 $Y_{v+m+1}(x)$ は, 次式のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
Y_{v+m+1}(x) &= \frac{J_{v+m+1}(x) \cos(v+m+1)\pi - J_{-v-m-1}(x)}{\sin(v+m+1)\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1} \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma(v+m-k+1)}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&+ \left(\frac{x}{2}\right)^{m+1} \left\{ \left(\frac{x}{2}\right)^v \cos v\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(v+m+k+2)} - \left(\frac{x}{2}\right)^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{(m+k+1)! \Gamma(-v+k+1)} \right\} / \sin v\pi
\end{aligned} \tag{19}$$

また, 式(17)の右辺の分子第2項は, 次のように書き換えられる⁴⁾.

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi x} \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k R_{m-2k, v+2k+1}(x) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1} \sum_{k=0}^{m/2} \varepsilon_k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \sum_{i=0}^{m/2-k} \frac{(-1)^i (m-2k-i)! \Gamma(v+m-i+1)}{i! (m-2k-2i)! \Gamma(v+2k+i+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i}
\end{aligned}$$

(x の同じベキでまとめると)

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m-1} \sum_{l=0}^{m/2} \sum_{i=0}^l \varepsilon_{l-i} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \frac{(-1)^i (m-2l+i)! \Gamma(v+m-i+1)}{i! (m-2l)! \Gamma(v+2l-i+1)}$$

(ε_{l-i} を具体的に書き入れると)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1} \sum_{l=0}^{m/2} \frac{1}{(m-2l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \\
&\quad \cdot \sum_{i=0}^l \frac{(-1)^i (v+2l-2i)(m-2l+i)! \Gamma(v+l-i) \Gamma(v+m-i+1)}{i! (l-i)! \Gamma(v+2l-i+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=0}^l \rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \text{無限級数にすると} \right) \\
& = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^{-v-m-1} \sum_{l=0}^{m/2} \frac{1}{(m-2l)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2l} \\
& \quad \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (v+2l-2i)(m-2l+i)! \Gamma(v+l-i) \Gamma(v+m-i+1)}{i!(l-i)! \Gamma(v+2l-i+1)}
\end{aligned} \tag{20}$$

上式をPochhammerの記号

$$\begin{aligned}
(\alpha)_i &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+i-1) = \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha)} \\
(\alpha)_0 &= 1
\end{aligned} \tag{21}$$

で表示するため、 公式

$$\begin{aligned}
a-2i &= a(1-a/2)_i / (-a/2)_i \\
\Gamma(a+i) &= \Gamma(a)(a)_i \\
\Gamma(a-i) &= (-1)^i \Gamma(a) / (1-a)_i
\end{aligned} \tag{22}$$

を使って、一般化された超幾何級数の形に書き換えると次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi x} \sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k R_{m-2k, v+2k+1}(x) \\
& = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^{-v-m-1} \sum_{l=0}^{m/2} \frac{\Gamma(v+l) \Gamma(v+m+1)}{l! \Gamma(v+2l)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2l} \\
& \quad \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (1-l-v/2)_i (m-2l+1)_i (-l)_i (-v-2l)_i}{i! (-l-v/2)_i (1-v-l)_i (-v-m)_i}
\end{aligned} \tag{23}$$

ここで、一般化された超幾何級数の和に関する定理⁵⁾

$$\begin{aligned}
& {}_4F_3 \left(a, 1+\frac{a}{2}, b, -l; \frac{a}{2}, 1+a-b, 1+a+l; -1 \right) \\
& = \frac{\Gamma(a+l+1) \Gamma(a-b+1)}{\Gamma(a+1) \Gamma(a-b+l+1)} \quad (l: \text{正整数})
\end{aligned} \tag{24}$$

を用いれば、次式が得られる。

$$\frac{2}{\pi x} \sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k R_{m-2k, v+2k+1}(x)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1} \sum_{k=0}^{m/2} \frac{\Gamma(v+m-k+1)}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (25)$$

このように、式の簡単化にとって、定理(24)が大きな手助けとなっている。文献4)では、この式の簡単化（級数の和を単項で表すこと）をさらに一般的に試みる方法について述べている。式(19)と(25)を式(17)に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \Phi_{v,m}(x) = & \left[\frac{-1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v-m-1} \sum_{k=m/2+1}^m \frac{\Gamma(v+m-k+1)}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right. \\ & + \left(\frac{x}{2}\right)^{m+1} \left\{ \left(\frac{x}{2}\right)^v \cos v\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(v+m+k+2)} \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{x}{2}\right)^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{(m+k+1)! \Gamma(-v+k+1)} \right\} / \sin v\pi \right] / Y_{v+m+1}(x) \quad (26) \end{aligned}$$

ここで、式(19)の第1の部分($k=0,1,\dots,m$)の一部と式(25)の右辺($k=0,1,\dots,m/2$)は相殺していることに注意しよう。この相殺により、 $\Phi_{v,m}(x)$ が小さくなり、式(12)を満たすことができるようになるのである。上式において、 $v+m/2 \gg x/2$ ならば、[]の第1の部分の $k=m/2+1$ の項が主要項である。したがって、 $\Phi_{v,m}(x)$ に対する有用な評価式として、次式が得られる。

$$\Phi_{v,m}(x) \approx \frac{-\Gamma(v+m/2)}{\pi Y_{v+m+1}(x) (m/2+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-v+1} \quad (27)$$

式(26)および(27)は、二宮¹⁾の結果と一致する。二宮は、式(17)の右辺の分子の第2項が式(25)の右辺の形になることを予想し、非常に面倒な式変形を行なって、数学帰納法により証明した。本稿での導出は、上述のように直接的であるが、それでも多少の面倒な式変形を必要とする。

4. 数値例

表1と表2には、表題の x と m 、表中の ν と n の場合について、 $J_{\nu+n}(x)$ の近似式(3)の値、その相対誤差、 $\Phi_{\nu,m}(x)$ の値（式(11)の計算値）、 $\Phi_{\nu,m}(x)$ の評価式(27)の値および $\Theta_{\nu,m,n}(x)$ の値を示す。計算はFUJITSU M-1600を

表1 $x=5, n=0$ の場合の $\Phi_{\nu,m}(x)$, $\Phi_{\nu,m}(x)$ の評価式(27)および $\Theta_{\nu,m,n}(x)$

	$\nu=0.3 \quad m=20$	$\nu=0.7 \quad m=20$
Approximation (3)	$-2.96821101262 \cdot 10^{-1}$	$-3.57639916660 \cdot 10^{-1}$
Relative error of (3)	$1.31 \cdot 10^{-12}$	$9.80 \cdot 10^{-13}$
$\Phi_{\nu,m}(x)$	$1.31 \cdot 10^{-12}$	$9.80 \cdot 10^{-13}$
Estimate (27) of $\Phi_{\nu,m}(x)$	$1.24 \cdot 10^{-12}$	$9.27 \cdot 10^{-13}$
$\Theta_{\nu,m,n}(x)$	$-1.33 \cdot 10^{-22}$	$1.08 \cdot 10^{-25}$

表2 $x=10, n=0$ の場合の $\Phi_{\nu,m}(x)$, $\Phi_{\nu,m}(x)$ の評価式(27)および $\Theta_{\nu,m,n}(x)$

	$\nu=0.3 \quad m=26$	$\nu=0.7 \quad m=26$
Approximation (3)	$-1.94619215492 \cdot 10^{-1}$	$-6.80710012343 \cdot 10^{-2}$
Relative error of (3)	$1.78 \cdot 10^{-10}$	$1.34 \cdot 10^{-10}$
$\Phi_{\nu,m}(x)$	$1.78 \cdot 10^{-10}$	$1.34 \cdot 10^{-10}$
Estimate (27) of $\Phi_{\nu,m}(x)$	$1.54 \cdot 10^{-10}$	$1.17 \cdot 10^{-10}$
$\Theta_{\nu,m,n}(x)$	$1.83 \cdot 10^{-18}$	$2.09 \cdot 10^{-18}$

用い、倍精度演算で行った。これら $n=0$ の場合には、 $\Theta_{v,m,n}(x)$ の値は $\Phi_{v,m}(x)$ の値と比べて十分に小さいことが分かる。したがって、この場合には、 $E_{v,m,n} \approx \Phi_{v,m}(x)$ となっている。

表3 には、表題に記した v, x および m に対して、 $n=10, 20$ および 22 の場合の $J_{v+n}(x)$ の近似式(3)の値、その相対誤差、 $\Phi_{v,m}(x)$ の値、評価式(27)の値および $\Theta_{v,m,n}(x)$ の値を示す。 $\Phi_{v,m}(x)$ は n には依存しないので、同一値であることは言うまでもない。 $n=10$ のときには、 $\Theta_{v,m,n}(x)$ の値は $\Phi_{v,m}(x)$ の値と比べ十分に小さいので、 $E_{v,m,n}(x) \approx \Phi_{v,m}(x)$ となっているが、 $n=20$ のときには、 $\Phi_{v,m}(x)$ と $\Theta_{v,m,n}(x)$ は同程度の大きさであるので、 $E_{v,m,n}(x) \approx \Phi_{v,m}(x) - \Theta_{v,m,n}(x)$ となっている。また、 $n=22$ のときには、 $\Theta_{v,m,n}(x)$ の値は $\Phi_{v,m}(x)$ の値と比べ十分大きいので、 $E_{v,m,n}(x) \approx -\Theta_{v,m,n}(x)$ となっている。 $n=22$ の

表3 $v=0.3, x=10, m=26$ の場合の $\Phi_{v,m}(x)$, $\Theta_{v,m,n}(x)$ の評価式(27)および $\Theta_{v,m,n}(x)$

	$n=10$	$n=20$	$n=22$
Approximation (3)	$1.80421140320 \cdot 10^{-1}$	$7.66189125055 \cdot 10^{-6}$	$4.49608402394 \cdot 10^{-7}$
Relative error of (3)	$1.78 \cdot 10^{-10}$	$-5.05 \cdot 10^{-10}$	$-1.76 \cdot 10^{-7}$
$\Phi_{v,m}(x)$	$1.78 \cdot 10^{-10}$	$1.78 \cdot 10^{-10}$	$1.78 \cdot 10^{-10}$
Estimate (27) of $\Phi_{v,m}(x)$	$1.54 \cdot 10^{-10}$	$1.54 \cdot 10^{-10}$	$1.54 \cdot 10^{-10}$
$\Theta_{v,m,n}(x)$	$4.99 \cdot 10^{-18}$	$6.84 \cdot 10^{-10}$	$1.76 \cdot 10^{-7}$

とき，近似式(3)の精度を高めるためには， m の値を大きくする必要がある．

5. $J_{v+n}(x)$ の計算について

固定された v および x に対して，式(12) ($\Phi_{v,m}(x)$ として，式(11)あるいは，評価式(27)) を満足する最小の m を M とし， $|\Theta_{v,M,n}(x)| < 0.5 \times 10^{-p}$ を満足する非負の n が存在したとき，その最大値を N とすれば， $0 \leq n \leq N$ に対して，式(3)により10進 p 桁の精度で $J_{v+n}(x)$ が計算できることになる

($n > N$ に対しては， $|\Theta_{v,m,n}(x)| < 0.5 \times 10^{-p}$ を満足するように， m の値を M より大きく選ぶ必要がある)． v として， $0 \leq v < 1$ の場合について， M を実際に求めると， $|\Theta_{v,M,n}(x)| < 0.5 \times 10^{-p}$ を満足する非負の n は存在し， N の値は $M/2 \sim 2M/3$ 程度であることが分かる．

参 考 文 献

- 1) 二宮市三：漸化式によるBessel関数の計算，電子計算機のための数値計算法II，pp.103-121，培風館，東京(1965)．
- 2) 牧之内三郎：漸化式を用いる $J_v(x)$ の近似計算，情報処理，Vol.6, No.4, pp.194-201(1965)．
- 3) 森口繁一，宇田川金圭久，一松信：数学公式III，p.225，岩波書店，東京(1968)．

- 4) 吉田年雄：一般化された超幾何級数の和の定理の応用，情報科学リサーチジャーナル，Vol.2,pp57-60,中部大学情報科学研究所(1995).
- 5) Slater,L.J.： *Generalized Hypergeometric Functions*, pp.48-57,Cambridge University Press(1966).