

非孤立真性特異点の近傍における
exceptionally ramified meromorphic
function について

三重大・教育 黒川 都史子

§ 1 序

孤立真性特異点の近傍では、よく知られているように、

- (1) Picard 除外値は高々 2 つである。
- (2) 完全分岐値は高々 4 つである。
- (3) *exceptionally ramified meromorphic function* は存在しない。(W. Gross [1])
- (4) *normal meromorphic function* は存在しない。(O. Lehto — K. I. Virtanen [5])

これらの基本的な性質が非孤立真性特異点の近傍ではどのようなになるか？

非孤立真性特異点の近傍での値分布論の研究は Hällström, Tsuji, Kametani, Noshiro, Matsumoto, ……によって寄与されている。

それらの中でも非孤立真性特異点の場合の (1) に関連する

結果として, K. Matsumoto [6] [7] [8] [9], (2) に関連する
結果として, T. Kurokawa - K. Matsumoto [2] がある。

前者の 1 つ:

定理 A (K. Matsumoto [7]) E を $\mathbb{C}^2$ の Cantor set とする。もし

$$\xi_{n+1} = o(\xi_n^2)$$

ならば, E の各点を真性特異点としてもち, E の補集合で有理型な任意の関数は高々 2 つの Picard 除外値をもつ。

これは 3 つの Picard 除外値をもつ関数が存在しないための十分条件である。

他方, 3 つの Picard 除外値をもつ関数は *exceptionally ramified* であり, *exceptionally ramified* ならば *normal* である。

そこで, (3), (4) と関連して, 非孤立真性特異点の場合, もっと条件の弱い関数 — *exceptionally ramified* 又は *normal* — が存在しはどのような E に対する十分条件は見つからないか? という面白い問題がある。

ここでは, *exceptionally ramified meromorphic function* に対する肯定的な答えを定理 1 で示す。更に, 定理 1 の証明

と同様の証明方法を用いることによって、いくつかの完全分岐値をもつ関数をもつ性質 (定理 2, 3) にもふれる。

§ 2 *exceptionally ramified meromorphic functions*

定義 1. $w_1, w_2, \dots, w_g$ を g 個 ($g \geq 3$) の値, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_g$ ($\nu_i \geq 2$, integer) は

$$(5) \quad \sum_{i=1}^g \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) > 2$$

を満たす整数とする。

$f(z) = w_i$ の根が高々有限個を除いて, ν_i 以上の重複度をもつ (w_i が Picard 除外値の時は $\nu_i = \infty$ とする) ならば, 有理型関数 $f(z)$ は *exceptionally ramified* という。

定理 1 (T. Kurokawa [3]) E を $\{\xi_n\}$ をもつに Cantor set とする。もし

$$(*) \quad \xi_{n+1} = o(\xi_n^5)$$

ならば, E の各点を真性特異点としてもち, E の補集合で *exceptionally ramified* な有理型関数は存在しない。

Cantor set E を p 回 ($p \geq 2$) 分岐する *normal exhaustion* をもつように少し一般化してみる。

定義 2. $0 < \xi_n = p\eta_n < \frac{p}{2^{p-1}}$ ($p \geq 2$, integer),

$I_{0,1} = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1 \}$ とおく。

$I_{0,1}$ から長さ $(1 - p\eta_1)/(p-1)$ の閉区間を $p-1$ 個除いて, 長さ η_1 の p 個の閉区間が残るようにする。それらを $I_{1,1}, I_{1,2}, \dots, I_{1,p}$ とする。同様に $I_{n,k}$ から長さ $(1 - p\eta_n)/(p-1)$ の $(p-1)$ 個の閉区間を除いて, 長さ $\prod_{p=1}^n \eta_p \equiv L_n$ の p 個の閉区間が残るようにし, それらを $I_{n+1,1}, I_{n+1,2}, \dots, I_{n+1,p}$ とする。そこで

$$E_{[p]} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^p I_{n,k}$$

とかき, $E_{[p]}$ を比 $\{\xi_n\}$ をもつた一般化した Cantor set という。

T. Kurokawa - K. Matsumoto [2] で報告したように, p 回分岐する *normal exhaustion* をもつ Cantor set $E_{[p]}$ に対しては次の定理 B がいえる。

定理 B. $E_{[p]}$ を比 $\{\xi_n\}$ をもつた一般化した Cantor set とする。

もし

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$$

ならば,

(i) $\rho = 2$, $E_{[\rho]}$ の少なくとも一点を真性特異点としてもち, $E_{[\rho]}$ の補集合で *normal* な有理型函数は各真性特異点の近傍で高々3つの完全分岐値をもつ。

(ii) $\rho > 2$, $E_{[\rho]}$ の少なくとも一点を真性特異点としてもち, $E_{[\rho]}$ の補集合で有理型函数は各真性特異点の近傍で高々 $(\rho + 1)$ 個の完全分岐値をもつ。

[註: T. Kurokawa - K. Matsumoto [2] では $E_{[\rho]}$ よりもっと一般の *totally disconnected compact set* に対してこの結果を得ている。

定理1では $\rho = 2$ の場合の十分条件を与えているので, $\rho > 2$ の場合も同様にできないか? これは $\rho = 3$ の場合が特に面倒のようである。

そこで, あべての *exceptionally ramified meromorphic function* に対しては難しいので, 最大個数の完全分岐値をもつ (即ち 定理Bより $(\rho + 1)$ 個もつ) *exceptionally ramified meromorphic function* に制限して一つの十分条件を与える。

定理2. (T. Kurokawa [4]) $E_{[\rho]}$ ($\rho > 2$) を比 $\{\xi_n\}$

をもった一般化した Cantor set とする。

$$\xi_{n+1} = o(\xi_n^p)$$

ならば, $E_{[p]}$ の各点を真性特異点とし, $E_{[p]}$ の補集合で
 丁度 $(p+1)$ 個の完全分岐値をもつ *exceptionally ramified meromorphic function* は存在しない。

続いて, $E_{[p]}$ が十分うまくあつて, 完全分岐値の中で Picard
 除外値となりうるものも制限を受けることを次の定理は示す。

定理 3 (T. Kurokawa [4]) $E_{[p]}$ ($p \geq 2$) を $\{\xi_n\}$ を
 もった一般化した Cantor set とする。もし

$$\xi_{n+1} = o(\xi_n^{p+1})$$

ならば, $E_{[p]}$ の各点を真性特異点として, $E_{[p]}$ の補集合で
 $(p+1)$ 個の完全分岐値をもつ有理型関数はそれらの完全分
 岐値のうち, 高々 1 つしか Picard 除外値になれぬ。

定理 1, 2, 3 の証明はすべて帰謬法で行い, 本質的なところ
 は同じである。以下定理 1 の証明の概要を述べる。

§ 3 定理 1 の証明の概要

条件(*)をみたす Cantor set E に対し, E のすべての点を真性特異点としてもち, E の補集合で *exceptionally ramified* な有理型函数 $f(z)$ が存在したと仮定して矛盾を導く。定理により $f(z)$ は 3 つの完全分岐値 w_1, w_2, w_3 をもつ。

$I_{n,k}$ の中心を $z_{n,k}$ とし,

$$S_{n,k} = \left\{ z \mid \prod_{p=1}^n \eta_p < |z - z_{n,k}| < \frac{1}{3} \prod_{p=1}^{n-1} \eta_p \right\}$$

とおく。 $S_{n,k}$ の harmonic modulus を μ_n で表わすと,

$$\mu_n = \log \frac{1}{3\eta_n} = \log \frac{2}{3\xi_n}$$

である。

$$\Gamma_{n,k} = \left\{ z \mid |z - z_{n,k}| = \prod_{p=1}^{n-1} \eta_p \sqrt{\frac{\eta_n}{3}} \right\}$$

とし, $\Gamma_{n,k}, \Gamma_{n+1,2k-1}, \Gamma_{n+1,2k}$ で囲まれた 3 重連結領域を $\Delta_{n,k}$ とする。

補題 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$$

ならば, ある番号 L_1 が存在し, $n \geq L_1$ なるすべての n に対し,

$\Gamma_{n,k}$ の $f(z)$ による像 $f(\Gamma_{n,k})$ の chordal distance による直径は $M \exp(-\mu_n/2) \equiv \delta_n$ を越えない。ただし, M は $f(z)$ と E の補集合にのみ依存する定数である。

(証明省略)

この補題 1 より, $f(\Gamma_{n,k})$ を含み直径が δ_n より小さい円板 $D_{n,k}$ が存在する。 $G_{n,k} = D_{n,k} \cup D_{n+1,2k-1} \cup D_{n+1,2k}$ とおき, $\nu(w, f, \Delta_{n,k})$ を $\Delta_{n,k}$ における $f(z)$ の w 点の数 (重複も許して数える) とすると, 次の 2 つの場合が起こる。

$$(i) \quad \nu(w, f, \Delta_{n,k}) \geq 1 \quad (w \in \hat{\mathbb{C}} - G_{n,k})$$

$$(ii) \quad \nu(w, f, \Delta_{n,k}) = 0 \quad (w \in \hat{\mathbb{C}} - G_{n,k})$$

後者では $f(\Delta_{n,k})$ は $G_{n,k}$ に含まれ, $G_{n,k}$ は一つの component のみからなり, その直径は $3\delta_n$ より小である。従って, δ_n が十分小さければ, $\Delta_{n,k}$ の $f(z)$ による像はつぶれた状態になるので, このときの $\Delta_{n,k}$ を *degenerate* という。これに対し, (i) の場合の $\Delta_{n,k}$ を *non-degenerate* という。

次に (i) の場合を更に詳しく調べる。

Δ を simple analytic closed curves $\{\Gamma_i\}_{i=1,2,3}$ で囲まれた重連結領域, $f(z)$ を Δ の閉包で *exceptionally ramified meromorphic* とする。更に $f(z)$ は $\{D_j\}_{j=1,\dots,\alpha}$ (D_j の直径は十分小, 各 D_j は *sectionally analytic domain*) によっておおわれる $\{\Gamma_i\}_{i=1,2,3}$ の像をもち, 即ち

$$(6) \quad \bigcup_{j=1}^{\alpha} D_j \supset \bigcup_{i=1}^3 f(\Gamma_i), \quad (D_j \cap \bigcup_{i=1}^3 f(\Gamma_i) \neq \emptyset, \forall j)$$

次の (7), (8) も満たすと仮定する。

$$(7) \quad \nu(w, f, \Delta) \geq 1 \quad (w \in \hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{j=1}^{\alpha} \bar{D}_j)$$

(8) $f(z)$ は各 D_j の境界 (C_j とかく) 上に $f(z)$ の分岐値をもたぬ。

各 C_j の Δ 内での原像 $f^{-1}(C_j)$ を考える。これらのすべての component の集合を $\{\gamma_k^{(j)}\}_k$ とし, $\{\gamma_k^{(j)}\}_{k,j}$ の中の有限個の曲線で囲まれる Δ の subdomain の全体を $\mathcal{F}$ とする。 $\mathcal{F}$ の中へ包含関係による順序を入れて lattice と考える。(7) より $n \equiv \nu(z_0, f, \Delta') \geq 1$ ($z_0 \in \hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{j=1}^{\alpha'} \bar{D}_j$) となるような $\mathcal{F}$ の極大元 Δ' が存在する。 Δ' の boundary curves を $\{\Gamma_i'\}_{i=1, \dots, \alpha'}$, $[f(\Gamma_i')]$ は Γ_i' の $f(z)$ による Riemannian image, $f(\Gamma_i')$ を含む C_j の集合を $\{C_j\}_{j=1, \dots, \alpha'}$ とする。 α が Γ_i' を正の方向に一回回したとき (従って w は $[f(\Gamma_i')]$ 上を α 回) $\arg \frac{w - z_0}{w - z_j}$, ($z_0 \in \hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{j=1}^{\alpha'} \bar{D}_j$, $z_j \in D_j$), を $O([f(\Gamma_i')], z_0, z_j)$ で表わす。

Δ' における $w = f(z)$ によって作られる被覆面の Euler 指標を $\hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{j=1}^{\alpha'} \bar{D}_j$, D_j の上にある被覆面に分けて計算すると, 次の補題を得る。

補題 2

$$(9) \quad 2n - 2 = \sum_{i=1}^{\alpha'} (\alpha_i - 1) + \nu,$$

ただし, $\alpha_i = \sum_{j=1}^{\alpha'} O([f(\Gamma_i')], z_0, z_j)$, ν は $f(z)$ の Δ' での分岐度の総和である。

(証明省略)

次に, $\rho_i < 0$ のものがあるときは少し工夫することによって,
 $\rho_i > 0$ とできる。(参照. T. Kurokawa [3]) 即ち, Δ' の部分
 集合 Δ^* ($\Delta^* \in \pi$) で,

$$\nu(z_0, f, \Delta^*) \geq 1 \quad (z_0 \in \hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{j=1}^{\alpha^*} \bar{D}_j)$$

$$\rho_i^* \equiv \sum_{j=1}^{\alpha^*} O([f(P_i^*)], z_0, z_j) > 0$$

(ただし, Δ^* の boundary curves を $\{P_i^*\}_{i=1, \dots, c^*}$, その像を含
 んだ C_j の集合を $\{C_j\}_{j=1, \dots, \alpha^*}$ とする) とするものがとれる。こ
 の Δ^* に対しても補題 2 は成立する。

Δ^* における $w = f(z)$ の作る被覆面を調べる。

$n^* \equiv \nu(z_0, f, \Delta^*)$ ($z_0 \in \hat{\mathbb{C}} - \bigcup_{j=1}^{\alpha^*} \bar{D}_j$), m_i を Δ^* での w_i
 point の個数, $l_{i,j}$ を Δ^* での各 w_i -point での重複度 ($l_{i,j}$
 $\geq \nu_i$) とする。各 w_k に対して, w_k を含む D_j があれば $N_k = \{$
 $i \mid f(P_i^*) \subset C_j \equiv \partial D_j\}$ とし, もしなければ $N_k \equiv \phi$ と定
 義する。 N_k の cardinal number は σ_k で表わす。

Δ^* における $f(z)$ に対し, Cauchy の留数定理と argument
 principle を適用すると。

$$(10) \quad n^* = \sum_{j=1}^{m_i} l_{i,j} + \sum_{j \in N_i} s_j^* \geq \nu_i m_i + \sigma_i$$

を得る。

(5), (9), (10) を用いて計算すると

$$\tau' = \tau^* = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3,$$

$$f(\Delta - \Delta^*) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$$

を得る。

D_j の直径が十分小さい時は, Δ における $f(z)$ の挙動は Δ^* における $f(z)$ のそれと殆んど決まる。そこで更に詳しく計算して, $n^*, m_i, \ell_{ij}, \sigma_i, N_i, \{\omega_j^*\}_{j \in N_i}$ のあべての場合をあげると, Δ^* における $f(z)$ の作る被覆面は 25 種類あることが解る。(ただし, $\{w_1, w_2, w_3\}$ の置換による違いは無視する。)
(参照: T. Kurokawa [3] の表) 以上の議論は Δ の代りに $\Delta_{n,k}$ として適用する。

さて, 最後に $\{\Delta_{n,k}\}_{n=1,2,\dots, k=1,2,\dots, 2^n}$ の中, non-degenerate なものは高々有限個であることを示せばあとは簡単である。

これは non-degenerate な $\Delta_{n,k}$ が無限個あると仮定して矛盾を導くのであるが, その途中で Teichmüller の extremal domain の harmonic modulus を利用することによって我々の条件(*)に反することが起こることを示すことによって得られる。

定理 2, 3 の証明は省略するが, その証明において, 補題 1, 2, 及び式 (5), (6) が重要な役割をする。

References

- [1] W.Gross, Über die Singularitäten analytischer Funktionen.
Monat. Math. Physik, 29(1918), 3 - 47
- [2] T.Kurokawa and K.Matsumoto, On totally ramified values,
Tohoku Math. J., Vol.28(1976).
- [3] T.Kurokawa, to appear
- [4] T.Kurokawa, to appear
- [5] O.Lehto and K.I.Virtanen, Boundary behaviour and normal
meromorphic functions, Acta Math., 97(1957), 47 - 65.
- [6] K.Matsumoto, Some notes on exceptional values of meromor-
phic functions, Nagoya Math. J., Vol.22(1963).
- [7] ———, Existence of perfect Picard sets, Nagoya Math.
J., Vol.27(1966).
- [8] ———, Perfect Picard set of positive capacity,
Nagoya Math.J., Vol.29(1967).
- [9] ———, Some remarks on Picard sets, Ann.Acad.Sci.
Fennicae, Ser.A.1. 403(1967).
- [10] S.Toppila, Picard sets for meromorphic functions, Ann.Acad.
Sci. Fennicae, A.1.417(1967).