

非線形発展方程式と非線形ノーマル・モード

京大理 川原琢治

非線形発展方程式のダイナミックスを孤立波や波束など適当な空間的局在構造を用いて有限次元の系で近似しようという試みは種々行われている。可積分なソリトン系において、ソリトンが基本的な空間構造として、いわば“非線形ノーマル・モード”の役割を果たすことは周知の通りである。非可積分系のカオスにおいても、空間的にコヒーレントな構造が時間的に不規則に変動する現象と見なしてよい場合があり、空間構造に基づく記述が有効となる。本報告では、空間的局在構造（非線形ノーマル・モード）を用いて非線形発展方程式の解の挙動を近似する試みのいくつかについて述べる。

1. 可積分系あるいは可積分系に近い場合。

逆散乱法で定式化できる可積分なソリトン方程式においては、ソリトンと輻射の重ね合わせによって一般解が表現できる。従って、この場合には、ソリトンと輻射を非線形ノーマル・モードと考えればよい。また、非可積分な摂動が加わる場合でも、可積分系からの近さが保たれるような摂動であれば、ソリトンと輻射を基本モードとして、カオス現象を記述することが可能であることは、Nozaki-Bekki(1984, 1985)¹⁾, Bishop et al.(1985, 1986)²⁾などによって明らかにされている。

他方、Benjamin-Ono方程式の代数ソリトン解の相互作用は、有限個のpoleの重ね合わせとして表現することができるが、これも一種の非線形ノーマル・モードによる有限次元系への運減と考えられ興味深い [Case(1979), Chen et al.(1979)]³⁾。

2. 非可積分系におけるノーマル・モード。

可積分系のソリトンに対応して、非可積分系において非線形ノーマル・モードとなり得るものは、発展方程式の定常解（空間的局在パルス）である。定常解は幸運な場合には解析的に得られることもあるが、一般には数値的に与えられるに過ぎないため、それらに基づいて系のダイナミックスを近似する場合には、逆散乱法のような有効な方法はなく、直接的な摂動法が用いられる。空間的局在パルスの重ね合わせによって弱いカオスを記述する試みとして

- i) 5階KdV方程式: Gorshkov et al. (1976, 1977)⁴⁾, Kawahara-Takaoka (1988, 1989)⁵⁾
 - ii) Benney方程式: Kawahara-Toh (1988)⁶⁾, Elphick et al. (1988, 1990)⁷⁾
 - iii) 反応・拡散方程式: Kuramoto (1988)⁸⁾
 - iv) Ginzburg-Landau方程式: Kawasaki-Ohta (1982)⁹⁾
- のような研究があるが、その中のいくつかについて述べる。

3. カオスの統計的性質。

強いカオスにおいても空間的局在構造は存在するが、それらは生成・消滅を繰り返し複雑な変動を示すので、その変動のプロセスを解析的に記述することは困難である。しかし、カオス状態の統計的性質（例えばスペクトルなど）を空間的局在構造に基づいて近似的に記述することは可能である。このようなアプローチの例として以下の研究を取りあげる。

- i) 非線形シュレーディンガー方程式: Shen-Nicholson (1987)¹⁰⁾
- ii) Kuramoto-Sivashinsky方程式: Toh (1987)¹¹⁾
- iii) Ginzburg-Landau方程式: Kishiba et al.¹²⁾
- iv) 散逸型Benjamin-Ono方程式: Lee-Chen (1982), Chen et al. (1989, 1990)¹³⁾

その他、空間多次元の場合における非線形ノーマル・モードはどのようなものになるかについて考えてみたい [Olsen et al. (1985)¹⁴⁾, Toh et al. (1989), Iwasaki et al. (1990)¹⁵⁾]。

参考文献

- 1) K. Nozaki & N. Bekki: Phys. Lett. **102A** (1984) 383. J. Phys. Soc. Japan, **54** (1985) 2363.
月刊フィジクス、6巻9号 (1985) 534.
- 2) E. A. Overman II, D. W. McLaughlin & A. R. Bishop: Physica **19D** (1986) 1.
A. R. Bishop, M. G. Forest, D. W. McLaughlin & E. A. Overman II: Physica **23D** (1986) 293.
- 3) K. M. Case: Physica **96A** (1979) 173.
H. H. Chen, Y. C. Lee & N. R. Pereira: Phys. Fluids **22** (1979) 187.
- 4) K. A. Gorshkov, L. A. Ostrovskii & V. V. Papko: Sov. Phys. JETP **44** (1976) 306.
K. A. Gorshkov & V. V. Papko: Sov. Phys. JETP **46** (1977) 92.
- 5) T. Kawahara & M. Takaoka: J. Phys. Soc. Japan **57** (1988) 3714. Physica **39D** (1989) 43.
- 6) T. Kawahara & S. Toh: Phys. Fluids **31** (1988) 2103.

- 7) C. Elphick, E. Meron & E. A. Spiegel: Phys. Rev. Lett. **61**(1988)496.
C. Elphick: Instabilities and Nonequilibrium Structures. Reidel(1990).
- 8) Y. Kuramoto: Spatial Inhomogeneities and Transient Behavior in Chemical Kinetics
Manchester Univ. Press(1988).
- 9) K. Kawasaki & T. Ohta: Physica **116A**(1982)573.
- 10) M. M. Shen & D. R. Nicholson: Phys. Fluids **30**(1987)1096.
- 11) S. Toh: J. Phys. Soc. Japan **56**(1987)949.
- 12) S. Kishiba, S. Toh & T. Kawahara: preprint
- 13) Y. C. Lee & H. H. Chen: Physica Scripta **T2/1**(1982)41.
S. Qian, Y. C. Lee & H. H. Chen: Phys. Fluids **B1**(1989)87.
S. Qian, H. H. Chen & Y. C. Lee: J. Math. Phys. **31**(1990)506.
- 14) O. H. Olsen, P. S. Lomdahl, A. R. Bishop & J. C. Eilbeck: J. Phys. C **18**(1985)L511.
- 15) S. Toh, H. Iwasaki & T. Kawahara: Phys. Rev. A **40**(1989)5472.
H. Iwasaki, S. Toh & T. Kawahara: Physica **41D**(1990)