

リ-球面上の解析汎函数

上智大 理工 森本 光生

$S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ を単位円周とする。 $L^2(S^1)$ で S^1 上の 2 乗可積分函数のなすヒルベルト空間を表わす。内積 ε , $(f, g)_{L^2(S^1)} = (f, \bar{g})_{S^1}$ とおく。 $(\ , \)_{S^1}$ は、次式で定義される双一次形式である。

$$(1) \quad (f, g)_{S^1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta.$$

$\mathcal{H}^{(m)}(S^1)$ で、指数函数 $e^{im\theta}$ で生成される $L^2(S^1)$ の $1 = \mathbb{R}$ 元部分空間を表わせば、ヒルベルト空間 $L^2(S^1)$ は、直和分解

$$(2) \quad L^2(S^1) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^{(m)}(S^1)$$

とし、 $L^2(S^1)$ より、 $\mathcal{H}^{(m)}(S^1)$ への直交射影は、

$$(3) \quad f(e^{i\theta}) \longmapsto c_m e^{im\theta}$$

で与えられる。 $\varepsilon = \varepsilon$

$$(4) \quad c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-im\theta} d\theta$$

は、 f の m -次のフーリエ成分である。

もう少し一般に, S^{n-1} を $n-1$ 次元の単位球面を表わす。
 $d\Omega_n$ で, S^{n-1} 上の不変測度, Ω_n で S^{n-1} の“面積”と表わす。 $L^2(S^{n-1})$ で, S^{n-1} 上の 2 乗可積分函数のなるヒルベルト空間を表わし, その内積を $(f, g)_{L^2(S^{n-1})} = (f, \bar{g})_{S^{n-1}}$ で表わす。ここで, $(\ , \)_{S^{n-1}}$ は, 次式で定義される双-次形式である。

$$(5) \quad (f, g)_{S^{n-1}} = \frac{1}{\Omega_n} \int_{S^{n-1}} f(\omega) \bar{g}(\omega) d\Omega_n(\omega).$$

$\mathcal{H}^k(S^{n-1})$ で, k -次球面調和函数のなる空間を表わせば, ヒルベルト空間 $L^2(S^{n-1})$ は, 次のように直和分解される。

$$(6) \quad L^2(S^{n-1}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}^k(S^{n-1}), \quad \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

(2) との関係は, 次の通りである。

$$\mathcal{H}^k(S^1) = \mathcal{H}^{(k)}(S^1) \oplus \mathcal{H}^{(-k)}(S^1), \quad k \neq 0.$$

さて, $L^2(S^{n-1})$ から, 直和成分 $\mathcal{H}^k(S^{n-1})$ への直交射影は,

$$(7) \quad f(\omega) \longmapsto S_k(f; \omega)$$

で与えられる。但し,

$$(8) \quad S_k(f; \omega) = \frac{N(n, k)}{\Omega_n} \int_{S^{n-1}} f(\tau) P_k(n; \langle \omega, \tau \rangle) d\Omega_n(\tau)$$

で, $N(n, k) = \dim \mathcal{H}^k(S^{n-1})$, $P_k(n; t)$ は, $n \geq k$

元 k -次のルジャンドル多項式である。

以上のことは、古典的であり、例えば、C. Müller: Spherical Harmonics, Lecture Notes in Math. 17 1966, Springer に、詳しく書かれている。

この講義では、 n -球面 Σ^n の場合と考察する。 n -球面 Σ^n は、

$$(9) \quad \Sigma^n = \{ e^{i\theta} \omega; \theta \in \mathbb{R}, \omega \in S^{n-1} \}$$

で定義される $\mathbb{C}^n$ 内のユークリッド集合で、実解析的多様体の構造をもっている。 $\Sigma^1 = S^1$ であり、 $\Sigma^2 \approx S^1 \times S^1$ である。 $L^2(\Sigma^n)$ で、 Σ^n 上の測度 $d\theta d\Omega_n(\omega)$ に関する 2乗可積分な函数のなすヒルベルト空間を表わし、その内積を、

$(f, g)_{L^2(\Sigma^n)} = (f, \bar{g})_{\Sigma^n}$ とおく。 $(\ , \)_{\Sigma^n}$ は次式で定義される双一次形式である。

$$(10) \quad (f, g)_{\Sigma^n} = \frac{1}{\pi \Omega_n} \int_0^{2\pi} \int_{S^{n-1}} f(e^{i\theta} \omega) \bar{g}(e^{i\theta} \omega) d\theta d\Omega_n(\omega).$$

いま、集合 $\Lambda \subseteq$

$$(11) \quad \Lambda = \{ (m, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+; m \equiv k \pmod{2} \}$$

とおき、 $(m, k) \in \Lambda$ に対し、

$$(12) \quad \mathcal{H}^{m, k}(\Sigma^n) = \{ e^{im\theta} S_k(\omega); S_k \in \mathcal{H}^k(S^{n-1}) \}$$

で、 $L^2(\Sigma^n)$ の有限次元部分空間と定義する。ヒルベルト空間 $L^2(\Sigma^n)$ は、次のように直和分解される。

$$(13) \quad L^2(\Sigma^n) = \bigoplus_{(m, k) \in \Lambda} \mathcal{H}^{m, k}(\Sigma^n).$$

$L^2(\Sigma^n)$ から $\mathcal{H}^{m,k}(\Sigma^n)$ への直交射影は,

$$(14) \quad f \longmapsto e^{im\theta} S_{m,k}(f; \omega),$$

$$(15) \quad S_{m,k}(f, \omega)$$

$$= \frac{N(n,k)}{\pi \Omega_n} \int_0^\pi \int_{S^{n-1}} f(e^{i\theta} \tau) e^{-im\theta} P_k(m; \langle \omega, \tau \rangle) d\theta d\Omega_n(\tau).$$

で与えられる. 函数 $S_{m,k}(f; \omega)$ は, (m, k) リー・球面調和成分 (略して, (m, k) -成分) と呼ばれる.

さて, $R > 1$ に対し,

$$(16) \quad K_{R,R}^\circ = \{z \in \mathbb{C}^n; R^{-1} < |z| < R\}$$

とおけば, $\{K_{R,R}^\circ; R > 1\}$ は, S^1 の複素近傍の基本系である. $\tilde{S}^{n-1}$ で, 複素球面を表わす. すなわち,

$$(17) \quad \tilde{S}^{n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n; z^2 = 1\},$$

ここで $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$ である. $\mathbb{C}^n$ 上のリー・ノルム $L(z)$ は, 次式で定義される.

$$(18) \quad L(z)^2 = \|z\|^2 + [\|z\|^4 - |z^2|^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$(\|z\|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2).$$

$L(z)$ は, $\mathbb{C}^n$ 上のノルムである. $R > 1$ に対し,

$$(19) \quad \tilde{S}^{n-1}(R) = \{z \in \tilde{S}^{n-1}; L(z) < R\}$$

とおけば $\{\tilde{S}^{n-1}(R); R > 1\}$ は, S^{n-1} の複素近傍の基本系をなすことが証明できる. リー・球面の複素近傍を定めるために, $R > 1$ に対し

$$(20) \quad \tilde{V}(R, R; R)$$

$$= \{ z \in \mathbb{C}^n; R^{-2} < |z|^2 < R^2, L(z)^2 < |z|^2 R^2 \}$$

とおく。 $\{ \tilde{V}(R, R; R); R > 1 \}$ が, リー球面 Σ^n の複素近傍の基本系となることから, S^1, S^{n-1} の場合の結果より, 証明できる。

$C^\infty(\Sigma^n)$ で, Σ^n 上の C^∞ 函数の全体, $\mathcal{O}(\Sigma^n)$ で, Σ^n 上の実解析的函数の全体を表わす。 $\mathcal{O}(\tilde{V}(R, R; R))$ で, $\mathbb{C}$ の開集合 $\tilde{V}(R, R; R)$ 上の整型函数の全体を表わす。通常のように, これらの空間に位相を入れ, 局所凸線形位相空間とする。なお, 次の連続な包含関係がある。

$$(21) \quad \mathcal{O}(\tilde{V}(R, R; R)) \hookrightarrow \mathcal{O}(\Sigma^n) \hookrightarrow C^\infty(\Sigma^n) \hookrightarrow L^2(\Sigma^n).$$

ここで, 右側の包含関係は, 制限写像により定義される。

$\mathcal{O}'(\Sigma^n)$ は Σ^n 上のシュワルツ超函数の空間 (すなわち, $C^\infty(\Sigma^n)$ の双対空間), $\mathcal{B}(\Sigma^n)$ は Σ^n 上の佐藤超函数の空間 (すなわち, $\mathcal{O}(\Sigma^n)$ の双対空間) を表わす。空間 $\mathcal{O}(\tilde{V}(R, R; R))$ の双対空間を, $\mathcal{O}'(\tilde{V}(R, R; R))$ とおき, その元を, 一般に, 解析汎函数という。(21) の双対写像により, 次の連続な包含関係が定義できる。

$$(22) \quad \mathcal{O}'(\tilde{V}(R, R; R)) \hookrightarrow \mathcal{B}(\Sigma^n) \hookrightarrow \mathcal{O}'(\Sigma^n) \hookrightarrow L^2(\Sigma^n).$$

解析汎函数 $f \in \mathcal{O}'(\tilde{V}(R, R; R))$ に対しても, (m, k) 成分 $S_{m, k}(f, \omega)$ が, (15) 式に類似の式で定義できる。

この講演の第1の主張は, (21) と (22) に表われたすべての函数 (あるいは超函数) 空間が, (m, k) 成分の振舞いによって特徴づけられるということである。結果をまとめれば次の表のようになる。(上から下へ, 函数空間は大きくなる。)

$$f \in \mathcal{O}(\tilde{V}(R, R; R)) \iff \limsup [\|S_{m,k}\|]^{1/(|m|+k)} \leq R^{-1}.$$

$$f \in \mathcal{A}(\Sigma^n) \iff \limsup [\|S_{m,k}\|]^{1/(|m|+k)} < 1$$

$$f \in C^\infty(\Sigma^n) \iff \|S_{m,k}\| \text{ は } \mathcal{L} \text{ 上で急減小}$$

$$f \in L^2(\Sigma^n) \iff \|S_{m,k}\| \in \ell^2(\mathcal{L})$$

$$f \in \mathcal{D}'(\Sigma^n) \iff \|S_{m,k}\| \text{ は } \mathcal{L} \text{ 上で緩増加}$$

$$f \in \mathcal{B}(\Sigma^n) \iff \limsup [\|S_{m,k}\|]^{1/(|m|+k)} \leq 1.$$

$$f \in \mathcal{O}'(\tilde{V}(R, R; R)) \iff \limsup [\|S_{m,k}\|]^{1/(|m|+k)} < R$$

ここで, $\limsup = \lim_{|m|+k \rightarrow \infty} \sup$ と略した。また,

$$\|S_{m,k}\| = \|S_{m,k}(f; \omega)\|_{L^2(S^{n-1})} \text{ である。}$$

Σ^n は, 4種の E. カルツンの古典領域 $\tilde{B}$ (リー球という) のシロフ境界となっている。そこで $\tilde{B}$ 上の整型函数と, Σ^n 上の超函数の間には, 密接な関係があると想像できる。最も簡単な場合 ($n=1$) よりはいめる。

単位円板 $\tilde{B}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 上の整型函数 $f(z)$ は, 佐藤超函数としてのトレース $T(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ をもつ。この T のフーリエ係数 c_m は,

$$(23) \quad C_m = 0 \quad m < 0$$

なる条件とみえる。逆に、条件(23)をみたす佐藤超函数 $T \in \mathcal{B}(S')$ に対して、一意的に整型函数 $\tilde{f}(z) \in \mathcal{O}(\tilde{B}')$ が存在し、そのトレースはもと超函数 T に一致する。この整型函数 $\tilde{f}$ は、コーシー積分公式によって表示される:

$$(24) \quad \tilde{f}(z) = (T(e^{i\theta}), (1 - e^{-i\theta}z)^{-1}),$$

ここで $(,)$ は $\mathcal{B}(S') \times \mathcal{Q}(S')$ 上の標準的内積を表わす。トレース作用素 $p: \mathcal{O}(\tilde{B}') \longrightarrow \mathcal{B}(S')$ によつて、 $\mathcal{O}(\tilde{B}')$ は $\mathcal{B}(S')$ の部分空間とみえることができる。

$\tilde{B}'[1] = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ で、単位円内板を表わし、その近傍に定義された整型函数の空間 $\mathcal{O}(\tilde{B}'[1])$ を考える。トレース作用素 p は、 $\mathcal{O}(\tilde{B}'[1])$ を $\mathcal{Q}(S')$ の中に1対1にうつす。コーシー積分(24)は、写像 $\gamma: f \longmapsto \tilde{f}$ を定め、 γ は $\mathcal{Q}(S')$ を $\mathcal{O}(\tilde{B}'[1])$ の上に写し、トレース写像 p の左逆(すなわち、 $\gamma \circ p = id$)である。双対写像 γ^* により $\mathcal{O}'(\tilde{B}'[1])$ は $\mathcal{B}(S')$ の部分空間と見なせる。超函数 $T \in \mathcal{B}(S')$ が、 $\gamma^* \mathcal{O}'(\tilde{B}'[1])$ に入るための必要十分条件は

$$(25) \quad C_m = 0 \quad m > 0$$

である。

以上に述べた $\tilde{B}'$ と $\tilde{B}'[1]$ と $S' = \Sigma'$ の関係が、高次

元でも成立する = と以下に示す。 リー球 $\tilde{B} = \tilde{B}^n$ と

$$(26) \quad \tilde{B} = \tilde{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n; L(z) < 1\}$$

で定める。 $z = z^0$ $L(z)$ は、 (18) である。

$\tilde{B}$ は、E-カルタンの 4 種の古典領域で、 Σ^n は $\tilde{B}^n$ のシロフ境界であることが知られている。例えば、L. H. Hua の教科書 *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in Classical Domains*, Moscow, 1959 を参照。

リー球 $\tilde{B}^n$ 上の整型函数 $f(z)$ は、 Σ^n 上に超函数の意味のトレース $T(e^{i\theta}\omega) \in \mathcal{B}(\Sigma^n)$ をもつ。このトレース T は、

$$(27) \quad S_{m,k}(T, \omega) = 0 \quad m < k$$

をみたす。逆に、もしも $T \in \mathcal{B}(\Sigma^n)$ が条件 (27) をみたせば、一意的に整型函数 $\tilde{f}(z) \in \mathcal{O}(\tilde{B}^n)$ が存在して、 T は $\tilde{f}$ のトレースになる。この整型函数 $\tilde{f}(z)$ は、コーシー・華 (Hua) の積分公式で表示される:

$$(28) \quad \tilde{f}(z) = (T(e^{i\theta}\omega), ((\omega - e^{-i\theta}z)^2)^{-1/2}),$$

ここで、 $(\cdot, \cdot)$ は $\mathcal{B}(\Sigma^n) \times \mathcal{Q}(\Sigma^n)$ 上の標準的双一次形式である。このようにして、トレース作用素 $\rho: \mathcal{O}(\tilde{B}^n) \rightarrow \mathcal{B}(\Sigma^n)$ を用いて、 $\mathcal{O}(\tilde{B}^n)$ を $\mathcal{B}(\Sigma^n)$ の部分空間と考えることが出来る。

$\tilde{B}^n[1] = \{z \in \mathbb{C}^n; L(z) \leq 1\}$ を閉リー球を表かし、整型

函数の芽の空間 $\mathcal{O}(\tilde{B}^n[1])$ を考える。このとき、トレス作用素 ρ は、 $\mathcal{O}(\tilde{B}^n[1])$ に対して $\mathcal{A}(\Sigma^n)$ の中にうつり、 $f \in \mathcal{A}(\Sigma^n)$ に対して $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{B}^n[1])$ をコーシー華の公式により定めれば、 $\gamma: f \mapsto \tilde{f}$ は ρ の左逆 ($\gamma \circ \rho = \text{id}$) である。故に、双対写像 $\gamma^*: \mathcal{O}'(\tilde{B}^n[1]) \rightarrow \mathcal{B}(\Sigma^n)$ は 1 対 1 である。そこで、 $T \in \mathcal{B}(\Sigma^n)$ が $\gamma^* \mathcal{O}'(\tilde{B}^n[1])$ に入るための必要条件は、

$$(29) \quad S_{m,k}(T; \omega) = 0 \quad m > -k$$

である。

以上、私が、リー球面上の函数あるいは超函数のフーリエ・球面調和展開に関して得た結果、4 種の古典領域の函数論の結果などの概略を述べた。詳しい証明は、Analytic Functionals on the Lie Sphere と題して、Tokyo J. Math. Vol. 3, No. 1 に発表の予定である。

また、この報告で述べたような結果は、他の型の古典領域に対しても証明できると思われる。これについては、これから考えていこうと思っている。

— 以上 —