

Symbolic Dynamics について

東教大 理 伊藤 俊次

§ 1 序

まず Symbolic dynamics (X, σ) を次のように定義しよう。
 $A = \{1, 2, \dots, S\}$ は symbol の空間, $A^{\mathbb{Z}}$ は A の可算直積とし,
 topology は discrete top の product top を入れたものとする。 $A^{\mathbb{Z}}$ の元 ω
 は

$$\omega = (\dots, \omega(-1), \omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n), \dots) \quad \omega(n) \in A$$

と書くことにする。 $A^{\mathbb{Z}}$ 上の shift transformation σ は

$$(\sigma\omega)(n) = \omega(n+1) \quad \omega \in A^{\mathbb{Z}}$$

のこととする。このとき Symbolic dynamics (X, σ) とは
 X が $A^{\mathbb{Z}}$ の subset であり $\sigma X = X$ であるものとする。(以後
 簡単のため Symbolic dynamics のことは S.D. と書くことにす
 る)。

又 M は manifold, T は M 上の diffeomorphism とするとき,
 (M, T) は Differential dynamical system (以後 D.D.S.
 と書く) と呼ぶ。

D.D.S. (M, T) が与えられるとき, それに対応する S.D.

(X, σ) とは, M の subset $N \ni TN = N$ と π が存在して,

さらに N から X への 1 to 1 map $\varphi: N \rightarrow X$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{T} & N \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

と π が存在することをいう。

Symbolic dynamics とは, σ Differential dynamical system と解析する。これは, 厂史的に多くの成果を挙げている。

Morse, Hedlund, Birkhoff 等は, 2-dim constant negative curvature 上の geodesic curve を見て, periodic point が存在するか, 又存在すれば dense に存在するか, 等の問題について, fundamental domain の boundary を Symbol とし, curve を t 時間 t 後の boundary と cross する Symbol を count し, この symbol の sequence と curve と対応付けることを示した。上記の問題について解答を与えた。最近の Smale の "horse shoe" の概念は Differential dynamical system の Symbolic dynamics への表現の好例である。 ("horse shoe" の制限された問題への応用は丹羽氏の講演参照)

$D.D.S. (M, T)$ を見て Symbolic dynamics と対応させるとき, 次のような M の分割 $E = \{p_i\}_{i=1}^m$ が存在するかが望まれる。

$\bigcup_{i=1}^m P_i = M$, $P_i \cap P_j$ は高々 boundary のみ intersect する i.e.

$P_i \cap P_j = \partial(P_i) \cap \partial(P_j)$ かつ $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n P_{i,n}$ は Riemann volume

2. 0 の集合 ε の $\varepsilon' < 1$ 点となる i.e.

$$M \setminus N \ni \forall x \quad \mu(x) > \varepsilon$$

$$x = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n P_{i,n} \quad \text{ : 2. } N \text{ は volume } 0 \text{ の集合.}$$

このとき $\varphi \in \mathcal{G} : M \setminus N \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ の map 2.

$$\varphi(x) = (\dots, i_{-1}, i_0, i_1, \dots, i_n, \dots)$$

とすれば $S.D.(\varphi(M \setminus N), \sigma)$ はかなりの忠実さ $\varepsilon > 0$

D.D.S. (M, T) を表現していることになるであろう。

Sinai - Bowen は最近 transitive Anosov diffeo について上の

ような分割 P (Markov partition と呼ばれる) を、さらに P から

3. $S.D.(\varphi M, \sigma)$ が Markov 性 $\varepsilon > 0$ (§2 の Markov subshift

と述べる) を分割の存在を示している: (この場合

$\varphi(N)$ は symbol の sequence は一意にはさまれないが、高々有限

個の sequence に対応するから $\varphi(M) = \varphi(M \setminus N) \cup \varphi(N)$ と思える

3.)

D.D.S. (M, φ) の忠実な symbolic dynamics への表現, さらに

は Sinai - Bowen の Markov 分割にみるように、Symbolic dynamics

の type 1 表現 $\varepsilon > 0$ であるような表現を得る: 2. のように、

Symbolic dynamics とする simple な対象 ε Analysis しては

Differential dynamical system へ ε という手順が組まれ

3.

確かに n が与えられた表現写像 φ をもつ n 次元 $\mathbb{Z}$ 上の Symbolic dynamics を表現する以外、もっとも重要な微分構造は捨象せざるを得ない。しかし、 Symbolic dynamics を媒介として他の数学の諸概念を $\text{differentiable dynamical system}$ に注入することが出来る。例として定常過程にみる確率論的概念、 normal sequence にみる整数論的概念、さらには §4 で述べるような Gibbs measure にみる統計力学的概念等である。

§2 periodic points と topological entropy についても

Morse, Hedlund, Birkhoff, Smale 等に見るような Symbolic dynamics は、はじめ $\text{differential dynamical system}$ の periodic points の量的把握に用いられ、この §2 は Symbolic dynamics についても、まず periodic points の性質を述べよう。

ここからは §1 で述べた $S.D.(X, \sigma)$ の X の closed set について仮定を加えておく。重要は $S.D.(X, \sigma)$ の class を思わせる Markov subshift とは $\mathbb{Z}$ の σ による $\mathbb{Z}$ の部分集合である。また $M = (m_{ij})$ を $S \times S$ -matrix とし $m_{ij} = 0$ または 1 とする。 M が与えられ、 M から出来る sequence space X_M と

$$X_M = \{(\dots w(-1), w(0), \dots w(n), \dots) \in A^{\mathbb{Z}} \mid m_{w(i), w(i+1)} = 1 \text{ for all } i \in \mathbb{Z}\}$$

とす。

Def. 1. matrix M が与えらるるとき, $S.D.(X_M, \sigma)$ の
 : σ は Markov subshift とす。 M の σ は structure
 matrix とす。 さらに, $\sigma \in M$ かつ $n \geq 1$ なる n に対して
 $M^n = (m_{ij}^{(n)}) > 0$ とするときは $S.D.(X_M, \sigma)$ は aperiodic
 Markov subshift とす。

ここで $S.D.(X, \sigma)$ における period n の point の数を

$$p_n(X, \sigma) = \#\{\omega \in X \mid \sigma^n \omega = \omega\}$$

と書くことにする。又一般に X は compact metric space,
 $T \in X$ 上の homeomorphism とするとき, dynamical system
 (X, T) における (X, T) と homeomorphic となる n 変換は
 有限である。このとき topological entropy $h_{\text{top}}(X, T)$ が定義さ
 れる。勿論 dynamical system (X, T) の subclass である $S.D.$
 (X, σ) においても $h_{\text{top}}(X, \sigma)$ は定義され、この場合は次の様
 になる。

$$h_{\text{top}}(X, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \#W_n(X)$$

ここで $W_n(X) = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ とは X の中に現われる長さ n の word
 である。

topological entropy と periodic points に関する次のことが知られる。

Proposition 1. $S.D.(X, \sigma)$ が与えらるるとき,

(ii) $\lambda < \kappa$ D.D.S. (M, T) or transitive Anosov diffeo α とき

$$\text{radius of } \mathcal{Z}(t) = \exp^{-h_{\text{top}}(M, T)} = \exp^{-h_{\text{top}}(M, T)} = 1/\lambda$$

∴ $\mathcal{Z}$ S.D. (X_M, T) is transitive Anosov diffeo α Markov 分割
から $\gamma < \kappa$ なる aperiodic Markov subshift. λ is structure
matrix M の最大固有値。

系 1, 2 をみるより, differential dynamical system $\mathcal{Z}$
既に知られてゐる, ある n は本稿の結果が Symbolic dynamics
を用ゐる容易に示さねることを示される。

§ 3 transversal flow $\kappa \rightarrow \nu$ $\mathcal{Z}$

transitive Anosov diffeo α simple example $\mathcal{Z}$,
 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ $ad - bc = \pm 1$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}$, matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
の固有値 λ_i $i=1, 2$ $|\lambda_i| \neq 1$ の α なる $\mathcal{Z}$, $M \in 2\text{-dim torus}$
 $T \in T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ なる (M, T) なる $\mathcal{Z}$ なる。

と $\mathcal{Z}$ なる $\lambda_i \kappa \rightarrow \nu$ なる, 対応する固有ベクトル μ, ν $i=1, 2$
とするとき

$$\frac{dx}{dt} = \mu_i \quad \frac{dy}{dt} = \nu_i \quad i=1, 2$$

なる微分方程式からなる M 上の flow $\{Z_t^{(i)}; -\infty < t < \infty\}$ は
次の基本性質をもつ。

$$Z_{\lambda_i t}^{(i)} T = T Z_t^{(i)} \quad \text{for } -\infty < t < \infty$$

$\{Z_t^{(i)}\} \in T$ $\kappa \rightarrow \nu$ なる位置づけは Sinai-Kato-Kowada に譲る

こころを (小和田氏の講演参照) Symbolic dynamics への
2 次のような結果が知られている。

proposition 3. Aperiodic Markov subshift (X_M, σ) があり
らなければならないとき, X_M 上の flow $\{Z_t^{(i)}\}_{i=1,2}$ 2

$$Z_{\lambda t}^{(1)} \sigma = \sigma Z_t^{(1)} \quad Z_{\lambda t}^{(2)} \sigma = \sigma Z_t^{(2)}$$

を満たすものが存在する。ここで λ は structure Matrix M の最大固有
値。

この proposition は次のようなことを示唆している。ある
ものがある。すなわち, transitive Anosov diffeo (M, T) に対して
2, $\{Z_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots,m}$, $\{S_t^{(i)}\}_{i=1,2,\dots,m}$ は M 上の 1-parameter
group が存在して, $(m+n \leq \dim M)$

$$Z_{\lambda t}^{(i)} T = T Z_t^{(i)} \quad \text{and} \quad S_{\mu t}^{(i)} = T S_t^{(i)}$$

ここで $|\lambda| > 1$ かつ $|\mu| < 1$, 又 $\{Z_t^{(i)}\}$ ($\{S_t^{(i)}\}$) は, Z の
path が expansive (contractive) な T -invariant な foliation の
上の動きを動かすものである。

§ 4 invariant measure について

D.D.S. (M, T) に対して T -不変な測度 μ が存在するが, 存
在すればどれくらいあるか, 又 Riemann volume と絶対連続と
なるか等の問題は, 重要なものである。これは path behavior
に限らず, μ の存在をわかつければ, 一定の量的把握が可能であ

る (エノゴト定理), 知られる。

このときは transitive Anosov diffeo かつ $n \geq 1$, 最近の Sinai の結果のみに $n \geq 1$ 言及する。そのため準備を行う。

(X, T) は dynamical system とし, μ_0 は X 上の T -不変測度とする。又 $h(x) \in X$ 上の bounded 実数値関数とする。このとき

$Z_{m,n}(h|\mu_0)$ は

$$Z_{m,n}(h|\mu_0) = \int_X \exp\left(\sum_{k=-n}^m h(T^k x)\right) d\mu_0(x) \quad m, n > 0$$

とし m, n は X 上の measure $\mu_{m,n}(h|\mu_0)$ の 2 次の density の形で与えられる。

$$\frac{d\mu_{m,n}(h|\mu_0)}{d\mu_0} = \frac{\exp\left(\sum_{k=-n}^m h(T^k x)\right)}{Z_{m,n}(h|\mu_0)}.$$

Def. 2. dynamical system (X, T) 上の T -不変測度 μ が Gibbs measure であるとは, ある T -不変測度 μ_0 と bounded f (h) が存在して

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mu_{m,n}(h|\mu_0) = \mu$$

と成るといえる。

このような測度のことを何故 Gibbs measure と呼ぶのか, 又このような測度が存在するとは相転移が起きる n 対 n という統計力学的概念と何故対応するか, はここから分かることになる。

今 $S.D. (M, \sigma)$ は Aperiodic Markov subshift であるとき,

次の2つの性質を満たす測度 μ_0 が一意に存在する。

$$(i) \quad h_{\mu_0}(X_n, \sigma) = h_{\text{top}}(X_n, \sigma)$$

(ii) μ_0 は Markov chain からささる σ -不変(定常)測度

∴ $h_{\mu_0}(X_n, \sigma)$ は, n の中の (metrical) entropy の $n \rightarrow \infty$ である。

proposition 4 Aperiodic Markov subshift (X_n, σ) 上, 上記の μ_0 の $\mathcal{F}$ に $\mathcal{G}$ を加えるとき, $h(x) \in \mathcal{F}_{\mathcal{F}, K}$ ならば $h(x)$ への $n \rightarrow \infty$ は Gibbs measure $\mu(h)$ が存在する。i.e.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mu_{m, n}(h | \mu_0) = \mu(h) .$$

∴ $h(x) \in \mathcal{F}_{\mathcal{F}, K} (\text{def } < 1, \infty K)$ ならば

$$\sup_{\omega(n) \neq \omega(n')} |h(\dots \omega(-n) \omega(-n+1) \dots \omega(0) \dots \omega(n-1) \omega(n) \dots) - h(\dots \omega(-n) \omega(-n+1) \dots \omega(n-1) \omega(n) \dots)| < C(h) \varepsilon^{nK} \quad \text{for all } n > 0$$

なる $\varepsilon > 0$ がある。

∴ Sinai は transitive Anosov diffeo の上 $\mathcal{F}$ の $\mathcal{P}$ -不変測度 $\bar{\mu}, \mu_e, \mu_c$ を構成した。∴ $\bar{\mu}$ は $h_{\bar{\mu}}(X, \mathcal{P}) = h_{\text{top}}(X, \mathcal{P})$ なる測度, $\mu_e(\mu_c)$ は expansive (contractive) な invariant foliation の上へ制限したとき Riemann volume ω による絶対連続な測度である。

今 transitive Anosov diffeo $(X, \mathcal{P})$ から Markov 分割を用いて作られる aperiodic Markov subshift (X_n, σ) 上の map φ があるならば, prop. 4, により $h(x) \in \mathcal{F}_{\mathcal{F}, K}$ であるならば (X_n, σ) 上の μ_0 上の $\mathcal{F}$ 上の Gibbs measure $\mu(h)$ が存在する。∴

$z, \mu(h) \in \mathcal{G}$ なる $M \in \mathcal{M}$ induce さ れ る 測度 $\eta * \mu(h)$ は T -不変
 $M \in \mathcal{M}$ の Gibbs measure となる。 Sinai の主張は次のようなものである。

定理 1 (M, T) は transitive Anosov diffeomorphism であるとき,

(i) $\bar{\mu}, \mu_e, \mu_c$ は Gibbs measure

(ii) $M \in \mathcal{M}$ の Gibbs measure が 連続濃度関数 ν 存在し、 z は
 全強混合性 (K-system) となるエルゴード的測度である。