

渦糸に Trap された陰イオンの Mobility

名大理 大 見 哲 巨

碓 井 恒 丸

(7 月 1 0 日 受 理)

§ 1 ま え が き

最近、回転ヘリウムにおいて渦糸に trap された陰イオンの mobility の測定が行なわれ、自由イオンの mobility に比べて order が一桁くらい小さくなることが観測された。その原因は、渦糸中心付近の特殊性によるものと考えられ、渦糸の構造を知る上で注目される。

Douglass¹⁾ は、渦糸中心において、イオンの mobility を変化させるものとして、渦糸の振動モードとの散乱を考え、流体力学的な取り扱いによる計算を行なった。しかし、Douglass の計算には二つの欠点があると考えられる。第 1 には、渦糸が振動している時には、一般にイオンが渦糸の中心からはずれることが許されるはずであるのに、彼の場合、イオンは常に渦糸の中心に位置するという結果になつてのことである。第 2 には、振動モードのイオンによる反射係数のイオン速度への dependence, すなわち, Doppler effect が落ちていることである。

これらを解決するのに、完全流体の流体力学を解くことは避けて、次のような model を用いて計算を行なう。

§ 2 反 射 係 数

渦糸振動の波数が小さい時に注目する。その時、渦糸の運動をその中心を通る線で、またイオンの運動は、その中心点で代表させる。すなわち、渦糸の運動は、effective mass が、 $\rho_s \pi a^2$ (ρ_s は、超流動密度、 a は渦糸の core radius) で考えられ、また Magnus 力が働くことを考慮して、

$$\begin{aligned} \rho_s \pi a^2 \ddot{\xi} &= -\rho_s \kappa \eta + \epsilon \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ \rho_s \pi a^2 \ddot{\eta} &= \rho_s \kappa \dot{\xi} + \epsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1)$$

$\kappa = h/m$, ξ , η は, 渦糸の二次元変位, ϵ は渦糸の tension である。
これから, $\zeta^\pm = \xi \pm i\eta$ が $\zeta_k^\pm \propto e^{ikx - i\omega t}$ で変化するとして

$$-\omega^2 \rho_s \pi a^2 = \pm \omega \rho_s \kappa - \epsilon_k k^2 \quad (2)$$

ただし (2) 式において, dispersion relation が, Gopal²⁾ の表式

$$\omega_k = \frac{\kappa}{2\pi a^2} \left\{ 1 \pm [1 + kaK_0(ka)/K_1(ka)]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3)$$

(K_0 , K_1 は, 変形された Bessel 関数) に一致するように ϵ_k に k dependence を持たせる。

$$\epsilon_k = \frac{\rho_s \kappa}{2\pi} \frac{1}{ka} \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} \quad (4)$$

(4) 式は, (1) 式右辺第二項を,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \zeta(x^1) \epsilon(x-x^1) dx^1 \\ & \epsilon(x-x^1) = \int \epsilon_k e^{ik(x-x^1)} \frac{dk}{2\pi} \end{aligned} \quad (5)$$

という non-local な力で置き換えたことを意味する。また, $k \rightarrow 0$ で $\omega_k \rightarrow 0$ になる振動モードだけに着目すると (あと一つのモードは $10^\circ K$ の order で非常にエネルギーが高い) Gopal の場合同様, ζ^+ と ζ^- は, 渦による流れと逆向きに回転するまったく同じものになる。したがって以下 ζ^+ だけをとって話しをする。

まず, 最初にイオンが静止している場合について渦糸振動のイオンによる反射係数を求める。イオンが渦糸から受ける力として, イオン半径 (A とおく) に比べて変位が小さい時には, Donnelly³⁾ により harmonic な力が働く, 他に Magnus 力が働くと考えられる。したがって, 運動方程式は, イオンの変位を $z^\pm$, その位置を $x=0$ とすれば,

$$M \ddot{z} = i \rho_s \kappa A \dot{z} - K (z - \zeta(0)) \quad (6)$$

M はイオンの effective mass, K は Donnelly の表式

$$K = \frac{\hbar \rho_s \kappa}{2 A m} \left[2 \sinh^{-1} \frac{A}{a} - 1 \right] \quad (7)$$

(m はヘリウム原子の質量)

をとる。

これに対応して, (2) 式も,

$$\rho_s \pi a^2 \ddot{\zeta} = i \rho_s \kappa \dot{\zeta} + \frac{\partial}{\partial x^2} \int \epsilon(x-x') \zeta(x') dx' - K(\zeta(0) - z) \quad (8)$$

となる。

また, 入射波, 反射波, 透過波を

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= t e^{i(kx - \omega t)} \quad x > 0 \\ \zeta(x) &= I e^{i(kx - \omega t)} + r e^{-i(kx + \omega t)} \quad x < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

と表わしておく。

$x=0$ で変位が連続的に繋がるということより,

$$I + r = t \quad (10)$$

$z \propto e^{-i\omega t}$ であることを用いて, (6) (7) 式より, z を消去する。

$$\begin{aligned} \rho_s \pi a^2 \ddot{\zeta} &= i \rho_s \kappa \dot{\zeta} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \epsilon(x-x') \zeta(x') dx' \\ &- K \frac{\omega^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} \omega}{\omega^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} \omega - \omega_0^2} \zeta(0) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{M}$$

(11) 式において $x = 0$ を含む無限小区間で積分する。

$$-i k \epsilon_k (I - r - t) = K \frac{\omega^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} \omega}{\omega^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} \omega - \omega_0^2} F \quad (12)$$

(10) (12) の解は, $|\frac{r}{I}|^2 + |\frac{t}{I}|^2 = 1$ を満足し, 反射係数 $R^0 = |r/I|^2$ は,

$$R^0 = \frac{\left(\frac{K}{2k\epsilon_k}\right)^2 \left(\omega^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} \omega\right)^2}{\left(\omega^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} \omega - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{K}{2k\epsilon_k}\right)^2 \left(\omega^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} \omega\right)^2} \quad (13)$$

である。

(13) で与えられた R^0 を Douglass の結果と比較する。そのために, 常にイオンが渦糸の中心に固定されているための条件とした $K \rightarrow \infty$ とおけば

$$R^0 \rightarrow \frac{\left(\frac{\rho_s \kappa A}{2k\epsilon_k} \omega + \frac{M}{2k\epsilon_k} \omega^2\right)^2}{1 + \left(\frac{\rho_s \kappa A}{2k\epsilon_k} \omega + \frac{M}{2k\epsilon_k} \omega^2\right)^2}$$

となる。この結果は, $k \rightarrow 0$ では $R^0 \rightarrow (kA)^2$ $k \rightarrow \infty$ では $R^0 \rightarrow 1$, $R = 0$ から $R = 1$ に変化するのは $kA \sim 1$ で起るというように傾向はほとんど一致している。

次に, (13) において, Douglass 同様, $a = 1 \text{ \AA}$ $A = 20 \text{ \AA}$ M については, hydrodynamical mass だけで近似し, 数値計算した結果を Fig. 1 に示しておく。我々の場合の特徴は K を有限にとっているので, 一度 resonance のピークがあり, $k \rightarrow \infty$ で 1 より小さいある値に近づくことである。

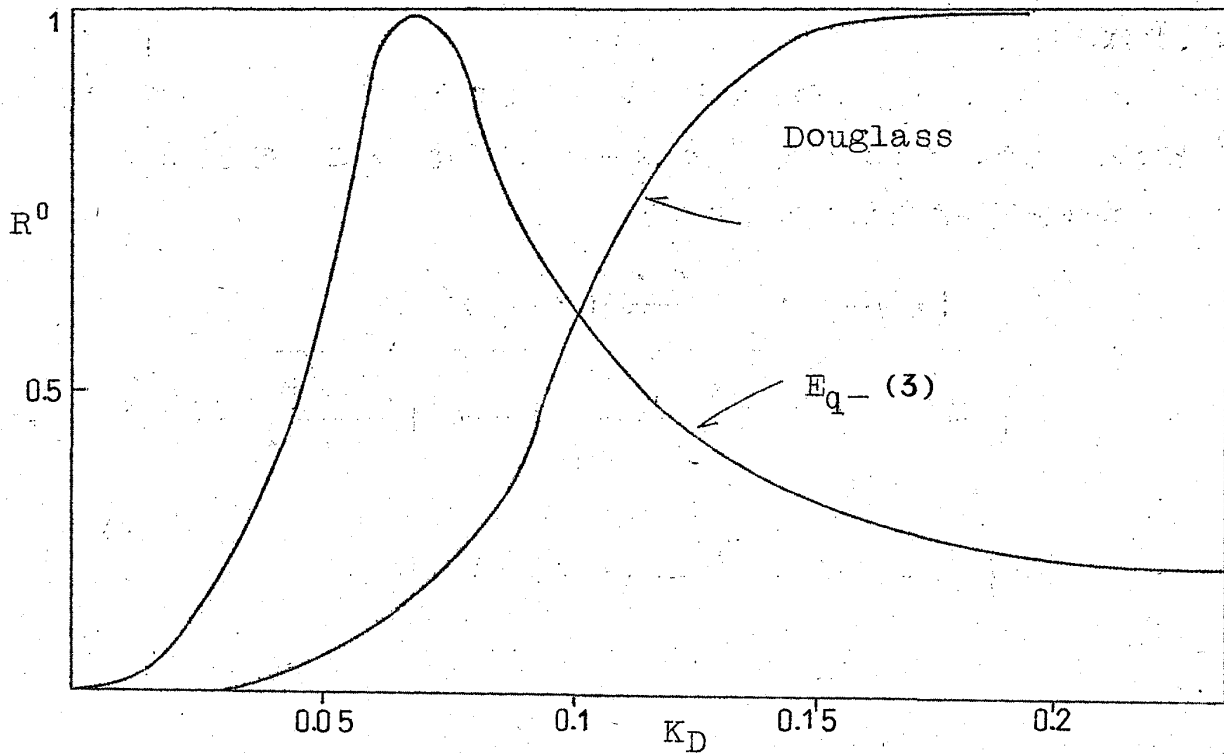


Fig. 1

次に反射係数 R のイオン速度への dependence を考える。イオンの速度を v として、反射波および透過数が Doppler shift を受けるであろうことを考慮すると、(9) 式は、

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= t e^{i(k_+x - \omega_+t)} \quad x > vt \\ \zeta(x) &= I e^{i(kx - \omega t)} + r e^{-i(k_-x + \omega_-t)} \quad x < vt \end{aligned} \quad (14)$$

$$\omega_+ = \omega_{k^+} \quad \omega_- = \omega_{k^-}$$

$$\zeta(vt+0) = \zeta(vt-0) \quad \text{より}$$

$$t e^{i(k_+v - \omega_+)t} = I e^{i(kv - \omega t)} + r e^{-i(k_-v + \omega_-)t} \quad (15)$$

(15) が、任意の t について成立するためには、

$$k_+v - \omega_+ = kv - \omega = -k_-v - \omega_- \quad (16)$$

でなければならない。

これから, $k_+ = k$, k_- についても v の一次までとつて $k_- = k - 2k \cdot v / \frac{\partial \omega}{\partial k}$ となる。また, イオンの振動数が $\omega - kv$ に変化することを考慮し, $v = 0$ の場合と同様な計算を遂行すると,

$$R = \frac{\left\{ (\omega - kv)^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} (\omega - kv)^2 \right\}}{\left\{ (\omega - kv)^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} (\omega - kv) - \omega_0^2 \right\}^2 \frac{(\epsilon k + k_- \epsilon_-)^2}{K^2} + \left\{ (\omega - kv)^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} (\omega - kv) \right\}^2} \quad (17)$$

$$\epsilon_- = \epsilon_{k_-}$$

と求まる。

§ 3 Mobility

反射係数の速度依存を考えない場合における, mobility の表式は, Douglass によつて求められている。それは, 渦糸振動の量子が熱平衡状態にあるとし, また振動量子が一次元的であることに注意すれば, 温度 T における, mobility μ は,

$$\mu^{-1} = \frac{4\hbar}{\pi e} \int_0^\infty n_k R^0 k dk \quad (18)$$

$$n_k = \left(e^{\frac{\omega_k}{T}} - 1 \right)^{-1}$$

で与えられる。

R の v -dependence を考えた我々の場合は, (18) の表式で, R^0 を $R^0 + R^1$

$$R^1 = P^0 (1 - R^0) \left[\frac{2\omega kv_k + \frac{\rho_s \kappa A}{M} k v_k}{\omega^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} \omega} \right]$$

$$\left[\frac{2 \omega k v_k + \frac{\rho_s \kappa A}{M} k v_k}{\omega^2 + \frac{\rho_s \kappa A}{M} - \omega_0^2} - \frac{\epsilon_k + k \frac{\partial \epsilon_k}{\partial k}}{\epsilon_k} \right] \quad (19)$$

$$v_k = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

で置き換えた形で μ は与えられる。

他方, Baym 達⁴⁾が, 自由イオンの mobility の計算の場合に示したように, イオンとの衝突による phonon の遷移確率のイオン速度への依存を直接計算することなく, mobility に Doppler 効果を取り入れることが出来る。この方法で計算した結果

$$\mu^{-1} = - \frac{2\hbar}{\pi e} \int_0^\infty \frac{\partial n_k}{\partial k} R^0 k^2 dk \quad (20)$$

は上記の結果と一致する。

(20) 式の数値計算の結果を Fig. 2 に示しておく。ここで, $a = 1 \text{ \AA}$, A は, 多くの実験を比較して $A = 1.6 \text{ \AA}$ ととっている。

effective mass は, 自由イオンの hydrodynamical mass で近似する。イオンが, 渦糸の中心附近にある時は, core radius の order で存在する超流動密度の変化の影響があるが, 一応これを無視する。

最後に, harmonic force すなわち K について考える。Donnelly の計算には, back flow が考慮されていない。したがって彼の計算は, 渦糸の中心では正しいが, 中心から十分離れた所では正しくない。back flow の効果を考慮するとそこでのポテンシャルの深さは半分になる。このことに注意し, ポテンシャルをなめらかにつなげば, K の値が, (7) 式 (この値を K_D としておく) より大きくなることが予想される。我々は, $K = K_D$, $K = 1.5 K_D$, $K = 2 \cdot K_D$ の三つの場合に計算を行なった。

§ 4 結 論

Fig. 2 に示したように Douglass の実験及び理論曲線は, $\frac{1}{T} \sim 1.3 \text{ K}$

らいまでしかない。イオンの渦糸に trap されている平均時間がこれより低い温度では、小さくなりすぎて実験が出来なくなるためであるという（これは理論的に理解し難いことだが）。

この範囲で、Douglass の実験及び理論値と我々の結果を比較する。

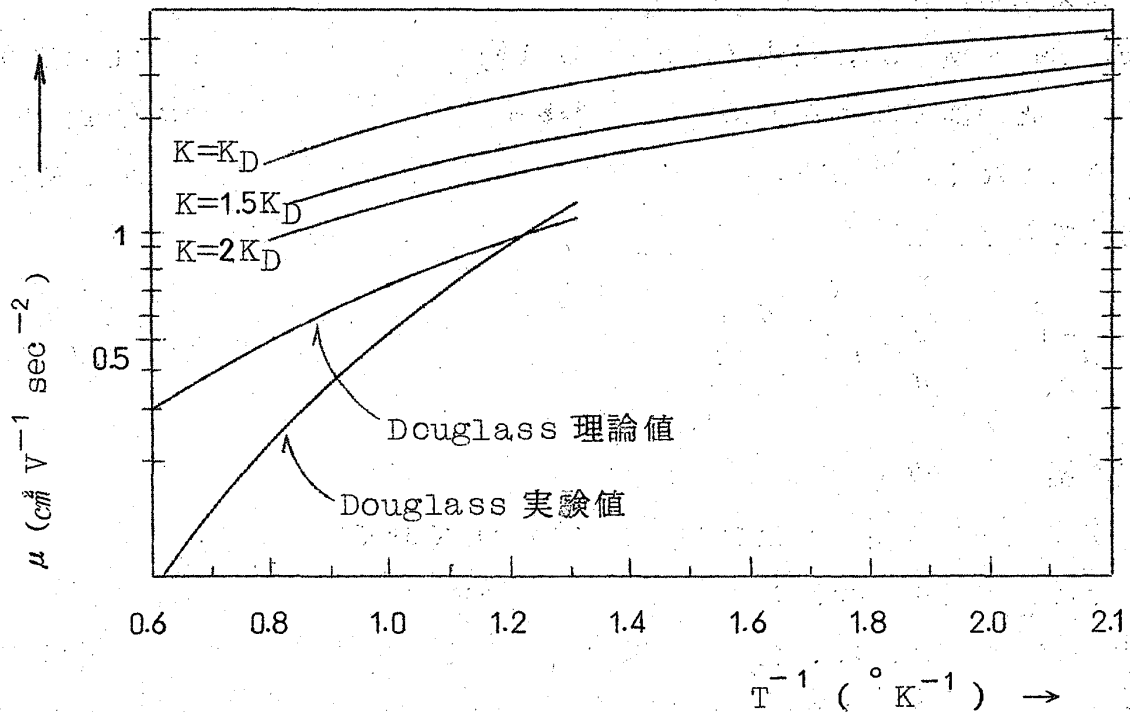


Fig. 2

$\frac{1}{T} = 1.2$ より低い温度では、Douglass の理論値は、実験値より小さくなつてしまつてゐる。これは、他の process が存在すれば、mobility はさらに小さくなるのであるから矛盾である。我々の結果は、 $K = 2K_D$ とおいた場合にも、 $\frac{1}{T} = 1.3$ まで、実験値より大きくなつてゐる。これは K を有限にとつたことに原因があると考えられる。

以上、Douglass 及び我々の理論がそのような温度においても成立するという仮定のもとに話しを進めてきた。しかし、渦糸振動の dispersion relation 及び hydrodynamical な近似等をとつてみれば明らかなように、これらの理論は、温度が十分低い時、適用できる理論のはずである。例えば、

$k = \frac{1}{A}$ とおいた時の渦糸振動のエネルギーは、だいたい 0.07°K となる。

我々は、数値計算を $\frac{1}{T} = 2.2$ まで行つたが、実験との比較という意味では、もつと低い温度で行なわれるべきであろう。

References

- 1) R. L. Douglass ; Phys. Rev. 174, (1968) 255
- 2) E. S. R. Gopal, Ann. Phys. (N. Y.) 29, (1964) 350
- 3) P. E. Parks and D. J. Donnelly, Phys. Rev. Letters, 16 (1966) 45
- 4) G. Baym, R. G. Barrera and C. J. Pethick, Phys. Rev. Letters, 22 (1969) 20