

BROWDER - LIVESAY INVARIANTの拡張について

東大 理 松元重則

3.1. 序 ならびに 定義

Browder - livesay は、球面上の free involution の desuspension の問題を、ある invariant を与える事によって解決した。Santiago Lopez de Medrano は、彼の These v.2. 上の結果の best possible である事を示した。

ここでは、彼等の結果を、球面上の free involution から、一般の compact 多様体 (simply-connected or not) に拡張する。

Y は、connected closed manifold とし、 $n \geq 2$ 。
 n の次元を表わす。 $w: \pi_1(Y) \rightarrow \{\pm 1\}$ は、1次元 Stiefel - Whitney 類とある。 Y の基本類は、
 $[Y] \in H_n^+(Y, \mathbb{Z})$ で表わす。 ($H_n^+(Y, \mathbb{Z})$ の内には、
Wall "Surgery of compact mfd's" を参照。) S は、 Y 上の与えられた free $\mathbb{Z}_2$ -action とし、

次 ε , 終始, 仮定する。

[仮定] Y の base point y_0 と, $S y_0 \in$ 結ぶ path (の homotopy class) l が, $\rightarrow$ 与えられ $z \equiv z$.

$S l \circ l = 1 \in \pi_1(Y, y_0)$ である。

この時, l を用いる事に $\rightarrow z$, define される

$S_\# : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(Y)$ は, involution である。

次に, (S, Y) の signature $\varepsilon(S, Y) \in$

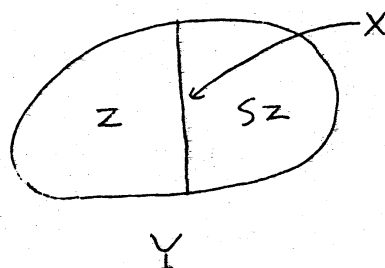
$$\varepsilon(S, Y) = \pm 1 \iff S_*[Y] = \pm[Y] \quad (\text{複号同}$$

順) により define する。 $\rightarrow$ $S_* : H_m^+(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H_m^+(Y; \mathbb{Z})$ である。

(134) Y と S^n と Y , involution と S^n standard である ε とすれば, $\varepsilon(S, Y) = (-1)^{n-1}$ である。

次に, (S, Y) により, 我々は, triple $(T, N, \phi) \in$ 考える。 $\rightarrow$ N は n -dim. closed manifold z T は, N の上の free involution である, ϕ は N から Y への simple homotopy equivalence z , $\phi T \alpha = S \phi \alpha$ ($\forall \alpha \in N$) を満足するものである。

次に $X^{n-1} \in (S, Y)$ の characteristic submfld. とせよ, あるいは, ある compact submanifold Z^n of Y が存在して, $\partial Z = X$ かつ $Z \cup S Z = Y$, $Z \cap S Z = X$ である。(次回参照)



[定義] $\phi: (T, N) \rightarrow (S, Y)$ が s -regular
on X とは、

1) ϕ は differentiable 又は PL map (我々の
働いている category に $\in$) かつ transverse regular
on X .

2) $\phi|_{\phi^{-1}(X)}: \phi^{-1}(X) \rightarrow X$ は simple h.e.
があるとする。

(注意) $\phi^{-1}(X)$ は (T, N) の characteristic submfd
である。

我々は $\phi: (T, N) \rightarrow (S, Y) \in$ equivariant
($\mathbb{Z}_2$ -action に 関して) homotopy z : 動かし s -regular
on X と なしめ得るか、否かという問題を考える。

§.2 結果

我々は、上の問題を、次の補足的仮定のもとで
解く。

[補足的仮定] Y の次元 ($=n$) $\in 6$ 以上であるとし、characteristic submfd. X は、連結かつ、 $\pi_2(Z, X) = \pi_1(Z, X) = 0$ を満足するとする。ここに、 Z とは、 $X \in$ bound する Y の submanifold であつた。
我々の結果は、次の通りである。

[定理] finitely presented group π と homomorphism $w: \pi \rightarrow \{\pm 1\}$ と π の involution $\mathcal{S}$ と、符号 ε (+ か -) と、自然数 n と n による定まる abelian 群

$$BL_n(\pi, w; \mathcal{S}, \varepsilon)$$

が define される。ここに、simple h. e. ($\mathbb{Z}_2$ -equivariant) $\phi: (T, N) \rightarrow (S, Y)$ の $\mathbb{Z}_2$ -equivariant homotopy class ν のみによる定まる invariant

$$\sigma(\phi) \in BL_n(\pi_1(Y), w; S_\#, \varepsilon(S, Y))$$

が define される。ここに $\sigma(\phi) = 0$ は、次と同値である。

上の [補足的仮定] を満足する任意の characteristic submanifold X に対し、 ϕ は、 ν の $\mathbb{Z}_2$ -equivariant homotopy class 内に、 X を $\mathcal{S}$ -regular するものを含む。

上に定義した obstruction group $BL_n(\dots)$ が先づ非零でないとは、次による。次による。

[定理 2] $\sigma \in BL_{n+1}(\pi_1(Y), w; S\#, \epsilon(S, Y))$
 の任意の元とする時, compact mfd triad
 $(Y \times I, Y \times \{0\}, Y \times \{1\})$

~~###~~ と, Y の上の free involution T 並びに
 equivariant simple h.e. (of triads)

$$\phi: (Y \times I, Y \times \{0\}, Y \times \{1\}) \rightarrow (\text{自分自身})$$

が存在して, $\sigma(\phi) = \phi \circ z$ がある.

(注意. 1) 我々は, invariant $\sigma \in$ closed mfd の
 場合にしか定義しなかったが [定理. 1] は, 容易に,
 boundary 付きの多様体の ~~fixed~~ boundary を fix した
 case に拡張される. 上の [定理. 2] は, への拡張に用
 いられている.

(注意. 2) [定理. 1] は $\dim Y \geq 6$ の場合に成り立つ.
 かし, [定理. 2] は $\dim(Y \times I) = 6$ の場合は, ため.