

非定常時系列の解析と応用

慶大 工学部 川島弘尚

§ 1 はじめに

時系列解析が経済現象を説明する道具として発達したことは周知のことであるが、現在でも経済学との関係は他のそれよりも強いといえよう。音声解析、自動制御、画像処理などの分野で時系列解析（あるいは信号処理）が広く使われ、また独自の手法がそれぞれの分野で開発されているが、これらの手法には各分野での特色が強く反映されている。従って開発された手法を理解するには、その手法の開発を可能にした技術的背景、動機、目的等を知る必要があると思われる。

この数年、筆者は非定常時系列の解析に従事しているが、この小論では上りような考えに立脚して、研究の契機となったプロジェクトについて若干説明し、続いて開発した解析手法について述べることにする。

研究の動機となったプロジェクトは通商産業省工業技術院

の大型プロジェクト「自動車総合管制技術の開発」であり、特にそのうちの経路誘導システムの開発が直接のき、かけとな^{り、2)}っている。

3.2 経路誘導システム

経路誘導システムは自動車に双方向のデジタル通信機を装着し、混雑の回避を目的とした最適ルートへの誘導を可能にする統合的な情報管制システムである。図1と図2にシステムの構成図と経路誘導用車載機の表示部が示してある。ドライバーが操作部から目的地のコードを入力すると、主要交差点の直前に埋設されたループ・アンテナを通過する際に路上機（ミニコン）に送信される。路上機では目的地コードをもとにして車両の誘導方向を求めて車載機に返送され、車載機の表示部に表示される。一オセクター・システムでは最新の交通状況から算出した最適経路をもとめ、その結果を交差点ごとに、目的地と誘導方向とを対応した形の表にまとめて、路上機に15分周期で返送されるように設計されている。

自動車に通信機を装着して経路誘導を行おうというアイデアは1960年代の後半から各国で提案されている³⁾。ここでとりあげる経路誘導システムの特色は、経路誘導がオンラインリアルタイムであることと、東京の一部で実用テストを行

た実績があるという二点にある。

システムの有効性を確かめるために実施された実用テストはパイロット実験と呼ばれ、昭和52年10月から約1年間行われた。パイロット実験の規模、実施された実験の概要をそれぞれ表1, 2に、パイロット実験エリアを図3に示す。この結果、交通量、旅行時間(2地間間の走行時間)、システムの信頼性に関する膨大な量のデータが蓄積された。

今まで述べたようなハードウェアを前提として、パイロット実験における経路誘導の設計方針が次のように決められた。すなわち、通信機の普及率が低いため、誘導の結果が交通流に変化を与えようとは考えられないから、旅行時間を最小にすることが“最適経路誘導”であると考えた。このことは、地間ノード、地間間の旅行時間をコスト(アーク・コスト)として、最短時間経路をもとめ、これを最適経路であるとみなすことである。ところが、図4に示すように、旅行時間は時刻々々変化するもので、上の問題は時変数コストを持つネットワークの最短時間経路を解く問題になる。従って出発地間では将来通過するであろう地間の旅行時間予測値をあらかじめ求めておく必要があることになる。このように旅行時間が時刻によって変動する場合は最短時間経路を定める上で、旅行時間の予測が不可欠であることがわかる。

そこで、パイロットシステムでは旅行時間を直接計測できることから、時系列解析によって旅行時間時系列の予測を行うことにした。システムがオンライン、リアルタイムで設計されているので、最新の生データと過去の統計データの両方を使って予測するような予測システムを設計した。パイロットシステムの予測方式についての詳細は他の文献[4],[6]を参照してもらうことにして、ここではまずパイロットシステムの有効性を評価する実験について述べ、その後に旅行時間時系列の解析について述べることにする。

3.3 システムの有効性の評価

システムの有効性を測るには、経路指示を受けた誘導車とドライバーに経路を選択させて走行した車と比較し、どちらがどれだけ早く目的地に到着できるかを確認すればよい。そこで走行レースと称して、同一時刻に同一の目的地をめざした誘導車と、一般ドライバー、プロドライバーの運転する非誘導車との旅行時間を比較する実験を行った。表3にその結果を示すが、全体の勝ち割合が約84%なので、システムの有効性は確認できた⁵⁾と考えている。

実験を通じて得られたデータを使ってさまざまなシミュレーションを行い、最短時間経路の実態や、予測誤差と誘導誤

差との関係等について興味深い結果が得られているが、時系列解析とは直接関係が無いのでここでは省略するが、興味のある読者は文献[4],[6],[7]を参照されたい。なお、最短時間経路を計算する際に、専用のLSIを製作して、汎用計算機の約1/40の処理時間で解がもつまるシステムもテストされ、良い結果を得ている。すでに音声合成の分野でいくつか例があるが、時系列解析の分野でもLSIを前提としたアルゴリズムが開発され、専用のハードウェアが作られることがあると思われるが、興味のある読者は文献[8]を参照されたい。

§4 旅行時間の時系列解析

図4からわかるように、旅行時間時系列を定常過程であるとはみなせない上に、曜日による変動が大きい。そこで階差をとって、その自己相関関数を計算すると図5のようになった。この図から2回階差をとれば、ほぼ定常過程とみなせることがわかる。また図6に示すように曜日、場所による変動は、2回階差をとったあとの自己相関関数にはさほど顕著にあらわれない。このことは積分型モデルの有効性を示唆しているものと考えた。さらに、他の良く知られている方法、例えば指数平滑化法、逐次推定法(Kalman filterを応用したもの)、適応指数平滑化法などと比較検討した結果、積分型モ

デル(実際には AR モデル)による予測の予測誤差が、わずかではあるが、他の手法よりも小さいことがわかった。⁹⁾ 設計時期の関係で、この結果をパイロット実験に反映させることはできなかったが、予測システムの性能を評価する時の一つの比較基準として大いに利用した。パイロット実験の予測システムでは、いくつかの状況を設定し、当日データから計算されたいくつかの評価値の値によって、どの状況にあるかを判断しながら状況に応じて適切な手法を使いわけるといった考え方で設計されている。その結果、判断基準の決め方はかなりヒューリスティックになっているが、それでもこの予測システムによる予測の予測誤差は積分型モデルによる予測の予測誤差に近い値となっている。パイロットシステムをさらに発展したシステムを東京全域に設置することが検討されているが、¹⁰⁾ 積分型モデルによる予測、あるいは次節以降で述べるような手法を予測システムにどのように組みこんでいくかは今後の課題である。

5.5 $ARIMA$ 過程の解析

前節までに述べたような背景から、非定常過程(積分型モデル)をシステムティックに取扱う必要が出てきた。データ処理の観点から経路誘導システムにおける時系列予測の特色を

着えてみると、各アーグごとに予測を行うので、非常に多種類の時系列を、たとえオフラインで行うにしても、比較的短時間の間に処理する必要があることがわかる。(パイロットシステムではアーグの数は約700)従って、処理アルゴリズムに対して次のような要求が課せられていることになる。

- i) メモリの占有を最小限にし、しかも処理速度を速くする。
- ii) 処理を自動化し、人間の判断が必要な所を最小限にする。

このような視察から従来から知られている積分型モデルの解析方法を再検討してみることにになった。あとの議論を明確にするために、まず Box-Jenkins [11] の記号を使っていくつか用語を定義することにする。

B をシフト作用素、すなわち $Bx(t) = x(t-1)$ とし、

$$\nabla x(t) = x(t) - x(t-1) = (1-B)x(t)$$

$$\nabla^d x(t) = \nabla^{d-1} x(t) - \nabla^{d-1} x(t-1) = (1-B)^d x(t), d=1,2,\dots$$

と定義する。非定常過程、あるいは積分型モデル $x(t)$ が次の関係と満足するとき、正規 ARIMA (n, p, m) 過程という。

$$(1) \quad A(B) \nabla^p x(t) = B(B) e(t) \equiv u(t), \quad t=0,1,2,\dots$$

$$A(B) = 1 - a_1 B - \dots - a_n B^n, \quad a_n \neq 0,$$

$$B(B) = 1 - b_1 B - \dots - b_m B^m, \quad b_m \neq 0, \quad n \geq m \geq 0, \quad n \geq 0.$$

但し, $e(t)$ は平均零, 分散 σ^2 の正規白色雑音で, $A(B)=0$, $B(B)=0$ の根はすべて単位円の外にあり, 共通根はないものとする。 $(1-B)^p$ を展開すると, (1)は

$$(2) \quad (1 - d_1 B - \cdots - d_{n+p} B^{n+p}) x(t) = u(t), \quad t=0, 1, 2, \dots$$

となる。

さて, 次数 (n, p, m) を既知として, 時刻 0 から時刻 $N+n+p-1$ までの間 $x(t)$ を観測したものとする。この時 (2) は次のように書ける。

$$Y_N = X_{n+p} \alpha + U_N$$

$$Y_N = \begin{bmatrix} x(n+p) \\ \vdots \\ x(n+p+N-1) \end{bmatrix}, \quad X_{n+p} = \begin{bmatrix} x(n+p-1), \dots, x(0) \\ \vdots \\ x(n+p+N-2), \dots, x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+p} \end{bmatrix}, \quad U_N = \begin{bmatrix} u(n+p) \\ \vdots \\ u(n+p+N-1) \end{bmatrix}$$

一方, $\nabla^p x(t)$ は $x(t)$ より求められるから, (1) を次の形に書きかえることができる。

$$\nabla Y_N = \nabla X_n \alpha + U_N$$

$$\nabla y_N = \begin{bmatrix} \nabla^p x(n+p) \\ \vdots \\ \nabla^p x(n+p+N-1) \end{bmatrix}, \quad \nabla X_n = \begin{bmatrix} \nabla^p x(n+p-1), \dots, \nabla^p x(p) \\ \vdots \\ \nabla^p x(n+p+N-2), \dots, \nabla^p x(p+N-1) \end{bmatrix},$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad u_N = \begin{bmatrix} u(n+p) \\ \vdots \\ u(n+p+N-1) \end{bmatrix}.$$

a は a から求めることができて、具体的には次のような形となる。

$$(3) \quad a = Da - Qd$$

$$D = [d, Pd, \dots, P^{n-1}d], \quad ((n+p) \times n \text{ matrix}),$$

$$d = \begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix}, \quad ((n+p) \times 1 \text{ vector}), \quad P = \begin{bmatrix} 0, & \dots, & 0 \\ 1, & & \\ 0, & & \\ \vdots & & \\ 0, & \dots, & 1, & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = P'$$

但し、 d_i は $(1-B)^p$ を展開した時の B^i の係数、すなわち

$$(1-B)^p = d_0 + d_1 B + \dots + d_p B^p$$

である。

以上のような定義のもとに、Box-Jenkins¹¹⁾ が提案している

ARIMA 過程の分析方法を整理すると以下のようになる。

- 1) 原系列の階差 $\nabla^d x(t)$ を $d=1, 2, 3, \dots$ について計算し、各 d で $\nabla^d x(t)$ の自己相関関数、偏相関関数を計算する。
- 2) 自己相関関数、偏相関関数から定常とみなせる次数 $d=p$ を決定する。
- 3) 決定した次数での系列 $\nabla^p x(t)$ に関して、AR過程、MA過程、ARMA過程のいずれかとみなしてパラメータを推定する。

この方法によると、たとえ次数 p が既知であっても、パラメータ α を推定するためには $\nabla^p x(t)$ を計算し α を求める必要がある。ところが、 α と α の間には (3) という関係があることから、 α が推定できるのなら、 α の線型変換である α が直接推定できそうなものである。しかも、実際に Box-Jenkins の方法で解析してみると、いくつか統計的な手法が開発されているにもかかわらず、上の 2), 3) の手順では人間の判断に頼らざるを得ない所が多い。事実、Box-Jenkins の本 [11] の中には 1 つの時系列に対して複数のモデルが提案されている例がいくつか載っている。このようなことから、Box-Jenkins の方法とは逆の順序で必要なパラメータを決定すること考えた。すなわち

- 1) α の次数 $n+p$ と $u(t)$ の次数 m を決定する。

- 2) パラメータ $\{\alpha_j, 1 \leq j \leq n+p\}$ と $\{\beta_j, 1 \leq j \leq m\}$ を推定する。
- 3) 推定した $\{\alpha_j\}$ から次数 p を決定し, $\{a_j, 1 \leq j \leq n\}$ を求める。

この方法に従えば, 予測を行うには 1) と 2) の手順を踏めば良いことになる, 特に ARI 過程の場合は予測値が推定値 $\{\hat{\alpha}_j\}$ を用いて直ちに求まることになる。我々の本来の目的が $x(t)$ の予測にあるので, このことは非常に都合が良い。

ところが, α_j から作られる特性多項式は (1) と (2) から明らかのように単位円周上に根を p 個持っている。従って今まで知られていた一般論^{(12), (13)} ではパラメータの推定ができないことになる。逆に類推すると, Box-Jenkins の方法はこの事実にもとづいているものと思われる。

5.6 パラメータの推定

今, 次数 $n+p$ と m を既知として, パラメータ $\{\alpha_j, 1 \leq j \leq n+p\}$ と $\{\beta_j, 1 \leq j \leq m\}$ をデータ $x(t)$ から推定することと考える。前節で述べたように $\{\alpha_j\}$ から作る特性多項式の根が単位円周上にある場合は, $\{\alpha_j\}$ の推定ができないことが知られていた。しかしながら, 関連する文献 [12], [13] の議論を注意深く追ってみると, 特性根が単位円の外や内にある場合の議論をそのまま適用できないことを示しているだけで, 単位円周

上に根があるすべての場合にパラメータの推定が不可能である、あるいはもっと正確には推定量の漸近的な性質が導出できないことを証明しているわけではない。[14], [15]

ところで、推定量の漸近特性は、対象となっている時系列の漸近的な挙動によって終局的には決定される。従って ARIMA 過程の場合も $x(t)$ の漸近的な性質そのものを吟味する必要がある。その結果、我々は次のような基本的な結果を得た。[16] すなわち、 $x(t)$ を $ARIMA(n, p, m)$ とすると、 $x(t)$ は定常過程 $\nabla^p x(t)$ とのある種の合成積で表現できる。具体的には

$$x(t) = \sum_{j=0}^{t-p} f_{j+1}^p \nabla^p x(t-j) + \sum_{j=0}^{p-1} g_j^t \nabla^j x(j), \quad t \geq p$$

但し,

$$f_j^p = \frac{1}{(p-1)!} \frac{(j+p-2)!}{(j-1)!}, \quad j \geq 1, \quad p \geq 1$$

$$g_j^t = f_{t+1-j}^{j+1} = \frac{t!}{j!(t-j)!}, \quad j \geq 0$$

となる。この表現と $\nabla^p x(t)$ が正規定常過程であることを利用すると次の関係を得る。すなわち、任意の τ について

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{2p+1}} \sum_{t=N+p}^{N+n+p-1} x(t+\tau) x(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} |H(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda) d\lambda \\ &\equiv \hat{R}(\tau), \end{aligned}$$

が確率 1 で成立する。但し,

$$i) f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{B(e^{-i\lambda})}{A(e^{-i\lambda})} \right|^2, \quad (\nabla^p x(t) \text{ のスペクトル密度関数})$$

$$ii) H(e^{i\lambda}) = \lim_{N \rightarrow \infty} H_N(e^{i\lambda}) \quad \text{in } L^2(-\pi, \pi)$$

$$H_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} h_N(j) e^{i\lambda j}$$

$$h_N(j) = \begin{cases} f_{j+1}^p N^{-p}, & 0 \leq j \leq N-1; \\ 0, & j \geq N, j < 0. \end{cases}$$

$$\text{さらに } \hat{R}(k) = \begin{pmatrix} \hat{R}(0), \dots, \hat{R}(k-1) \\ \vdots \\ \hat{R}(k-1), \dots, \hat{R}(0) \end{pmatrix} \quad \text{とすると, } \det \hat{R}(k) \neq 0$$

が任意の $k > 0$ について成立することがわかる。

この結果を使うと, $x(t)$ が $AR I(n, p)$ 過程の場合は, α の最小二乗推定量 $\hat{\alpha}_N = (X_{n+p}' X_{n+p})^{-1} X_{n+p}' y_{n+p} // N$ が最良漸近正規で強一緻性を持つ推定量になり, 誤差分布は

$$\sqrt{N} (\alpha - \hat{\alpha}_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N(0, \sigma^2 D P_n^{-1} D'), \quad \text{in law}$$

となることがわかる。但し, $P_n = \begin{pmatrix} R(0), \dots, R(n-1) \\ \vdots \\ R(n-1), \dots, R(0) \end{pmatrix}$, $R(\tau) = E(\nabla^p x(t+\tau) \nabla^p x(t))$ である。[16]

ARIMA 過程の場合は modified Maximum Likelihood を微分して 0 とおいて非線型方程式を反復計算を行って求める必要がある。詳しいことは省略するが, Anderson [17] が ARMA の場合

に示した方法と同様の考え方に従えば、次のような結論を得る。すなわち、 α と $b = [b_1, \dots, b_m]'$ の初期推定量が強一致性を持つならば、第 i 番目のイテレーションにおける α , b の推定量を $\hat{\alpha}_i$, $\hat{b}_i$ とすると、これらは最良漸近正規で、強一致性を持つ推定量である。[18] つまり

$$\sqrt{N} \begin{bmatrix} \hat{b}_i - b \\ \hat{\alpha}_i - \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} N(0, K\Phi^{-1}K'), \text{ in law}$$

が成立する。ここに

$$K = \begin{bmatrix} I_m, 0 \\ 0, D \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \nabla\Phi, \nabla\Omega \\ \nabla\Omega', \nabla\Psi \end{bmatrix}$$

$$[\nabla\Phi]_{g,f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(g-f)} |B(e^{-i\lambda})|^{-2} d\lambda, \quad (g, f=1, 2, \dots, m)$$

$$[\nabla\Omega]_{g,e} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(g-e)} (B(e^{-i\lambda})A(e^{-i\lambda}))^{-1} d\lambda$$

$$[\nabla\Psi]_{k,e} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(k-e)} |A(e^{-i\lambda})|^{-2} d\lambda, \quad (k, e=1, 2, \dots, n)$$

§ 7 次数の決定

さて、次数を既知とすればパラメータが推定できることがわかったが、次に問題となるのは次数の決定である。ARIMA過程の次数を決定する基準は今までに研究されていないので

新たに何か基準を作る必要がでてきた。そこで、ARIMA過程のパラメータが最小二乗法で推定できることを逆に利用して、回帰分析の変数選択の基準によつて次数を決められるかどうかを考えてみた。ここで使った基準はAllenによる予測平方和 (Prediction Sum of Squares) であるが [19], $PSS(k)$ が最小となるような k を次数の推定値とすると、実は一致性を持つ推定値にならないことがわかる。そこで PSS を修正した新しい次数決定の基準を提案する。

データを時刻 0 から時刻 $M+N-1$ まで観測したとして、次のようなモデルを想定する。

$$y_N = X_R \alpha_R + \varepsilon_N$$

$$y_N = \begin{bmatrix} x(M) \\ \vdots \\ x(M+N-1) \end{bmatrix}, \quad X_R = \begin{bmatrix} x(M-1), \dots, x(M-R) \\ \vdots \\ x(M+N-2), \dots, x(M+N-1-R) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x^{(M-1)'} \\ \vdots \\ x^{(M+N-2)'} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_R = \begin{bmatrix} \alpha_1^R \\ \vdots \\ \alpha_R^R \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_N = \begin{bmatrix} \varepsilon(M) \\ \vdots \\ \varepsilon(M+N-1) \end{bmatrix}$$

次数 k を決めるために以下の量を計算する。

$$MPSS(k) = \sum_{j=M}^{M+N-1} \left(\frac{x(j) - \hat{x}^k(j)}{1 - c_k^*(j)} \right)^2, \quad k=1, 2, \dots, M.$$

$$\hat{x}^k(j) = x^k(j-1)' \hat{\alpha}_k = x^k(j-1)' (X_k' X_k)^{-1} X_k' y_N$$

$$C_k^*(j) = \beta(N) x^k(j-1)' (X_k' X_k)^{-1} x^k(j-1)$$

この時, $x(t)$ がもともと $ARI(n, p)$ 過程であって, $\beta(N)$ が

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \beta(N) N^{-\frac{1}{2}} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \log(\log N) / \beta(N) = 0$$

を満足すれば Martingale に対する重複対数の法則を使うことによつて, 充分 N が大であれば,

$$MPSS(k+1) - MPSS(k) \geq K_1 \beta(N) - K_2 \log(\log N) > 0$$

が, $m = n+p \leq k \leq M-1$ において確率 1 で成立する。また, $0 \leq k \leq m-1$ においては, ある正の定数 ε が存在して

$$MPSS(k) - MPSS(k+1) \geq N^{2p+1} (K_3 - K_4 N^{-\varepsilon}) > 0$$

が確率 1 で成立する。ここに $K_i, i=1, 2, 3, 4$ は N に無関係な定数である。[20], [21] すなわち, $MPSS(k)$ を最小にするような k^* を求めれば, これが次数の一致推定量になつてゐることがわかる。

$\beta(N) = \log N$ とした場合のシミュレーションの出力を表 4, ~ 表 6 に示すが, ほぼ期待どおりの結果が得られてゐる。

一般の ARIMA 過程の場合, どのような基準をくれば次数が決定できるかという問題に対して現在のところ明確な見通

しはたっていない。しかしながら、 ARI 過程に拘りては最初の目標に近い結果が得られていることが、今までの議論から明らかであろう。なお $\{d_j\}$ から p と $\{a_j\}$ を求める問題は時系列解析とは直接関係がないと思われるので省略するが、

システム理論の基本的な概念である最小次元実現の考え方を、便って精度の高いアルゴリズムを提案することができたので、興味のある読者は文献[22]を参照されたい。

3.8 非定常入出力からの伝達関数の同定

今までの解析の考え方は、ハイロッドシステムの予測方式をいくめて、対象とする地奥間の旅行時間のみを扱ってきた。東京のように複雑な道路網を構成しているところでは、対象とする地奥間の上流や周囲の交通状況の影響を受けて、その旅行時間が大きく変動することが考えられる。従って、予測の精度をあげるには、相互関係を利用した旅行時間の定式化が必要となる。旅行時間の相互関係を表現する手段として、一つの標準的な方法は伝達関数を想定することであるから、問題は結局、非定常過程に従う入出力データ(旅行時間)から伝達関数を同定すればよいことになる。

今、入力を $z(t)$ 、出力を $y(t)$ 、観測誤差として、入出力間に次のような関係があるものとする。

$$(4) \quad A(B)y(t) = B(B)z(t-d) + u(t), \quad t=0, 1, 2, \dots, d \geq 0,$$

$$A(B) = 1 - a_1 B - \dots - a_n B^n, \quad a_n \neq 0, \quad \text{実数は単位円の外.}$$

$$B(B) = b_0 - b_1 B - \dots - b_{m-1} B^{m-1}, \quad b_{m-1} \neq 0, \quad n \geq m.$$

ここに、 $z(t)$ は $ARIMA(p, q, w)$ 過程、 $u(t)$ は $z(t)$ とす
 べての t で独立な q 次の MA 過程とし、 $u(t) = \sum_{j=0}^{q-1} \theta_j \varepsilon(t-j)$ と
 書くことにする。この時、 $y(t)$ も p 次の積分型モデルとなり、
 $ARIMA$ 過程に属して示したのと同様の漸近的な結果を示すこ
 とができる。そこで、時点 $n-d+1$ から時点 $n+m+N-1$ まで $y(t)$
 と $z(t)$ を観測したとすると、(4) は次のように書きなおせる。

$$Y_N = X_{n,m} \alpha_{n,m} + U_N$$

$$Y_N = \begin{bmatrix} y(n+m) \\ \vdots \\ y(n+m+N-1) \end{bmatrix}, \quad X_{n,m} = \begin{bmatrix} y(n+m-1), \dots, y(n), z(n+m-d), \dots, z(n-d+1) \\ \vdots \\ y(n+m+N-2), \dots, y(n+m-1), z(n+m-d+N-1), \dots, z(n-d+N) \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{n,m} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ -b_1 \\ \vdots \\ -b_{m-1} \end{bmatrix}, \quad U_N = \begin{bmatrix} u(n+m) \\ \vdots \\ u(n+m+N-1) \end{bmatrix}.$$

この時、 $\alpha_{n,m}$ の最小二乗推定値 $\hat{\alpha}_{n,m}(N) = (X'_{n,m} X_{n,m})^{-1} X'_{n,m} Y_N$
 は強一致性を持ち、その誤差分布は $Martingale$ に関する中心極
 限定理を使うことにより、以下の形式で与えられる。

$$\sqrt{N^{2p+1}} (\alpha_{n,m} - \hat{\alpha}_{n,m}(N)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} N(0, \sigma^2 \hat{R}(n,m)^T \hat{R}^*(n,m) \hat{R}(n,m)^T),$$

in law.

但し, $\hat{R}(n,m) = \lim_{N \rightarrow \infty} (X_{n,m}' X_{n,m} / N^{2p+1})$, $\hat{R}^*(n,m)_{k,l} = \sum_{i,j=0}^{p-1} x_i x_j^* \hat{R}(k-i, l-j)$, $\hat{R}(k,l) = (\hat{R}(n,m))_{k,l}$, 且て $\sigma^2 = E|\varepsilon(t)|^2$ である。詳しいことは省略するが, $\hat{R}(n,m)$ は

$$\hat{R}(n,m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dM(\lambda)$$

と書けるので, この書き方に従えば,

$$\sqrt{N^{2p+1}} (\alpha_{n,m} - \hat{\alpha}_{n,m}(N)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} N(0, \hat{R}(n,m)^T \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) dM(\lambda) \hat{R}(n,m)^T),$$

in law

ということになる。ここに, $g(\lambda)$ は $u(t)$ のスペクトル密度関数で $g(\lambda) = \sigma^2 \left| \sum_{j=0}^{p-1} x_j e^{-i\lambda j} \right|^2$ である。このことは, $y(t)$ と $z(t)$ の間に相関があるにもかかわらず, Grenander, Rosenblatt の結果 [23] と似た形が得られていることを示している。

なお, Box-Jenkins も非定常入出力から伝達関数を同定する方法を提案しているが, 彼らの定式化によると $u(t)$ も非定常過程と仮定している。この場合の最小二乗推定値は一致推定量にならないことを容易に示すことができる。 $u(t)$ は観測誤差であるからこれにトレンドがあるのは物理的な意味から考えて不合理であり, また数学的にも不十分な定式化になっている。

いるといえよう。さらに、入出力が定常過程の場合は、 $u(t)$ が白色雑音でないかぎり最小二乗推定値が一致推定量にならないことが知られていることを付記しておく。

一方、次数が未知である非定常入力 $z(t)$ と出力 $y(t)$ を時刻 0 から時刻 $N+M-1$ まで観測し、これから次数を決定することを考える。入出力間の関係を次のように想定する。

$$y_N = X_{n,s} \alpha_{n,s} + u_N,$$

$$X_{n,s} = \begin{bmatrix} x_{n,s}^{(M-1)'} \\ \vdots \\ x_{n,s}^{(M+N-2)'} \end{bmatrix}, \quad \alpha_{n,s} = [a_1^n, \dots, a_n^n, b_0^s, -b_1^s, \dots, -b_{s-1}^s]'$$

$$y_N = [y(M), \dots, y(M+N-1)]', \quad u_N = [u(M), \dots, u(M+N-1)]'$$

この時、次数 (n, m) を決定するために、AR 過程の場合と同じように、以下の量を計算する。

$$MPS(n, s) = \sum_{j=M}^{M+N-1} \left(\frac{y(j) - \hat{y}^{n,s}(j)}{1 - C_{n,s}^*(j)} \right)^2$$

$$\hat{y}^{n,s}(j) = x^{n,s}(j-1)' \hat{\alpha}_{n,s} = x^{n,s}(j-1)' (X_{n,s}' X_{n,s})^{-1} X_{n,s}' y_N,$$

$$C_{n,s}^*(j) = \beta(N) x^{n,s}(j-1)' (X_{n,s}' X_{n,s})^{-1} x^{n,s}(j-1)$$

もともと d が既知で、 $z(t)$ と $y(t)$ の間の伝達関数の次数が (n, m) であったとする。さらに、 $u(t)$ が MA 過程で、 $\beta(N)$ が $\lim_{N \rightarrow \infty} \beta(N) N^{-\frac{1}{2}} = 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \log(\log N) / \beta(N) = 0$ を満足すれば、充分大きな N に対して、任意に $n \geq n$ を固定すると、 $k \geq m$

なるすべての k で

$$MPSS(n, k+1) - MPSS(n, k) \geq K_1 \beta(N) - K_2 \lg(\lg N) > 0$$

が確率 1 で成立する。その他の場合は

$$MPSS(n, k) - MPSS(n, k+1) > 0$$

が確率 1 で成立する。一斉、任意に $s \geq m$ を固定すると、

$k \geq m$ なるすべての k で

$$MPSS(k+1, s) - MPSS(k, s) \geq K_1 \beta(N) - K_2 \lg(\lg N) > 0$$

が確率 1 で成立し、その他の場合は、

$$MPSS(k, s) - MPSS(k+1, s) > 0$$

が確率 1 で成立する。[24] のことから、 $MPSS(n, s)$ を最小にするような (n^*, s^*) をも定めれば、次数の一致推定量が得られることになる。

§9 まとめ

以上が現在までに得られた結果であるが、これが実際に前に述べた要求 i) ii) に合致しているかどうかは今後の検討が必要と思われる。すくなくとも ARI 過程でモデルを作るかき

り、ほぼ自動的に時系列の同定ができて、単なる処理時間だけでなく、これに属する人間の手間もふくめて全体的にかなり減少できるものと思われる。前にも述べたように5.5以降に示した考え方や手法を実際のシステムに生かす時間的なゆとりはなかったが、将来の実用システムには何らかの形で予測方式の中に組み入れられることを期待している。

《参考文献》

- [1] 通商産業省工業技術院：自動車総合管制技術の研究開発，日本産業技術振興協会（1977）
- [2] 松本俊哲，三上 徹，油本暢男，田部 力：自動車総合管制システム，電子通信学会誌，62-8，870/877，（1979）
- [3] 高羽禎雄：経路誘導の手法とシステム，オペレーションズ・リサーチ，25-4，214/220（1980）
- [4] 川島弘尚，林 喜男，辻 紘良，高橋理一：経路誘導における予測システム，計測と制御，19-7，60/64（1980）
- [5] 広瀬登茂司，鈴木伸夫：都市における経路誘導システムの実験，オペレーションズ・リサーチ，25-4，221/227（1980）
- [6] 辻 紘良，高橋理一，川島弘尚，山本芽嗣：経路誘導システムにおける旅行時間の予測，オペレーションズ・リサーチ，25-4，228/234（1980）

- [7] 辻 紘良, 高橋理一, 川島弘尚: 誤差要因を考慮したときの経路誘導システムの性能及び効果の推定方法, 土木学会第34回年次学術講演会講演概要集, 第4部, 130/131 (1979)
- [8] 古村文伸: ハードウェア・シミュレータを用いた最適経路計算システム, オペレーションズ・リサーチ, 25-4, 235/241 (1980)
- [9] 辻 紘良, 鈴木雅博, 川島弘尚: 経路におけるアークコストの予測, 交通工学研究会発表論文集, 4, 65/67 (1978)
- [10] 小林文彦, 近藤 豪: 経路誘導システムの実用化に関する定量的評価, オペレーションズ・リサーチ, 25-4, 242/247 (1980)
- [11] G.E.D. Box & G.M. Jenkins: *Time Series Analysis - Forecasting and Control*, Revised Ed., Holden Day (1976)
- [12] M.M. Rao: Consistency and limit distributions of estimators in explosive stochastic difference equations, *Ann. Math. Statist.* 32, 195/218 (1961)
- [13] J.S. White: The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case I, *Ann. Math. Statist.* 29, 1188/1197 (1958)
- [14] M.M. Rao: Asymptotic distribution of an estimator

- of the boundary parameter of an unstable process, *Ann. Statist.* 6, 185/190 (1978)
- [15] D.P. Hasza & W.A. Fuller: Estimation for autoregressive processes with unit roots, *Ann. Statist.* 7, 1106/1120 (1979)
- [16] H. Kawashima: Parameter estimation of autoregressive integrated processes by least squares, *Ann. Statist.* 8, 423/435 (1980)
- [17] T.W. Anderson: Estimation for autoregressive moving average models in the time and frequency domains, *Ann. Statist.* 5, 842/865 (1977)
- [18] H. Kawashima: Parameter estimation of ARZMA processes, 10th JAACE Symposium on Stochastic Systems, 73/76 (1978)
- [19] D.H. Allen: The prediction sum of squares as a criterion for selecting predictor variables, Tech. Rep. 23, Department of Statistics, University of Kentucky (1971)
- [20] 川島弘尚: 改良 PSS による AR 型時系列の次数決定について, 第 11 回確率システムシンポジウム, 99/102 (1979)
- [21] 川島弘尚: AR 型時系列の次数決定について, 科研費シンポジウム - モデル解析の統計理論, 71/79 (1979)
- [22] 川島弘尚: 非定常過程のパラメータ推定, 計測自動制

御学会論文集 15, 41/46 (1979)

- [23] U. Grenander & M. Rosenblatt: *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, John Wiley & Sons. (1957)
- [24] 川島弘尚: 非定常入出力からの伝達関数の同定, 第12回確率システムシンポジウム, 47/50 (1980)

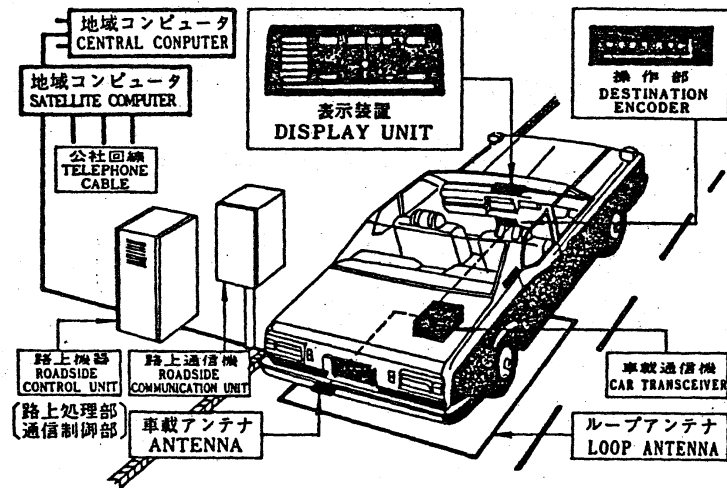


図1 径路誘導システム構成図

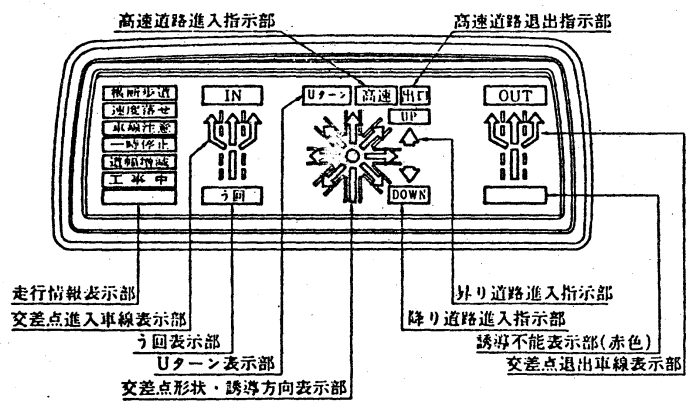


図2 径路誘導用車載機表示部 (プラズマ・ディスプレイ型)

10回階差の自己相関関数 $R(\tau)$

(神奈川2線→目黒郵便局 10月7日)

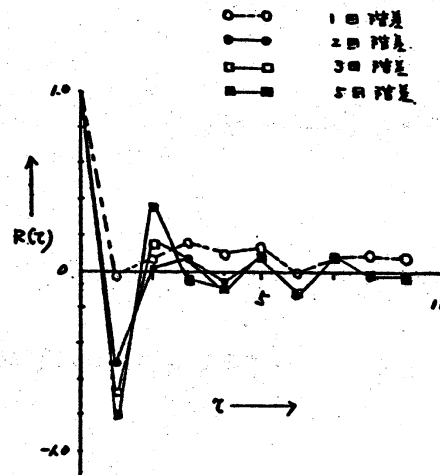


図5 階差の自己相関関数

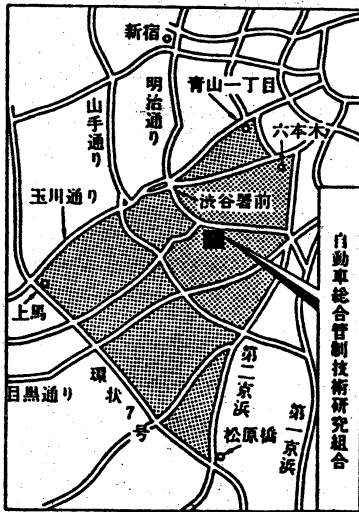


図3 パイロットエリア

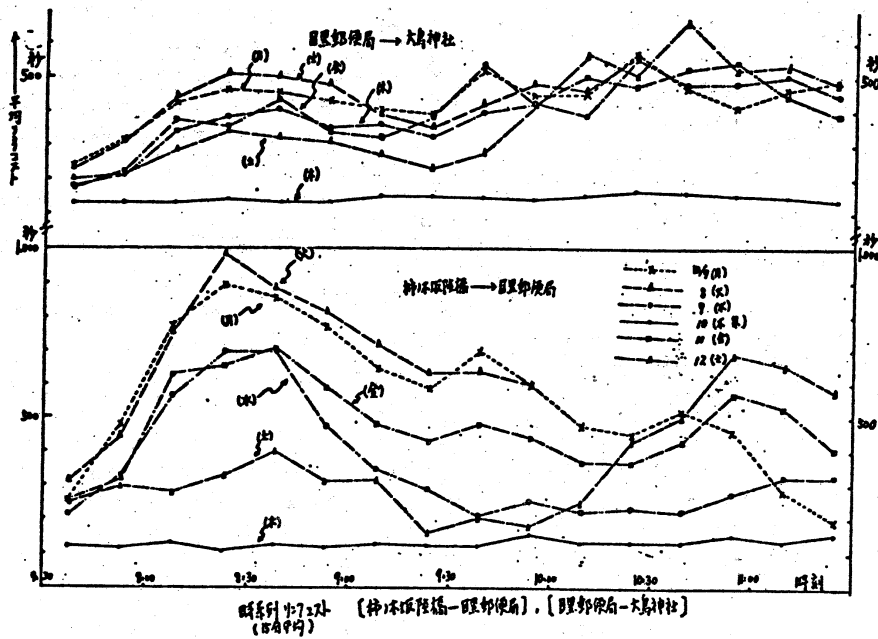


図4 旅行時間時系列 (1974年10月)

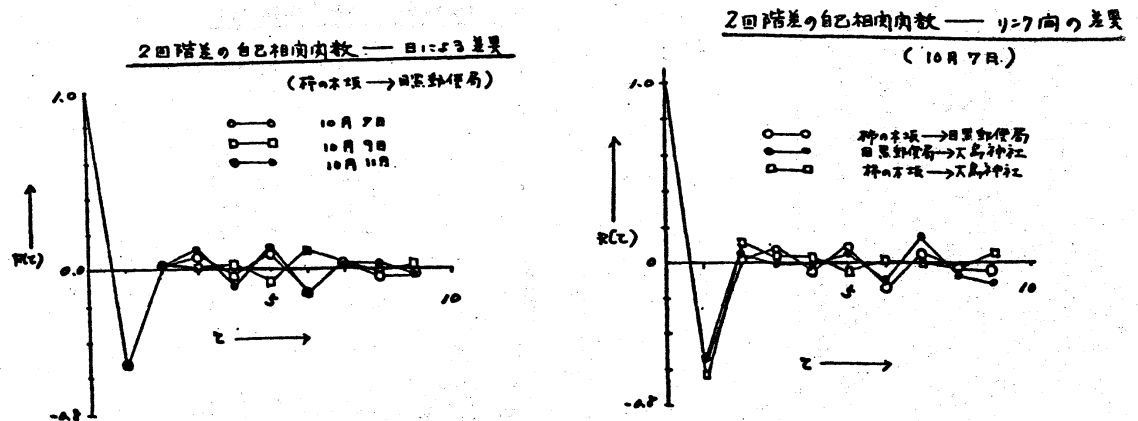


図6 2回階差の自己相関関数

項 目		内 容 ・ 規 模
誘導交差点数		一般道路70 首都高分岐等15
路上機設置数	経路誘導用	103
	走行情報用	5(オンライン) 10(オフライン)
	緊急情報用	9
	可変情報板用	3
	ミリ波通信用	1
通信アンテナ設置数	ループ	225か所(532レーン)
	フェライト・コイル	20か所(36レーン)
	漏洩同軸ケーブル	9地点(各400m)
	ホーン(ミリ波用)	1か所(2レーン)
車載機装着台数	経路誘導用	330台
	走行情報用	1,000台
	情報収集用	30台
	緊急情報用	
	ミリ波用	
全車両台数		1,330台
車両感知器		179
実験センター	電子計算機システム	NEAC 2200-375 1
		NEAC 3200-70 4
		HIDIC-350 1
		ミニコンピュータ 1
管 制 室	ウォールタイプディスプレイ	1式
	CRT	6

表1 パイロット実験の規模

主な実験項目	実 験 内 容
交通流データ収集	システム運転の基礎となる旅行時間データ、感知器・交通量データなど交通流データの収集を行う。
経路誘導サブシステム	経路誘導機能の確認 同じ目的地に向けて、経路誘導車と自由走行車を同時に出発させ、旅行時間を比較する。
	走行時間の推定／予測方法の評価 実測した旅行時間データを基にパイロット・システムに実装した走行時間を推定／予測する手法の評価を行う。
	ドライバー対システムのマン・マシンインタフェースの評価 車内誘導表示のわかりやすさ、使いやすさ、表示タイミング等を人間工学的に検討する。
走行情報サブシステム	ドライバーに対する有効性の評価 走行情報表示のわかりやすさ、表示項目の種類、表示方法等を検討する。
緊急情報サブシステム	交通情報放送の評価 車内放送文のわかりやすさ、放送時間等を評価する。
可変情報板サブシステム	情報板表示内容の伝達性の評価 情報板に表示した内容の見やすさ、わかりやすさ等を評価する。
システム調整	ソフトウェア、ハードウェアの改良。

表2 パイロット実験の概要

出発地 ↓ 目的地 (距離km)	走行種別	レース数		勝:敗	平均旅行 時(秒)
		総数	有効		
六本木二 ↓	勝 導	35	34	30:4	1774.3
	自 由 (一般ドライバー)				2064.7
神木坂 (9.3)	勝 導	19	12	8:4	1746.7
	自 由 (プロドライバー)				1811.3
上 馬 ↓	勝 導	32	32	26:5 1分	1652.8
	自 由 (一般ドライバー)				1871.9
白金二 (7.5)	勝 導	17	12	9:3	1665.7
	自 由 (プロドライバー)				1742.7
上 馬 ↓	勝 導	28	26	25:1	1238.9
	自 由 (一般ドライバー)				1528.1
天現寺 (7.0)	勝 導	15	12	8:4	1238.1
	自 由 (プロドライバー)				1353.9
大崎広小路 ↓	勝 導	27	24	22:2	1322.4
	自 由 (一般ドライバー)				1503.1
上 馬 (6.0)	勝 導	15	10	7:3	1334.6
	自 由 (プロドライバー)				1393.8
		計 188	計 162	勝 敗 135:26 1分	

表3 ハイロット突馬突 走行レースの結果.

$$(1-0.3B)X(T)=E(T)$$

IN=500

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N=100	MPSS	307	193	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	AIC	25	299	51	33	31	14	11	6	6	11	13
N=300	MPSS	24	475	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	AIC	0	357	63	23	12	8	14	7	7	3	6
N=500	MPSS	0	500	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	AIC	0	363	62	21	17	14	12	6	3	1	1

$$(1+0.3B)X(T)=E(T)$$

IN=500

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N=100	MPSS	344	154	2	0	0	0	0	0	0	0	0
	AIC	24	304	62	31	21	13	13	6	8	8	10
N=300	MPSS	29	471	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	AIC	0	359	54	34	11	9	10	7	9	3	4
N=500	MPSS	1	499	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	AIC	0	358	58	30	18	11	10	4	3	5	3

表9 シミュレーションの結果: 定常の場合
($\beta(N) = \log N$, $\sigma^2 = 1$, 試行500回)

$$(1+0.3B)(1-B)X(\tau)-E(\tau)$$

IN-250

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N=100	MPSS	0	195	55	0	0	0	0	0	0	0	0
N=300	MPSS	0	20	230	0	0	0	0	0	0	0	0
N=500	MPSS	0	2	248	0	0	0	0	0	0	0	0

$$(1+0.3B)(1-B)^2X(\tau)-E(\tau)$$

IN-250

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N=100	MPSS	0	0	176	74	0	0	0	0	0	0	0
N=300	MPSS	0	0	14	236	0	0	0	0	0	0	0
N=500	MPSS	0	0	1	249	0	0	0	0	0	0	0

表5 シミュレーション結果：非定常の場合

 $(\beta(N) = \log N, \sigma^2 = 1, \text{試行250回})$

$$(1-1.8B+0.9B^2)X(\tau)-E(\tau)$$

IN-250

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N=100	MPSS	0	0	249	1	0	0	0	0	0	0	0
N=300	MPSS	0	0	249	1	0	0	0	0	0	0	0
N=500	MPSS	0	0	250	0	0	0	0	0	0	0	0
	AIC	0	0	173	32	17	7	6	3	6	2	4

$$(1-1.8B+0.9B^2)(1-B)X(\tau)-E(\tau)$$

IN-250

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N=100	MPSS	0	0	0	249	1	0	0	0	0	0	0
N=300	MPSS	0	0	0	249	1	0	0	0	0	0	0
N=500	MPSS	0	0	0	250	0	0	0	0	0	0	0

$$(1-1.8B+0.9B^2)(1-B)^2X(\tau)-E(\tau)$$

IN-250

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N=100	MPSS	0	0	0	0	249	1	0	0	0	0	0
N=300	MPSS	0	0	0	0	250	0	0	0	0	0	0
N=500	MPSS	0	0	0	0	250	0	0	0	0	0	0

表6 シミュレーションの結果：定常と非定常

 $(\beta(N) = \log N, \sigma^2 = 1, \text{試行250回})$