

2つの可測ノルムが一致しない例についての 再考

原井 敬子 (Keiko Harai)

お茶の水女子大学 人間文化研究科

(Graduate School of Humanities and Sciences, Ochanomizu University)

1 準備

可測ノルム概念は, *Gross* によるものと *D.F.L. (Dudley – Feldman – LeCam)* によるものがある. これら二つの概念は, 一般のシリンダー測度に関しては同値ではない. この反例として, 今まで, ℓ^2 上にノルムとシリンダー測度を構成してきたが, ここでは, 少し一般化した例を紹介する.

この論文では, X を Banach 空間, X' を X の位相的 dual 空間とし, $(\cdot, \cdot)$ を X' と X の natural pairing とする. また, $\mathcal{B}(X)$ を X 上の Borel σ -algebra とする. H を実可分 Hilbert 空間, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H 上の内積, $FD(H)$ を H の有限次元部分空間全体, $\mathcal{F}$ を H 上の有限次元部分空間への直交射影の全体とする. また, I で恒等写像を表すことにする.

Z が, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in X', D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して, 次のように表されるとき, シリンダー集合という.

$$Z = \{x \in X; ((\xi_1, x), (\xi_2, x), \dots, (\xi_n, x)) \in D\}$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ を固定したときのシリンダー集合全体 $\mathcal{R}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}$ は σ -algebra になるが, シリンダー集合全体 $\mathcal{R}$ は σ -algebra になるとは限らない.

また, Hilbert 空間上のシリンダー集合は, 直交射影を使って次のように表すことができる.

$$Z = \{x \in H; Px \in F\} \quad (P \in \mathcal{F}, F \in \mathcal{B}(PH))$$

次にシリンダー測度を定義する.

Definition 1.1 (シリンダー測度) $\mathcal{R}$ 上に定義された関数 μ が次の条件を満たすとき, シリンダー測度であるという.

- (i) $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$
- (ii) μ の $\mathcal{R}_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}$ への制限は確率測度

次に Hilbert 空間上で重要な役割を果たす Gauss シリンダー測度を定義する.

Definition 1.2 (Gauss シリンダー測度) 集合関数 $\gamma : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ が次のような形で表されるとき, Gauss シリンダー測度であるという.

$$\gamma(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_F e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$$

ただし, $Z = \{x \in H; Px \in F\}$, $n = \dim PH$, dx は PH 上の Lebesgue 測度とする.

無限次元 Hilbert 空間上では, Gauss シリンダー測度 γ は可算加法的測度ではない.

次に, 可測ノルムの定義をする.

Definition 1.3 (Gross の可測ノルム) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $P_0 \in \mathcal{F}$ が存在して,
 $P \perp P_0$ となるどんな $P \in \mathcal{F}$ に対しても,

$$\mu(\{x \in H; \|Px\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

が成り立つとき, $\|\cdot\|$ は μ -(G) 可測であるという.

上の定義は次のように書きかえることができる.

$\|\cdot\|$ は μ -(G) 可測

$\Longleftrightarrow$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $G \in FD(H)$ が存在して, $F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても,

$$\mu(\{N_\varepsilon \cap F + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

ただし, $N_\varepsilon = \{x \in H; \|x\| \leq \varepsilon\}$, $F^\perp$ は F の直交補空間とする.

Definition 1.4 (D.F.L. の可測ノルム) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $G \in FD(H)$ が存在して, $F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても,

$$\mu(\{P_F(N_\varepsilon) + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つとき, $\|\cdot\|$ は μ -(G) 可測であるという.

ただし, P_F は H から F への直交射影とする.

2 2つの可測ノルムが一致しない例

今まで, Gross と Dudley-Feldman-LeCam らの2つの可測ノルムが一致しない例として, 具体的にシリンダー測度とノルムを構成してきたが, ここでは, これらを少し一般化した形を紹介する.

まず, シリンダー測度を構成する.

測度の構成

$(\ell^2)^*$ を弱位相 $\sigma((\ell^2)^*, \ell^2)$ をもった ℓ^2 の代数的双対空間, $\mathcal{J} : \{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ を含む ℓ^2 の代数的基, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ とする. また, $(\cdot, \cdot) : (\ell^2)^* \times \ell^2$ の natural pairing とする.

$(a, e_n) = a_n$, $n = 1, 2, \dots$ かつ $(a, e_\alpha) = 0$, $e_\alpha \in \mathcal{J} \setminus \{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ かつ すべての n に対して $|a_n| > C$ を満たす $a \in (\ell^2)^*$ をとる.

このとき得られる $(\ell^2)^*$ 上の Dirac 測度 δ_a によって導入される ℓ^2 上のシリンダー測度を μ_a とする.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \ell^2$, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$Z = \{x \in (\ell^2)^*; (x, \xi_1), (x, \xi_2), \dots, (x, \xi_n) \in D\}$

$\tilde{Z} = \{x \in \ell^2; (\langle x, \xi_1 \rangle, \langle x, \xi_2 \rangle, \dots, \langle x, \xi_n \rangle) \in D\}$

とおくと, $\mu_a(\tilde{Z}) = \delta_a(Z)$

次に、シリンダー測度を構成するとき用いた a_n を用いて、ノルムを構成する。
ノルムの構成

$\{\beta_n\}$ を次を満たす非負実数列とする。

$$\beta_{2m} = 0,$$

$$\beta_{2m-1} : \text{正の単調増加列}$$

$$\beta_{2m-1} \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty)$$

また、 Γ を $\{\pm\beta_n(a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n); n = 1, 2, \dots\}$ の convex hull とする。ただし、 $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < M$ とする。

また、 B を ℓ^2 上の開単位球として、 $U = \Gamma + B$ とおき、 $\|\cdot\|$ を U の gauge として定義する。

このとき、次の性質が成り立つ。

Proposition 2.1 $\|\cdot\|$ は μ_a -(D) 可測である。

(証明)

E を $\|\cdot\|$ に関する ℓ^2 の完備化とし、 j を $\ell^2 \hookrightarrow E$ の inclusion mapping, j' を j の dual operator とする。

$$E' \xrightarrow{j'} (\ell^2)' \simeq \ell^2 \xrightarrow{j} E$$

また、 $(\cdot, \cdot)_E$ を $E' \times E \rightarrow \mathbb{R}$ の natural pairing とする。

$\|\cdot\|$ が μ_a -(D) measurable であることを示すには、 $j(\mu_a)$ が $(E, \mathcal{C}_E)$ 上で、 σ -additive であることを示せばよい。

まず、 a vanishes on $j'(E')$ を示す。

各 $y \in E'$ に対して、 $(a, j'(y)) = 0$ を示す。

すべての $e_\alpha \in \mathcal{J} \setminus \{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ に対して、 $(a, e_\alpha) = 0$ なので、 $j'(y)$ が $j'(y) = \sum_{n=1}^N A_n e_n$ ($A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}$) の形のみ考えればよい。

ℓ^2 上の列 $\{x^m\}_{m=1,2,\dots}$ を次のように定義する。

$$x^1 = a_1 e_1,$$

$$x^2 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

$$\vdots$$

$$x^m = a_1 e_1 + \dots + a_{2m-1} e_{2m-1},$$

$$\vdots$$

$m \geq (k+1)/2$ のとき、 $\langle e_k, x^m \rangle = a_k$ なので、

すべての $m \geq N$ に対して、 $\langle j'(y), x^m \rangle = \sum_{n=1}^N a_n A_n$.

さらに, $\langle j'(y), x^m \rangle = (y, j(x^m))_E$ なので,
 すべての $m \geq N$ に対して, $(y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^N a_n A_n$. よって,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^N a_n A_n. \quad (1)$$

$\{\beta_{2m-1}\}$ と U の構成より, $\beta_{2m-1} x^m \in U$. よって, $\|x^m\| \leq 1/\beta_{2m-1}$.
 仮定より, $\beta_{2m-1} \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow \infty$) なので, $\|x^m\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). それゆえに,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j(x^m) = 0 \text{ in } E. \quad (2)$$

(1) と (2) より, $\sum_{n=1}^N a_n A_n = 0$ なので, $(a, j'(y)) = \sum_{n=1}^N a_n A_n = 0$.
 i を $(\ell^2)^*$ から $(E')^*$ への canonical mapping とすると, $i(a) = 0$ なので, $i(\delta_a)$ は $(E')^*$ 上の Dirac measure δ_0 となる. よって, $j(\mu_a)$ は E 上の δ_0 に拡張できる. つまり, $(E, \mathcal{C}_E)$ 上 σ -additive である.

□

Proposition 2.2 $\|\cdot\|$ は μ_a -(G) 可測でない.

(証明)

$\|\cdot\|$ が μ_a -(G) 可測でないことを示すには,
 ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $G \in FD(\ell^2)$ に対して

$$\exists F \in FD(\ell^2), F \perp G \quad (3)$$

$$\mu_a(\varepsilon_0 U \cap F + F^\perp) = 0.$$

となることを示せばよい.

$0 < \varepsilon_0 < \frac{C}{2(M+1)}$ とする.

G を ℓ^2 の任意の有限次元部分空間として, $\{\xi^j\}_{j=1,2,\dots,n}$ を G の正規直交基底とすると,

$$\xi^j = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^j e_i \quad (\alpha_i^j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots).$$

次のような行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 & \dots & \alpha_{n+m}^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n & \dots & \alpha_{n+m}^n \end{pmatrix}$$

m は $\text{rank } A = n$ となるように選ぶ.
 $N > n + m$ とすると,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{2N+1}^1 \\ \vdots \\ -\alpha_{2N+1}^n \end{pmatrix} \quad (4)$$

は $\mathbb{R}^{n+m}$ 上で解を持つ.

$\xi^j \in \ell^2$ なので, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $\alpha_i^j \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). それゆえに, 任意の $\delta > 0$ に対し, 次を満たす十分大きな $N (> n + m)$ を選べる.

(4) の解 $x_1 = \eta_1, \dots, x_{n+m} = \eta_{n+m}$ が,

$$\max_{1 \leq l \leq n+m} |\eta_l| < \delta. \quad (5)$$

(5) において, $\delta > 0$ を次を満たすようにとる.

$$\frac{a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_{n+m} \eta_{n+m} + a_{2N+1}}{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{n+m}^2 + 1} > \frac{C}{2}$$

$$\tau = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{n+m} e_{n+m} + e_{2N+1}$$

F を τ によって生成される ℓ^2 の 1 次元部分空間とすると, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle \tau, \xi^j \rangle &= \langle \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{n+m} e_{n+m} + e_{2N+1}, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^j e_i \rangle \\ &= \alpha_1^j \eta_1 + \dots + \alpha_{n+m}^j \eta_{n+m} + \alpha_{2N+1}^j \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, $F \perp G$.

$\phi = \frac{\tau}{|\tau|}$ とおくと,

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \phi) &= \frac{(\mathbf{a}, \tau)}{|\tau|} \\ &= \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \dots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{(\eta_1^2 + \dots + \eta_{n+m}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

(3) を示すために, $\phi(\mu_{\mathbf{a}}) = \delta_{(\mathbf{a}, \phi)}$ なので, $(\mathbf{a}, \phi)\phi \notin \varepsilon_0 U$ を示せばよい.

$(\mathbf{a}, \phi)\phi \in \varepsilon_0 U$ と仮定すると, $(\mathbf{a}, \phi)\phi = X + Y$ ($X \in \varepsilon_0 \Gamma$, $Y \in \varepsilon_0 B$).

$X, Y \in \ell^2$ なので, $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i e_i$ ($X_i, Y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$).

$(\mathbf{a}, \phi)\phi = \sum_{i=1}^{\infty} (X_i + Y_i) e_i$. (6) より

$$X_{2N} + Y_{2N} = 0$$

$$X_{2N+1} + Y_{2N+1} = \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \dots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{\eta_1^2 + \dots + \eta_{n+m}^2 + 1} > \frac{C}{2}.$$

さらに, $\varepsilon_0 \Gamma$ の性質より,

$$|X_{2N+1}| : |X_{2N}| = |a_{2N+1}| : |a_{2N}| \text{ なので, } |X_{2N+1}| = \left| \frac{a_{2N+1}}{a_{2N}} \right| |X_{2N}|.$$

$\varepsilon_0 B$ の性質より, $|Y_{2N}| < \varepsilon_0$, $|Y_{2N+1}| < \varepsilon_0$.

よって,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \dots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{\eta_1^2 + \dots + \eta_{n+m}^2 + 1} - Y_{2N+1} \right| &= |X_{2N+1}| \\ &= \left| \frac{a_{2N+1}}{a_{2N}} \right| |X_{2N}| \\ &= \left| \frac{a_{2N+1}}{a_{2N}} \right| |Y_{2N}| \\ &< \left| \frac{a_{2N+1}}{a_{2N}} \right| \varepsilon_0 \\ &< M \varepsilon_0 \\ &< \frac{MC}{2(M+1)}. \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \dots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{\eta_1^2 + \dots + \eta_{n+m}^2 + 1} - Y_{2N+1} \right| &> \frac{C}{2} - \varepsilon_0 \\ &> \frac{MC}{2(M+1)}. \end{aligned}$$

となり、矛盾する.

□

今度は、シリンダー測度を構成したときに用いた a_n とは異なる b_n を使ってノルムを構成する.

ノルムの構成

$\{\beta_n\}$ を次を満たす非負実数列とする.

$$\beta_{2m} = 0,$$

$$\beta_{2m-1} : \text{正の単調増加列}$$

$$\beta_{2m-1} \rightarrow \infty \quad (m \rightarrow \infty)$$

また、 Γ を $\{\pm\beta_n(b_1e_1 + b_2e_2 + \dots + a_ne_n); n = 1, 2, \dots\}$ の convex hull とする. ただし、 $|\frac{b_{n+1}}{b_n}| < M$ とする.

また、 B を ℓ^2 上の開単位球として、 $U = \Gamma + B$ とおき、 $\|\cdot\|$ を U の gauge として定義する.

このとき、次の性質が得られる.

Theorem 2.3 $a_n = Cb_n$ ($C \in \mathbb{R}$) のとき、 $\|\cdot\|$ は μ_a -(D) 可測である.

(証明)

E を $\|\cdot\|$ に関する ℓ^2 の完備化とし、 j を $\ell^2 \hookrightarrow E$ の inclusion mapping, j' を j の dual operator とする.

$$E' \xrightarrow{j'} (\ell^2)' \simeq \ell^2 \xrightarrow{j} E$$

また、 $(\cdot, \cdot)_E$ を $E' \times E \rightarrow \mathbb{R}$ の natural pairing とする.

$\|\cdot\|$ が μ_a -(D)measurable であることを示すには、 $j(\mu_a)$ が $(E, \mathcal{C}_E)$ 上で、 σ -additive であることを示せばよい.

まず、 a vanishes on $j'(E')$ を示す.

各 $y \in E'$ に対して、 $(a, j'(y)) = 0$ を示す.

すべての $e_\alpha \in \mathcal{J} \setminus \{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ に対して、 $(a, e_\alpha) = 0$ なので、 $j'(y)$ が $j'(y) = \sum_{n=1}^N A_n e_n$ ($A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}$) の形のみ考えればよい.

ℓ^2 上の列 $\{x^m\}_{m=1,2,\dots}$ を次のように定義する.

$$x^1 = b_1 e_1,$$

$$x^2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x^m &= b_1 e_1 + \dots + b_{2m-1} e_{2m-1}, \\ & \vdots \end{aligned}$$

$m \geq (k+1)/2$ のとき, $\langle e_k, x^m \rangle = b_k$ なので,

すべての $m \geq N$ に対して, $\langle j'(y), x^m \rangle = \sum_{n=1}^N b_n A_n$.

さらに, $\langle j'(y), x^m \rangle = (y, j(x^m))_E$ なので,

すべての $m \geq N$ に対して, $(y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^N b_n A_n$. よって,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^N b_n A_n. \quad (6)$$

$\{\beta_{2m-1}\}$ と U の構成より, $\beta_{2m-1} x^m \in U$. よって, $\|x^m\| \leq 1/\beta_{2m-1}$.

仮定より, $\beta_{2m-1} \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow \infty$) なので, $\|x^m\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). それゆえに,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j(x^m) = 0 \text{ in } E. \quad (7)$$

(6) と (7) より, $\sum_{n=1}^N b_n A_n = 0$ なので, $(a, j'(y)) = \sum_{n=1}^N a_n A_n = \sum_{n=1}^N C b_n A_n = C \sum_{n=1}^N b_n A_n = 0$.

i を $(\ell^2)^*$ から $(E')^*$ への canonical mapping とすると, $i(a) = 0$ なので, $i(\delta_a)$ は $(E')^*$ 上の Dirac measure δ_0 となる. よって, $j(\mu_a)$ は E 上の δ_0 に拡張できる. つまり, $(E, \mathcal{C}_E)$ 上 σ -additive である.

□

Theorem 2.4 $\|\cdot\|$ は μ_a -(G) 可測でない.

(証明)

$\|\cdot\|$ が μ_a -(G) 可測でないことを示すには,

ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $G \in FD(\ell^2)$ に対して

$$\exists F \in FD(\ell^2), F \perp G \quad (8)$$

$$\mu_a(\varepsilon_0 U \cap F + F^\perp) = 0.$$

となることを示せばよい.

$0 < \varepsilon_0 < \frac{C}{2(M+1)}$ とする.

G を ℓ^2 の任意の有限次元部分空間として, $\{\xi^j\}_{j=1,2,\dots,n}$ を G の正規直交基底とすると,

$$\xi^j = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^j e_i \quad (\alpha_i^j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots).$$

次のような行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 & \dots & \alpha_{n+m}^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n & \dots & \alpha_{n+m}^n \end{pmatrix}$$

m は $\text{rank } A = n$ となるように選ぶ.

$N > n + m$ とすると,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{2N+1}^1 \\ \vdots \\ -\alpha_{2N+1}^n \end{pmatrix} \quad (9)$$

は $\mathbb{R}^{n+m}$ 上で解を持つ.

$\xi^j \in \ell^2$ なので, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $\alpha_i^j \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). それゆえに, 任意の $\delta > 0$ に対し, 次を満たす十分大きな $N(> n + m)$ を選べる.

(9) の解 $x_1 = \eta_1, \dots, x_{n+m} = \eta_{n+m}$ が,

$$\max_{1 \leq l \leq n+m} |\eta_l| < \delta. \quad (10)$$

(10) において, $\delta > 0$ を次を満たすようにとる.

$$\frac{a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_{n+m} \eta_{n+m} + a_{2m+1}}{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{n+m}^2 + 1} > \frac{C}{2}$$

$$\tau = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{n+m} e_{n+m} + e_{2N+1}$$

F を τ によって生成される ℓ^2 の 1 次元部分空間とすると, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して,

$$\langle \tau, \xi^j \rangle = \langle \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{n+m} e_{n+m} + e_{2N+1}, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^j e_i \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1^j \eta_1 + \dots + \alpha_{n+m}^j \eta_{n+m} + \alpha_{2N+1}^j \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって, $F \perp G$.

$\phi = \frac{\tau}{|\tau|}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}, \phi) &= \frac{(\mathbf{a}, \tau)}{|\tau|} \\
&= \frac{a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_{n+m} \eta_{n+m} + a_{2N+1}}{(\eta_1^2 + \dots + \eta_{n+m}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

(8) を示すために, $\phi(\mu_{\mathbf{a}}) = \delta_{(\mathbf{a}, \phi)}$ なので, $(\mathbf{a}, \phi)\phi \notin \varepsilon_0 U$ を示せばよい.

$(\mathbf{a}, \phi)\phi \in \varepsilon_0 U$ と仮定すると, $(\mathbf{a}, \phi)\phi = X + Y$ ($X \in \varepsilon_0 \Gamma$, $Y \in \varepsilon_0 B$).

$X, Y \in \ell^2$ なので, $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i e_i$ ($X_i, Y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$).

$(\mathbf{a}, \phi)\phi = \sum_{i=1}^{\infty} (X_i + Y_i) e_i$. (6) より

$$X_{2N} + Y_{2N} = 0$$

$$X_{2N+1} + Y_{2N+1} = \frac{a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_{n+m} \eta_{n+m} + a_{2N+1}}{\eta_1^2 + \dots + \eta_{n+m}^2 + 1} > \frac{C}{2}.$$

さらに, $\varepsilon_0 \Gamma$ の性質より,

$$|X_{2N+1}| : |X_{2N}| = |b_{2N+1}| : |b_{2N}| \text{ なので, } |X_{2N+1}| = \left| \frac{b_{2N+1}}{b_{2N}} \right| |X_{2N}|.$$

$\varepsilon_0 B$ の性質より, $|Y_{2N}| < \varepsilon_0$, $|Y_{2N+1}| < \varepsilon_0$.

よって,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_{n+m} \eta_{n+m} + a_{2N+1}}{\eta_1^2 + \dots + \eta_{n+m}^2 + 1} - Y_{2N+1} \right| &= |X_{2N+1}| \\
&= \left| \frac{b_{2N+1}}{b_{2N}} \right| |X_{2N}| \\
&= \left| \frac{b_{2N+1}}{b_{2N}} \right| |Y_{2N}| \\
&< \left| \frac{b_{2N+1}}{b_{2N}} \right| \varepsilon_0 \\
&< M \varepsilon_0 \\
&< \frac{MC}{2(M+1)}.
\end{aligned}$$

一方,

$$\left| \frac{a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + \dots + a_{n+m} \eta_{n+m} + a_{2N+1}}{\eta_1^2 + \dots + \eta_{n+m}^2 + 1} - Y_{2N+1} \right| > \frac{C}{2} - \varepsilon_0$$

$$> \frac{MC}{2(M+1)}$$

となり, 矛盾する.

□

参考文献

- [1] A. Badrikian and S. Chevet, *Measures Cylindriques, Espaces de Wiener et Fonctions Aléatoires Gaussiennes*, Lecture Notes in Math. 379, 1974.
- [2] P. Baxendale, *Gaussian Measures on Function Spaces*, Amer. J. Math. 98(1976), 891-952.
- [3] R.M. Dudley, J. Feldman, and L. LeCam, *On semi-norms and probabilities, and abstract Wiener Spaces*, Ann. of Math. 93(1971), 390-408.
- [4] F. Gong, *A note on generalized Gross and Minlos Theorems*, Dirichet forms and stochastic process (Beijing,1993) 171-173, de Gruyter, Berlin, 1995.
- [5] L. Gross, *Measurable functions on Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. 105(1962), 372-390.
- [6] L. Gross, *Abstract Wiener space*, Proc. 5th. Berkeley sym. Math. Stat. Prob. 2(1965), 31-42.
- [7] L. Gross, *Abstract Wiener Measurable and Infinite Dimensional Potential Theory*, Lecture Notes in Math. 140(1970), 84-116.
- [8] S. Kwapień and B. Szymanski, *Some remarks on Gaussian measure in Banach spaces*, Probab.Math Satis. Vol.1(1980), 59-65.
- [9] H.H. Kuo, *Gaussian Measures in Banach Spaces*, Lecture Notes in Math.463, 1975.
- [10] K. Harai, *Measurable norms and Related conditions in some examples*, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. vol.54 No.1.(2003), 1-7.

- [11] K. Harai, *The correction of "Measurable norms and Related conditions in some examples"*, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. vol.54 No.2.(2003), 11.
- [12] W. Linde, *Probability in Banach space-stable and infinitely Divisible Distribution*,
- [13] M. Maeda, *Measurable norms and rotationally quasi-invariant cylindrical measures*, Hokkaido. Math. J. Vol.XXI No.1(1983), 14-25.
- [14] M. Maeda, *Rotationally invariant cylindrical measures I*, Kodai. Math. J. 6(1983), 12-25.
- [15] M. Maeda, *Some examples of measurable norms*, J. Math. Anal. Appl. 98(1984),158-165.
- [16] M. Maeda, *Generalized rotationally quasi-invariant cylindrical measures*, J. Math. Anal. Appl. 114(1986), 100-110.
- [17] M. Maeda, K. Harai and R. Hagihara, *Some examples and connection between cylindrical measures and measurable norms*, J. Math. Anal. Appl.288(2003), 556-564.
- [18] M. Maeda, K. Harai and M. Shibuya, *Some remarks on seven conditions approximating to measurable norms*, Sci. Math. Jpn. 59, No.3(2004), 495-504.
- [19] R.A. Minlos, *Generalized random processes and their extension in measure*, Trudy. Moskov. Math. obšč. 8(1959),497-518.
- [20] Yu.V. Prokhorov, *Convergence for random processes and limit theorems in Probability theory*, Teor. Veroj. i prim. 1(1956),177-238.
- [21] Yu.V. Prokhorov, *The method of characteristic functionals*, Proc. 4th. Berkeley sym. Math Stat. Prob. (1961), 403-419.
- [22] V.V. Sazonov, *A remark on characteristic functionals*, Teor. Veroj. i prim. 3(1958), 201-205.
- [23] L. Schwartz, *Radon measures on arbitrary topological space and cylindrical measures*, 1973.

- [24] L. Schwartz, *Geometry and probability in Banach spaces*, Lecture Notes in Math. 852, 1981.
- [25] V.I. Tarieladze, *On nuclear covariance operator*, Lecture Notes in Math. 828, 1980.
- [26] A. Takizawa, *The comparsion between Kuo's definition and Baxendale's on Gauss cylindrical measures*, Master thesis in Japanese, 2004.
- [27] Y. Yamasaki, *Measures on infinite dimensional spaces*, Kinokuniya, 1978, in Japanese.
- [28] J.A. Yan, *Generalizations of Gross' and Minlos' Theorems*, Lecture Notes in Math. 1372, Springer-Verlag, Berlin, (1989), 395-404.