

Cayley 樹と自己複製スピン模型

九大理 松田博嗣

生物の特徴の一つは自己複製能をもつ DNA の存在である。DNA は base sequence (BS) によって特徴づけられる。複製によって DNA に親子関係が生じ、親子の DNA の BS はほぼ同一であるが、或確率で互に異なる。このような一般的性質をもつ系の特質を調べる第一歩として、次のようなモデル DNA を考える。

DNA の BS は (σ_1, σ_2) [$\sigma_\alpha = \pm 1, \alpha = 1, 2$] によって特徴づけられ、各 DNA はその BS によらず、平均 z 個の子を次の世代に残すとする。親子が異なる σ_α をもつ確率は互に独立に q ($\ll 1$) であるとする。この親子関係をボンドで表わすと、このような (σ_1, σ_2) の組は Cayley 樹上の vertex に 2 つのスピンをもつ Ising モデルとなる。

さて、 $2n$ 親等距った 2 個体 i, j の σ_α をそれぞれ $\sigma_\alpha^{(i)}, \sigma_\alpha^{(j)}$ とし、 $\sigma_\alpha^{(i)} \sigma_\alpha^{(j)} \equiv \tau_\alpha^{(ij)}$ とするとき、 $\tau_\alpha = \tau$ ($= \pm 1$) となる確率は

$$P_\tau(n) = \frac{1}{2} (1 + \tau A^{2n}), \quad (A \equiv 1 - 2q) \quad (1)$$

となる。1 つの DNA の N 世代目の子孫の DNA の集団から、任意に 2 つの DNA k, ℓ を抽出したとき、 $\tau_1^{(k\ell)} = \tau_1$ なる条件下で、 $\tau_2^{(k\ell)} = \tau_2$ である確率を $P(\tau_2 | \tau_1)$ とする。 $P(\tau_2 | \tau_1)$ は τ_1 に顕著に依存するであろうか？ すなわち、ここで考えるような形で、1 つの祖先から拡がってきた子孫の集団において 1 つの点 (σ_1) に着目して共通の者同志は、他の点 (σ_2) に着目しても共通である事が多いと云えるかどうかを調べてみる。

この答は次の通りである。

$$P(\tau_2 | \tau_1) = \frac{1}{2} \left[1 + \tau_2 f(N, A) \right] \left[1 + \tau_1 \tau_2 \frac{f(N, A^2) - f(N, A)^2}{\{1 + \tau_1 f(N, A)\} \{1 + \tau_2 f(N, A)\}} \right] \quad (2)$$

ただし、

$$f(N, A) \equiv \frac{(z-1)\{(zA)^N - 1\}A}{(z^N - 1)(zA - 1)} \quad (3)$$

である。いま, $(zA^2)^N \gg 1$ とすると,

$$f(N, A^2) - f(N, A)^2 \simeq \frac{z(z-1)(1-A)^2 A^{2(N+1)}}{(zA^2 - 1)(zA - 1)^2} > 0$$

となり, (2) より $\tau_1 \tau_2$ は互に正の相関をもつことが判る。ただし $0 < 1-A = 2q \ll 1$ であるから, $z \simeq 1$ でない場合はこの相関は弱い。

$$z \simeq 1 \text{ のとき, } y \equiv 2q/(z-1), \quad (y < \frac{1}{2})$$

とすると,

$$f(N, A^2) - f(N, A)^2 \simeq \frac{z y^2}{(1-2y)(1-y)^2} A^{2(N+1)}$$

となるので, $y \simeq \frac{1}{2}$, すなわち $z \simeq 1+4q$ の場合に限って, τ_1 と τ_2 は著しい相関をもち得ることが判る。

不規則 Bethe 格子の局在電子状態

九大・理・生物 石 井 一 成

Abou-Chakra, Anderson, Thouless の Self-consistent Theory of Localization [1] が Bethe 格子については厳密な理論であると主張されているので, その大要を批判的に紹介した。彼らの結論によると, 配位数 z の Bethe 格子における Anderson 模型 (最近接格子点間のみに transfer energy V をもち, site energy ϵ_n は互いに独立な確率変数で, W の一様分布をする tight binding