

Cuntz 環の置換表現とグラフ

京大数理研 川村勝紀 (Katsunori Kawamura)

1 Introduction

Bratner, Jorgensen[1] 等の Cuntz 環の置換表現 (permutation representation) を表現から定まるあるグラフにより以下の考察を行う:

- (i) ユニタリー同値による分類,
- (ii) 既約性の特徴付け,
- (iii) 既約分解,
- (iv) 一般化,
- (v) UHF 環への応用,
- (vi) 自己準同型への応用.

以下、最も簡単な例の説明から始める。

2 $\mathcal{O}_2$ の標準表現

Cuntz 環 $\mathcal{O}_2$ の $l_2(\mathbf{N})$ への表現を以下に定義する。 $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を $l_2(\mathbf{N})$ の標準完全正規直交基底とする。

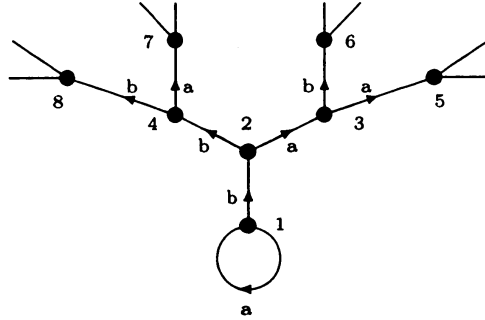
$$s_1 e_n \equiv e_{2n-1}, \quad s_2 e_n \equiv e_{2n} \quad (n \in \mathbf{N})$$

により、定まる $l_2(\mathbf{N})$ 上の線形作用素 s_1, s_2 は関係式

$$s_i^* s_j = \delta_{ij} I \quad (i, j = 1, 2), \quad s_1 s_1^* + s_2 s_2^* = I$$

を満たす。 s_1, s_2 により定まる $\mathcal{O}_2$ の $l_2(\mathbf{N})$ 上の表現 $(l_2(\mathbf{N}), s_1, s_2)$ を $\mathcal{O}_2$ の標準表現と呼ぶことにする。この表現に対して有向無限グラフ $\mathbf{g} = (E, V)$ を以下で定める。 $V \equiv \mathbf{N}$ を頂点の集合、 $E \equiv \{(n, 2n-1), (n, 2n) : n \in \mathbf{N}\}$ を辺

の集合とし、 $(n, m) \in E$ は頂点 n から、 m への向きを持った辺とする。 V は $l_2(\mathbf{N})$ の基底 $\{e_n\}$ を表し、 E は、 s_1, s_2 の $\{e_n\}$ への作用を表している。このグラフは以下のような形のグラフになる。



ここでグラフの辺のラベル a, b はそれぞれ s_1, s_2 を表している。

$\mathfrak{g}$ は連結な正規グラフで、勝手な頂点は入ってくる辺が 1 本、出ていく辺が 2 本ある。ループの部分は $s_1 e_1 = e_1$ に対応している。ツリーの部分は $\mathbf{C}^2$ 上の full Fock 空間 $F(\mathbf{C}^2)$ を表している。実際に s_1, s_2 のツリーの部分の作用は生成演算子 (テンソル代数と見たときの、1-ベクトルの左からのテンソル積) と等しい。従って

$$l_2(\mathbf{N}) \cong \mathbf{C}e_1 \oplus F(\mathbf{C}^2), \quad F(\mathbf{C}^2) \equiv \mathbf{C}\Omega \oplus \bigoplus_{k \geq 1} (\mathbf{C}^2)^{\otimes k}.$$

Fact 2.1 $\mathcal{O}_2$ の標準表現 $(l_2(\mathbf{N}), s_1, s_2)$ は既約。

証明は、まず勝手な $l_2(\mathbf{N})$ のベクトル $v \neq 0$ に対して、 s_1^*, s_2^* で生成された適当な単項式を v に作用させて e_1 の係数が 0 でないようにとれる。さらに適当な複素数を掛けて v を $e_1 + \sum_{n \geq 2} a_n e_n$ とあらわすことができる。次に $\lim_{n \rightarrow \infty} s_1^n v = e_1$ を得る。従って $e_1 \in \overline{\mathcal{O}_2 v}$ がわかる。グラフの連結性より、 $e_n \in \overline{\mathcal{O}_2 v}$ ($n \in \mathbf{N}$) 従って、 $\overline{\mathcal{O}_2 v} = l_2(\mathbf{N})$. 勝手な $v \neq 0$ についてこの式を得るので、 $(l_2(\mathbf{N}), s_1, s_2)$ は既約であることがわかる。さらに、上記のグラフでループのラベル b に、ループとツリーをつなぐ辺のラベルを a にすると、対応する表現は標準表現とユニタリー非同値になる。さらに、ループの上に勝手な大きさ 1 の複素数 z を乗せたものは z の値により、ユニタリー同値類が決まる。

3 一般化

$d \geq 2$ に対して $\mu: \mathbf{N} \times \{1, \dots, d\} \rightarrow \mathbf{N}$ を勝手な全単射とする。

$$\mu_i(n) \equiv \mu(n, i) \quad (n \in \mathbf{N}, i = 1, \dots, d)$$

により、単射の族 $\{\mu_i\}_{i=1}^d$ が定義される。 μ に対し、

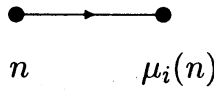
$$\pi_\mu(s_i)e_n \equiv e_{\mu_i(n)} \quad (n \in \mathbf{N}, i = 1, \dots, d)$$

と置くと、作用素の組 $\{\pi_\mu(s_1), \dots, \pi_\mu(s_d)\}$ は Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ の表現 $(l_2(\mathbf{N}), \pi_\mu)$ を定義する。 $(l_2(\mathbf{N}), \pi_\mu)$ を分岐関数系 μ により定義された $\mathcal{O}_d$ の置換表現と呼ぶ。

一方、 μ に対して、

$$V_\mu \equiv \mathbf{N}, \quad E_\mu \equiv \{(n, \mu_i(n) : n \in \mathbf{N}, i = 1, \dots, d)\}$$

と置く。ここで辺は以下のように方向をもつものとする。



これより、 $\mathfrak{g}_\mu \equiv (E_\mu, V_\mu)$ は $\mathcal{O}_2$ の標準表現の時と同様に有向無限グラフになる。

$\mathfrak{g}_\mu$ を μ の置換グラフと呼ぶ。一般に $\mathfrak{g}_\mu$ は連結ではないが、以下の Fact が適応できるグラフになっている

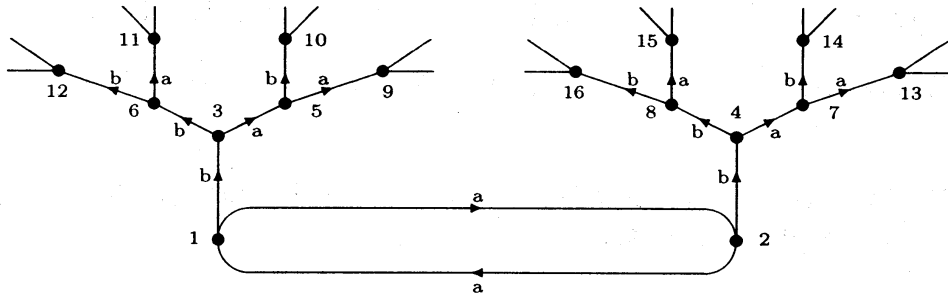
Fact 3.1 連結な有向正規グラフで頂点へ入ってくる辺の数と出て行く辺の数がそれぞれ $1, d (2 \leq d \leq \infty)$ のものは、単純閉路を高々1つ持つ。

例をあげると

$$\mu_1(1) = 2, \quad \mu_1(2) = 1, \quad \mu_1(n) = 2n - 1 \quad (n \geq 3),$$

$$\mu_2(1) = 3, \quad \mu_2(2) = 4, \quad \mu_2(n) = 2n \quad (n \geq 3),$$

により与えられる分岐関数系 μ により以下のグラフが得られる。



グラフ $\mathfrak{g}_\mu$ に対して

$$c_\mu : E_\mu \rightarrow \{1, \dots, d\},$$

$$c_\mu(x, y) \equiv i \text{ when } y \in \mu_i(\mathbf{N})$$

で定められる辺の集合上の射像を $\mathfrak{g}_\mu$ の配位と呼ぶ。 $BF_{cp}(d)$ を $\mathbf{N} \times \{1, \dots, d\}$ から $\mathbf{N}$ への全単射 μ で $\mathfrak{g}_\mu$ が連結でかつ、1つのループを持つものの全体の集合とする。

Theorem 3.1 $\mu \in BF_{cp}(d)$ に対して以下は同値:

- (i) $(l_2(\mathbf{N}), \pi_\mu)$ は既約.
- (ii) ループ C 上に制限した配位の値は周期的でない。つまり、 $c_\mu(C) = (i_1, \dots, i_k)$ に対して

$$(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}) = (i_1, \dots, i_k)$$

となるような巡回置換 $\sigma \in \mathbf{Z}_k$ は id のみである。

特に

$$\mu_i(n) \equiv d(n-1) + i \quad (n \geq 1, i = 1, \dots, d)$$

で与えられる分岐関数系 μ による $\mathcal{O}_d$ の置換表現は既約である。

$\mu \in BF_{cp}(d)$ に対して、 $\mathfrak{g}_\mu$ の中のループ上での配位を I_μ とあらわす。 I_μ の元の個数 (= ループの長さ) を I_μ の長さと呼ぶ。

Theorem 3.2 $\mu, \mu' \in BF_{cp}(d)$ に対して、以下は同値

- (i) π_μ と $\pi_{\mu'}$ はユニタリ同値.
- (ii) I_μ と $I_{\mu'}$ は同じ長さ k をもち、巡回群 $\mathbf{Z}_k$ の作用で互いに移りあう。
- (iii) 全単射 $\alpha : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ が存在して、

$$\alpha \circ \mu_i \circ \alpha^{-1} = \mu'_i \quad (i = 1, \dots, d).$$

Theorem 3.3 $(\mathcal{H}, \pi)$ を $\mathcal{O}_d$ の表現とする。このとき以下は同値:

- (i) ある $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}$ が存在して $\pi(s_{i_1} \cdots s_{i_k})$ は $\mathcal{H}$ 上で固有値 1 を持つ。
- (ii) ある $\mu \in BF_{cp}(d)$ が存在して $(\mathcal{H}, \pi)$ の部分表現で $(l_2(\mathbf{N}), \pi_\mu)$ とユニタリ同値なものがある。

この定理より、置換表現は表現の基底によらずに特徴づけされる。

既約な置換表現のユニタリー同値類の集合は以下のようにあらわすことができる。

$$\Sigma_{d,k} \equiv \{I \in \{1, \dots, d\}^k : I \text{ は周期的でない} \},$$

$$\Xi_{d,k} \equiv \Sigma_{d,k} / \mathbf{Z}_k,$$

$$\Xi_d \equiv \bigcup_{k \geq 1} \Xi_{d,k}$$

ここで $\Xi_{d,k}$ の元は $\Sigma_{d,k}$ の元の巡回群 $\mathbf{Z}_k$ による軌道である。すると今までの結果より以下の埋め込みがあることがわかる。

$$\Xi_d \hookrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_d.$$

さらに表現された生成元の単項式の固有値の考察より、

$$\Xi_d \times U(1) \hookrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_d$$

が実際に構成できる。Fact 3.1 の下のグラフの配位は (11) となり周期的なので対応する $\mathcal{O}_2$ の置換表現は既約ではない。これは上の埋め込みで

$$(11) = (1 : +1) + (1 : -1)$$

というように配位 (1) で表現された生成元 s_1 の固有値が +1 と -1 の場合に既約分解される。ここで $(1 : +1), (1 : -1) \in \Xi_d \times U(1)$ である。この分解の方法については省略する。 $(i_1 \dots i_k)$ で $\Xi_{d,k}$ の元を表すと、

$$\Xi_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1), (2), (12), (112), (122), (1112), (1122), (1222), \\ (11112), (11122), (11212), (11222), (12122), (12222), \\ \dots, \end{array} \right\},$$

$$\Xi_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1), (2), (3), (12), (13), (23), \\ (112), (113), (122), (123), (132), (133), (223), (233), \\ (1112), (1113), (1122), (1123), (1133), (1213), (1222), (1223), \\ (1232), (1233), (1323), (1332), (1333), (2223), (2233), (2333), \\ \dots, \end{array} \right\}.$$

結果として、既約置換表現に対応する Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ のスペクトラムは k 多角形の頂点上に配位 $\{1, \dots, d\}$ を非周期的に並べる時の並べ方というように解釈

4 UHF 環への応用

Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ に対して、ここで UHF 環 UHF_d とはゲージ変換 $s_i \mapsto z s_i$, $z \in U(1)$ で不変な元の集合の作る部分環 $\mathcal{O}_d^{U(1)}$ をさすものとする。

上記の置換表現を UHF 環に制限することにより以下の結果を得る。

Theorem 4.1 (i) $\mu \in BF_{cp}(d)$ に対して $\pi_\mu|_{\text{UHF}_d}$ は一意に既約表現の直和に分解される。

(ii) $\mathcal{O}_2$ の標準表現の $CAR \cong \text{UHF}_2$ への制限は CAR の Fock 表現と同値。

既約分解された置換表現の CAR への制限は Fock 表現と適当な Bogoliubov 変換 (自己同型) で移り合う。上記の結果は一般の $\mathcal{O}_d$ と UHF_d , $d \geq 2$, についても成り立つ。

ここで次のような分岐関数を定義する。

$$\mu'_1(1) \equiv 2, \quad \mu'_2(1) \equiv 1,$$

$$\mu'_1(n) \equiv 2n - 1, \quad \mu'_2(n) \equiv 2n \quad (n \geq 2).$$

表現 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_i = l_2(\mathbf{N})$, $i = 1, 2$ を μ, μ' の置換表現の直和とする。 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ の標準基底をそれぞれ $\{e_n\}, \{f_n\}$ とすると、

$$\pi_\mu(s_1)e_1 = e_1, \quad \pi_{\mu'}(s_2)f_1 = f_1$$

が成り立つことに注意する。 $\mathcal{H}$ のベクトル

$$x_\lambda \equiv \sqrt{\lambda}e_1 + \sqrt{1-\lambda}f_1 \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

に対して ω_λ を x_λ による、 $\mathcal{O}_2$ のベクトル状態とする。このとき

Proposition 4.1 状態 $\omega_\lambda|_{CAR}$ による GNS-表現 π_λ は λ による、 CAR の Araki-Woods factor を与える。つまり $\lambda = 0, 1$ のとき、 $\pi_\lambda(CAR)''$ は I 型因子環、 $\lambda = 1/2$ のとき、 $\pi_\lambda(CAR)''$ は II_1 型因子環、 $\lambda \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$ のとき、 $\pi_\lambda(CAR)''$ は III 型因子環となる。

この証明には数研の阿部光雄氏により与えられた以下の帰納的フェルミ系 (a, ϕ) を用いる。

$$a \equiv s_1 s_2^*,$$

$$\phi: \mathcal{O}_2 \rightarrow \mathcal{O}_2: \quad \phi(x) = s_1 x s_1^* - s_2 x s_2^* \quad (x \in \mathcal{O}_2).$$

これより、帰納的に列 $\{a_n : n \geq 1\}$ を以下のように構成する:

$$a_n \equiv \phi^{n-1}(a) \quad (n \geq 1).$$

すると、

$$\{a_n, a_m\} = 0, \quad \{a_n, a_m^*\} = \delta_{n,m} I \quad (n, m \geq 1)$$

が満たされることがわかる。つまり、 $\{a_n, a_n^* : n \geq 1\}$ は $\mathcal{O}_2$ 中の正準反交換関係を満たす族である。さらに

$$C^* \langle \{a_n : n \geq 1\} \rangle = CAR = \mathcal{O}_2^{U(1)}$$

となり、

$$E_{11}^{(n)} \equiv a_n a_n^*, \quad E_{12}^{(n)} \equiv a_n, \quad E_{21}^{(n)} \equiv a_n^*, \quad E_{22}^{(n)} \equiv a_n^* a_n \quad (n \geq 1),$$

$$\mathcal{A}_n \equiv C \langle \{E_{ij}^{(n)} : i, j = 1, 2\} \rangle, \quad (n \geq 1)$$

と置くと

$$CAR = \bigotimes_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$$

となる。ここで、 $\{\mathcal{A}_n : n \geq 1\}$ は互いに可換な CAR 中の部分環の族になるのでテンソルの記号と等号の意味はその意味で正当化される。あとは、各 $\mathcal{A}_n$ で状態 ω_λ の値をチェックすればよい。すると、

$$\omega_\lambda(E_{11}^{(n)}) = \lambda, \quad \omega_\lambda(E_{22}^{(n)}) = 1 - \lambda, \quad \omega_\lambda(E_{12}^{(n)}) = \omega_\lambda(E_{21}^{(n)}) = 0 \quad (n \geq 1).$$

これはまさに Araki-Woods factor のときに現れる積状態に他ならない。

5 自己準同型への応用

最後に置換表現を使って Cuntz 環上のある自己準同型のクラスの分類について簡単に述べる。まず、中西襄氏により与えられた以下の式を紹介する。

$$t_1 \equiv s_{23,1} + s_{31,2} + s_{12,3},$$

$$t_2 \equiv s_{32,1} + s_{13,2} + s_{21,3},$$

$$t_3 \equiv s_{11,1} + s_{22,2} + s_{33,3}$$

ここで s_1, s_2, s_3 は Cuntz 環 $\mathcal{O}_3$ の生成元, $s_{ij,k} \equiv s_i s_j s_k^*$, $i, j, k = 1, 2, 3$, とする。計算により、 t_1, t_2, t_3 は $\mathcal{O}_3$ の生成元の満たすべき条件を満たすことがわかる。つまり、対応

$$(s_1, s_2, s_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3)$$

は $\mathcal{O}_3$ から $\mathcal{O}_3$ への*準同型を与える。この自己準同型を N_1 と表すことにする。

Proposition 5.1 $\rho = N_1$ は自己同型でない既約で単位的な*準同型, つまり, $\rho(I) = I$, $\rho(\mathcal{O}_3) \neq \mathcal{O}_3$ かつ,

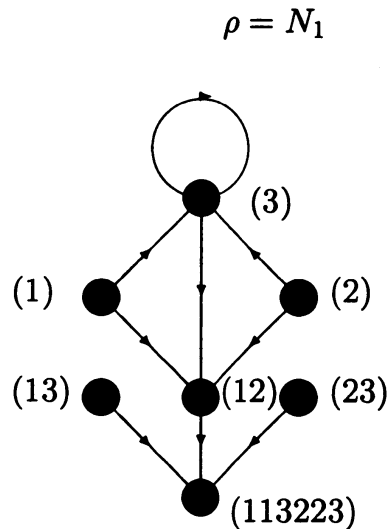
$$\rho(\mathcal{O}_3)' \cap \mathcal{O}_3 = CI.$$

まず、 N_1 の定義式より、 N_1 の像は $\mathfrak{S}_3$ による、生成元の置換で定義される外部自己同型での固定化部分環の部分環になる。よって、 N_1 は全射にはなり得ない。単位的であるのは t_1, t_2, t_3 が $\mathcal{O}_3$ の生成元の関係式を満たすことよりわかる。既約性の証明には $\mathcal{O}_3$ の置換表現を用いた証明を行う。まず以下の補題を用意する。

Lemma 5.1 $\mathcal{A}$ を単純な単位的 C^* 環, ρ を $\mathcal{A}$ 上の単位的な*自己準同型とする。もし、 $\mathcal{A}$ 上のある既約表現 π が存在して $\pi \circ \rho$ もまた $\mathcal{A}$ 上の既約表現になれば、 ρ は既約である。

証明は ρ の相対的可換子環を包含関係で両側から CI で挟んで示せばよい。

さて、実際に $\mathcal{O}_3$ の表現に対して N_1 により、どのように表現が変化するかをグラフを用いて示す。



ここで各頂点は $\mathcal{O}_3$ の置換表現の配位による表示である。例えば (1) という表現を N_1 で移したさきの表現が既約分解して (3) と (12) の直和でかける:

$$(1) \circ N_1 = (3) + (12),$$

これはグラフの頂点 (1) から 2 つの頂点 (3) と (12) への向きのついた矢印で表されている。このグラフを N_1 の分岐グラフ (branching graph) と呼ぶ。このグラフの頂点は分岐関数で与えられる置換グラフに対応している。つまり、

自己準同型 N_1 は置換グラフを置換グラフ変換して、その変換の仕方を表すのが分岐グラフである。このグラフより

$$(12) \circ N_1 = (113223)$$

がわかり、 N_1 は既約表現 (12) を既約表現 (113223) に移していることがわかる。よって、補題より N_1 は既約である。

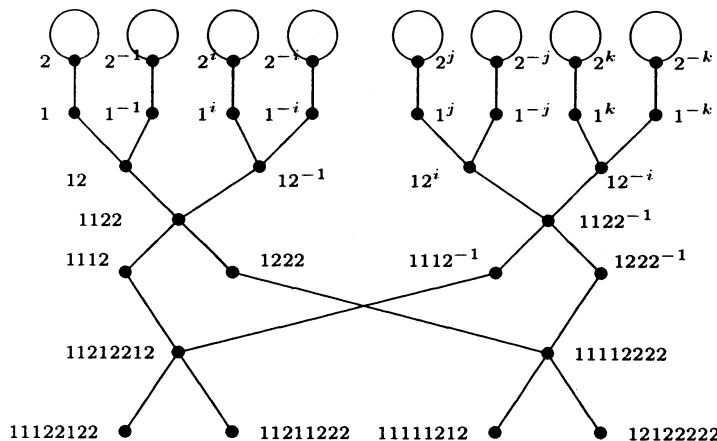
上記の自己準同型は勝手な $\mathcal{O}_d$, $d \geq 2$ に定義できて、その性質も上記のように置換表現を用いて調べることができる。一般に生成元とその共役元の $2k-1$ 次斉次多項式で定義されるゲージ作用に共変な $\mathcal{O}_d$ の自己準同型を k 次の置換自己準同型と呼ぶ。特に canonical endomorphism (= 正準自己準同型?) は 2 次の置換自己準同型である。

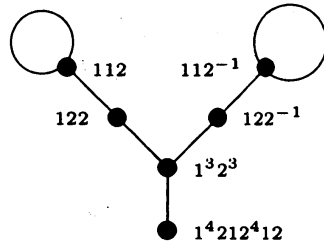
現時点で $\mathcal{O}_2$ の 2 次の置換自己準同型は分岐グラフを描くことにより、分類ができています。計 24 個中、自己同型が 4 つ、自己同型でない自己準同型 $24-4=20$ 個のうちのユニタリー同値類が 14 個、そのうち既約なものが 5 つある。 $\mathcal{O}_2$ にはクラインの 4 元群 V_4 の外部作用があり、 $14-5=9$ 個の可約な置換自己準同型 (のユニタリー同値類) は

$$[\rho] = [\alpha] + [\beta]$$

のように 2 つの外部自己同型 $[\alpha], [\beta] \in V_4 \cap \text{Out} \mathcal{O}_2$ のセクターとしての和に分解される。特に $\mathcal{O}_2$ の canonical endomorphism は $[1] + [1]$ (V_4 の単位元 $[1] = \text{Out} \mathcal{O}_2$ の単位元, のセクターとしての和) となる。

さらに $s_1 \leftrightarrow s_2$ による、外部自己同型で既約な 5 つを同値でわると 3 つ。このうちの 2 つがセクター理論の意味で互いに共役でその統計的次元は $\sqrt{2}$, セクター理論と Jones 理論との対応で、この自己準同型から得られる部分環の指数は 2, fusion rule より、 A_4 型の Bratteli 図式 (?) を得る。この自己準同型の分岐グラフを以下に説明なしに紹介する。





ここで

$$-1, \quad i = e^{2\pi\sqrt{-1}/4}, \quad j = e^{2\pi\sqrt{-1}/8}, \quad k = e^{-2\pi\sqrt{-1}/8}$$

等の指数部分は置換表現の固有値、正の整数の指数は指数がかかっている記号が整数の数だけ繰り返して現れることを意味することとする。

$\mathcal{O}_3$ の2次の置換自己準同型は

$$3^2! = 9! = 362,880$$

あり、少なくとも5,000個以上の互いに非同値で既約な自己同型でない自己準同型が存在していることが計算機による分岐則の計算でわかっている。

References

- [1] Ola.Bratteli and Palle E.T.Jorgensen, *Iterated function Systems and Permutation Representations of the Cuntz algebra*, Memories of the American Mathematical Society, number 663, American Mathematical Society (1999).