

非同次常微分方程式の可解条件について

新潟大学工学部情報工学科 田島慎一 (Shinichi TAJIMA)

複素領域 $X \subset \mathbb{C}$ 上に, 正則関数 $a_j(x)$ を係数に持つ m 階の線形常微分作用素

$$P(x, D_x) = a_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_0(x)$$

が与えられたとする. この微分作用素に対し, 非同次常微分方程式 $P(x, D_x)u = f$ の可解条件を収束べき級数および形式べき級数の空間において考察する. この問題は複素領域の微分方程式の最も基本的問題であるが, 十分には理解されていない点があるように思える. 本稿では, 留数の概念を用いることで, 非同次方程式の局所可解条件が記述できることを述べる. 形式べき級数の場合は, 可解条件の計算の際に微分作用素環におけるグレブナ基底が有効に利用できることを示す. また収束べき級数での可解性に関連し, いくつかの結果と注意を与える.

1. 非同次方程式と留数

この節では, まず複素領域での線形常微分方程式に関する基本的事項を述べ, 次に簡単な例を取り上げ, 具体的な計算を行うことで非同次方程式の可解条件と留数の関係を調べる.

領域 X 内の一点 A をとり, その点 $A \in X$ における収束べき級数全体のなす空間を $\mathcal{O}_A$ で表し, 形式べき級数全体のなす空間を $\hat{\mathcal{O}}_A$ で表す. 常微分作用素 $P = P(x, D_x)$ の定める線形写像

$$P : \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{O}_A$$

に対し, その核と余核をそれぞれ $\text{Ker}(P, \mathcal{O}_A)$, $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_A)$ で表す. 同様に, 線形写像

$$P : \hat{\mathcal{O}}_A \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_A$$

の核と余核をそれぞれ $\text{Ker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A)$, $\text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A)$ で表す.

これらのベクトル空間はいずれも有限次元であり, 次の式で微分作用素 P の指数を定義することが出来る.

$$\chi_A(P, \mathcal{O}) = \dim \text{Ker}(P, \mathcal{O}_A) - \dim \text{Coker}(P, \mathcal{O}_A),$$

$$\chi_A(P, \hat{\mathcal{O}}) = \dim \text{Ker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) - \dim \text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A).$$

点 A における関数 $a(x)$ の零点の位数を $v_A(a)$ で表す. 微分作用素の指数に関して次が成り立つことが知られている.

定理 1 (小松 [4], Malgrange [6])

正則関数を係数に持つ m 階の常微分作用素

$$P(x, D_x) = a_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_0(x)$$

に対し、次が成り立つ.

- (i) $\chi_A(P, \mathcal{O}) = m - v_A(a_m)$,
- (ii) $\chi_A(P, \hat{\mathcal{O}}) = \max_{0 \leq i \leq m} \{i - v_A(a_i)\}$.

一般に, $\text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A / \mathcal{O}_A) = 0$ が成り立ち,

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Ker}(P, \mathcal{O}_A) \longrightarrow \text{Ker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) \longrightarrow \text{Ker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A / \mathcal{O}_A) \\ \longrightarrow \text{Coker}(P, \mathcal{O}_A) \longrightarrow \text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

は完全列となることも基本的である. 次の定理は Malgrange による.

定理 2 (Malgrange [6])

次は同値である

- (i) 点 A は微分作用素 P の確定特異点である.
- (ii) $\text{Ker}(P, \mathcal{O}_A) \cong \text{Ker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A)$, $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_A) \cong \text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A)$ が成り立つ.
- (iii) $\chi_A(P, \mathcal{O}) = \chi_A(P, \hat{\mathcal{O}})$ が成り立つ.

さて, 非同次方程式に関し本稿で扱う問題は, 具体的には次のように表せる.

- (a) $\text{Im}(P, \mathcal{O}_A)$ および $\text{Im}(P, \hat{\mathcal{O}}_A)$ を決定する方法を与え, 非同次方程式 $Pu = f$ が可解となるような f の特徴付けを与えよ.
- (b) $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_A)$ および $\text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A)$ の基底の構成法を与えよ.

これより, 簡単な例でもって上に挙げた問題 (a) を考察してみる. 以下の議論では関数解析学の標準的論法に倣って, 双対性を利用する. その際に, 留数と随伴方程式を組み合わせる用いることが基本的アイデアである.

例 1 常微分作用素 $P(x, D_x) = (2x + x^2)D_x - 4$ は原点 A を確定特異点として持ち, そこでの指数は $\chi_A(P, \mathcal{O}) = \chi_A(P, \hat{\mathcal{O}}) = 0$ である. 同次方程式は非自明なべき級数解を持ち, $\dim \text{Ker}(P, \mathcal{O}_A) = \dim \text{Ker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) = 1$ となる. 従って, 作用素 P の余核も自明ではなく, $\dim \text{Coker}(P, \mathcal{O}_A) = \dim \text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) = 1$ となる.

この作用素に対する非同次方程式 $Pu = f$ を考える. その為に, 微分作用素 P の形式随伴作用素 P^* をとりその同次解を求める. 随伴作用素は $P^* = -(2x + x^2)D_x - 6 - 2x$ であり, 有理関数 $g(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ が同次方程式 $P^*g = 0$ の解となることは容易にわかる.

さてここで, 関数 $f(x)$ と微分形式 $g(x)dx$ に対しそれらの積 $f(x)g(x)dx$ をとり, 原点 A におけるその留数を考え, その値を $\text{Res}_A(f, g)$ で表すことにする. 非同次方程式 $Pu = f$

が解 u を持つとすると, $\text{Res}_A(f, g) = \text{Res}_A(Pu, g)$ を得るが, ここで部分積分をすれば $\text{Res}_A(u, P^*g)$ と等しくなるので, 可解条件として

$$\text{Res}_A(f, g) = 0, \quad \text{ただし} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

を得ることになる. 従って, 関数 f を $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots$ と展開しておけば, 微分方程式 $Pu = f$ の可解条件は $f_1 + 2f_2 = 0$ で与えられることになる. 実際, 形式べき級数 $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots$ に対し $Pu = f$ を満たす形式べき級数解 u の存在する条件が $f_1 + 2f_2 = 0$ であることは初等的にも確かめられる.

例 2 一階の常微分作用素 $P(x, D_x) = (2x + x^2 + 5x^4)D_x - 4 + 20x^3$ を考えると確定特異点型であり, 原点 A における指数は $\chi_A(P, \mathcal{O}) = \chi_A(P, \hat{\mathcal{O}}) = 0$ となる. その随伴作用素は $P^* = -(2x + x^2 + 5x^4)D_x - 6 - 2x$ で, 有理関数 $5 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ を解に持つ. この有理関数と例 1 に現れた有理関数とは原点において同じ主要部を持つ. 従って, 非同次方程式 $Pu = f$ の可解条件は例 1 のそれと同一となる. 実際, 直接に計算をすることにより, 形式べき級数 $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots$ に対し形式べき級数解 u が存在する条件が $f_1 + 2f_2 = 0$ であることが容易に確かめられる.

例 3 微分作用素 $P(x, D_x) = x^2D_x - 1 + 2x$ は原点 A を不確定特異点として持つ. 原点における指数は $\chi_A(P, \mathcal{O}) = -1, \chi_A(P, \hat{\mathcal{O}}) = 0$ であるが, $\text{Ker}(P, \mathcal{O}_A) = \text{Ker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) = \{0\}$ であることから, $\text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) = \{0\}$ および $\dim \text{Coker}(P, \mathcal{O}_A) = 1$ がわかる. 実際, 形式べき級数の範囲で非同次方程式 $Pu = f$ を考えると, 常に可解であることが確かめられる.

収束べき級数の空間で非同次方程式 $Pu = f$ の可解条件を考える為に, この微分作用素 P の随伴作用素 $P^* = -x^2D_x - 1$ を利用する. この随伴作用素に対し, 同次方程式 $P^*g(x) = 0$ を考えると原点に真性特異点を持つ関数 $\exp \frac{1}{x}$ を同次解として持つことがわかる. 例 1 と同様の議論をすることで, 非同次方程式 $Pu = f$ において収束べき級数 $f(x)$ を与えた時, 収束べき級数解 u が存在する条件は

$$\text{Res}_A(f(x), \exp \frac{1}{x}) = 0$$

であることがわかる.

これらの例が示すように, 非同次方程式に対する可解条件は留数の概念を用いて表現することが出来る. 一般的な主張は次の節で与えることにして, ここではその準備としていくつかの注意を述べておく.

注意 (i) 例 1, 2 が示すように, 可解条件では同次随伴方程式の解そのものが重要なわけではなく, その特異性である主要部のみが可解条件に本質的に寄与する.

注意 (ii) 例 1 と例 3 を比較すると明かとなるが, 同次随伴方程式の特異解のうち, 有理型の特異性をもつ解が非同次方程式 $Pu = f$ の形式べき級数での可解条件と関係し, 真性の特異性を持つものは収束べき級数の空間での可解条件と関係する.

さて、留数を用いることは双対性を利用することに他ならないが、今まで収束べき級数や形式べき級数の空間に対し、その双対空間を導入しないで議論をしていた。次の節でこれらの空間の位相ベクトル空間としての双対空間を導入し、その枠組みで非同次方程式の可解性に関して得た結果を定式化していく。

2. 随伴方程式の局所コホモロジー解

複素平面 $X = \mathbb{C}$ 上の正則微分形式のなす層を Ω_X とおく。点 $A \in X$ に台を持つ局所コホモロジー群を $\mathcal{H}_{\{A\}}^1(\Omega_X)$ で表し、点 A に台を持つ代数的局所コホモロジー群を $\mathcal{H}_{[A]}^1(\Omega_X)$ で表す。議論の出発点となるのは、位相ベクトル空間としての次の双対性である。

$$\mathcal{O}_A \times \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\hat{\mathcal{O}}_A \times \mathcal{H}_{[A]}^1(\Omega_X) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

両者とも、その pairing は点 A での留数をとることで与えられることに注意されたい。開集合 $X \setminus A$ から X への open inclusion map を $j : X \setminus A \rightarrow X$ とおくと、局所コホモロジー群は $\mathcal{H}_{\{A\}}^1(\Omega_X) \cong j_* j^{-1} \Omega_X / \Omega_X$ と表せる。従って、局所コホモロジー群 $\mathcal{H}_{\{A\}}^1(\Omega_X)$ の要素は、 $X \setminus A$ において正則な微分形式の点 A における特異性を記述するが、*essential singularity* も許すことになる。それに対し、代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}_{[A]}^1(\Omega_X)$ の要素は有理型の特異性である極のみを記述する。

さて、 X 上の微分作用素のなす層を $\mathcal{D}_X$ とおくと、 $\mathcal{H}_{\{A\}}^1(\Omega_X)$ と $\mathcal{H}_{[A]}^1(\Omega_X)$ は右 $\mathcal{D}_X$ 加群となる。微分作用素 R の右作用は、その形式随伴作用素 R^* を用いて $(\sigma dx)R = (R^* \sigma)dx$ と表すことができる。以下の議論では、微分形式 dx を固定して、 $\mathcal{O}_A$ の双対空間として $\mathcal{H}_{\{A\}}^1(\Omega_X)$ の代わりに $\mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X)$ を使い、 $\hat{\mathcal{O}}_A$ の双対空間として $\mathcal{H}_{[A]}^1(\Omega_X)$ の代わりに $\mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X)$ を用いることにする。

記号の準備が整ったので、本題にはいる。正則関数 $a_j(x)$ を係数に持つ m 階の線形常微分作用素

$$P(x, D_x) = a_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_0(x)$$

に対し微分作用素 $P = P(x, D_x)$ の形式随伴作用素を P^* で表す。作用素 P の定める線形写像

$$\mathcal{O}_A \xrightarrow{P} \mathcal{O}_A$$

とその双対

$$\mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X) \xleftarrow{P^*} \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X)$$

を考える。位相ベクトル空間としての双対性から、次の結果が直ちに従う。

命題 3 次が成立する。

- (i) $\text{Coker}(P^*, \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X))$ は $\text{Ker}(P, \mathcal{O}_A)$ の双対ベクトル空間である。
- (ii) $\text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X))$ は $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_A)$ の双対ベクトル空間である。

形式べき級数解に関しても全く同様の議論により次の結果が導ける.

命題 4 次が成立する.

- (i) $\text{Coker}(P^*, \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X))$ は $\text{Ker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A)$ の双対ベクトル空間である.
- (ii) $\text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X))$ は $\text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A)$ の双対ベクトル空間である.

いま挙げた二つの命題自体は, holonomic system(極大過剰決定系)に関する柏原 ([2]) および柏原・河合 ([3]) の研究の中で非常に一般的な形で既に述べられている事を注意しておく.

さて, 我々の目的のためには, 関数空間の間の双対性が留数で与えられるという事実が重要である. このことに注目すると, 非同次方程式の可解条件に関する結果を得ることが出来る. 結果を述べる為に, 記号の準備をしよう. $(f, \sigma) \in \mathcal{O}_A \times \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X)$ に対し, 微分形式 $f(x)\sigma(x)dx$ の点 A での留数を考え, その値を $\text{Res}_A(f, \sigma)$ で表す. この時, 留数の定める pairing

$$\text{Res}_A(\cdot, \cdot) : \mathcal{O}_A \times \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathbb{C},$$

は有限次元ベクトル空間の間の次の pairing を自然に誘導する.

$$\text{Res}_A(\cdot, \cdot) : \text{Coker}(P, \mathcal{O}_A) \times \text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X)) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

命題 3 より, この pairing は非退化であることが従うので次の定理を得る.

定理 5

点 A における収束べき級数全体のなす集合を $\mathcal{O}_A$ とおき, 微分作用素 P の随伴同次方程式の局所コホモロジー解を

$$\text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X)) = \{\sigma \in \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X) \mid P^*\sigma = 0\}$$

とおく. 収束べき級数 $f \in \mathcal{O}_A$ が与えられた時, 非同次方程式 $Pu = f$ が収束べき級数解 $u \in \mathcal{O}_A$ を持つ必要十分条件は

$$\text{Res}_A(f, \sigma) = 0, \quad \forall \sigma \in \text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X))$$

が成り立つことである.

定理 6

点 A における形式べき級数全体のなす集合を $\hat{\mathcal{O}}_A$ とおき,

$$\text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X)) = \{\sigma \in \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X) \mid P^*\sigma = 0\}$$

とおく. 形式べき級数 $f \in \hat{\mathcal{O}}_A$ に対し, 非同次方程式 $Pu = f$ が形式べき級数解 $u \in \hat{\mathcal{O}}_A$ を持つ必要十分条件は次で与えられる.

$$\text{Res}_A(f, \sigma) = 0, \quad \forall \sigma \in \text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X)).$$

これらの二つの定理はいずれも、微分作用素 P が確定特異点型であるかあるいは不確定特異点型であるかという事には無関係に成り立つ一般的なものであることに注意されたい。

例 4 原点 A において、2 階の微分作用素

$$P = (2 - 5x)(x - 1)x D_x^2 + 2(1 + 8x - 15x^2)D_x - 16$$

に対する非同次方程式 $Pu = f$ の局所可解条件を考える。

この微分作用素 P の形式随伴作用素 P^* は、

$$P^* = (2 - 5x)(x - 1)x D_x^2 + 6(-1 + 2x)D_x - 18 + 30x$$

であり、関数 $\frac{1}{x^2}$ と $(x - 1)^3$ とを古典解として持つ。有理関数 $\frac{1}{x^2}$ の定めるコホモロジー類を $\sigma = \frac{1}{x^2} \bmod \mathcal{O}_X$ とおけば、随伴方程式の同次解の空間は一次元ベクトル空間であり、このコホモロジー類 σ で生成される。局所コホモロジー解に関し

$$\text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X)) = \text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X))$$

が成り立つことから、 $\text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) \cong \text{Coker}(P, \mathcal{O}_A)$ を得る。従って、非同次方程式 $Pu = f$ の可解条件は、収束べき級数に対する場合も形式べき級数に対する場合も同一となり、

$$\text{Res}_A(f(x), \frac{1}{x^2}) = 0$$

で与えられる。

例 5 原点 A において 2 階の微分作用素

$$P = (3x - 1)x^3 D_x^2 + (1 - 4x + 12x^2)x D_x - 2 + 4x$$

を考え、その形式随伴作用素を P^* とおく。

$$P^* = (3x - 1)x^3 D_x^2 + (-1 - 2x + 12x^2)x D_x - 3 + 6x$$

である。点 A に台を持つ局所コホモロジー類 σ と τ をそれぞれ次で定める。

$$\sigma = \frac{1}{x^3} \bmod \mathcal{O}_X, \quad \tau = \exp \frac{1}{x} \bmod \mathcal{O}_X$$

この時、 $P^*\sigma = P^*\tau = 0$ が成り立つ。従って、

$$\text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X)) = \text{Span}\{\sigma, \tau\}, \quad \text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X)) = \text{Span}\{\sigma\}$$

を得る。収束べき級数 $f \in \mathcal{O}_A$ に対し、非同次方程式 $Pu = f$ が収束べき級数解 $u \in \mathcal{O}_A$ を持つ必要十分条件は

$$\text{Res}_A(f(x), \sigma) = \text{Res}_A(f(x), \tau) = 0$$

である。それに対し、非同次方程式の右辺に形式べき級数 $f \in \hat{\mathcal{O}}_A$ を与えた時、方程式を満たす形式べき級数 $u \in \hat{\mathcal{O}}_A$ が存在する必要十分条件は $\text{Res}_A(f(x), \sigma) = 0$ のみとなる。

注意 点 A において $\text{Ker}(P, \mathcal{O}_A) \neq \text{Ker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A)$ なる微分作用素 P が与えられたとする。与えられた収束べき級数 $f \in \mathcal{O}_A$ に対し、 P の定める非同次方程式 $Pu = f$ を収束べき級数の空間で解くことを問題として想定する。通常の解法では、まず、収束べき級数 f をたんに形式べき級数とみなし形式べき級数として非同次方程式 $Pu = f$ を解き、しかる後に f の正則性を用いて u の展開係数の評価を行い、形式べき級数 u の収束性を論じることになる。しかし、収束しないべき級数を同次解にもつような作用素に対しこの方法で非同次方程式を扱う事は、かなり困難であると思われる。このような場合に、定理 5 を用いると収束べき級数解が存在するか否かが判定出来ることになり、有効に利用することが出来る。ただし、この定理を用いるには、随伴作用素の局所コホモロジー群での同次解をすべて求めておく必要があり、もちろん解析上の問題を解くことが必要になる。

3. 形式べき級数解とグレブナ基底

この節では、非同次方程式に関し今まで述べたことに基づいて、形式べき級数の場合について更に考察を加えていく。

さて、第一節でも注意したように、留数の定める双対性を用いて非同次方程式 $Pu = f$ の形式べき級数の空間での可解条件を表現するには、随伴作用素 P^* の同次解として代数的局所コホモロジー類のみを考えれば十分であった。このことに注目して、まず最初に代数的局所コホモロジー解を特徴付けるような微分方程式系を導入する。構成した微分方程式系に対して微分作用素環におけるグレブナ基底の理論を適用することで、方程式系を簡約化することが出来ることを述べる。また、このようにして得られた微分方程式系を、もともとの非同次方程式の解析に応用することが出来ることを示す。

結果を定理として述べる前に、具体例を用いて実際に計算をしながら説明していくことにする。まず、例 1 で取り上げた微分作用素の場合を考えよう。

例 6 微分作用素 $P(x, D_x) = (2x + x^2)D_x - 4$ の定める非同次方程式を原点 A での形式べき級数の空間で考える。この作用素の原点における決定方程式は $2\lambda - 4 = 0$ であり非負の整数 $\lambda = 2$ を解として持つ。従って、微分作用素 P の形式随伴作用素 P^* は負の整数 $-\lambda - 1 = -3$ を決定方程式の解として持つ。このことは、 P^* の代数的局所コホモロジー群での同次解が、原点に位数 3 の極を持つことを意味する。従って、微分方程式

$$P^*\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X)$$

の解はもう一つ別の微分方程式 $x^3\sigma = 0$ も満たすことになる。その事に注目して、微分作用素環において、微分作用素 P^* と x^3 が生成する左イデアル $\mathcal{J} = \langle P^*, x^3 \rangle$ を導入する。微分作用素環におけるグレブナ基底の計算を行うと

$$\mathcal{J} = \langle 4xD_x + 12 - 2x + x^2, x^3 \rangle$$

を得る. 極大過剰決定系 $D_X/\mathcal{J}$ は原点のみに台を持ち, 確定特異点型で重複度は 1 に等しく, 代数的局所コホモロジー類

$$\sigma = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \bmod \mathcal{O}_X$$

を解として持つ. これは第一節の例 1 で求めた有理関数解の, 極における主要部に他ならない.

例 7 微分作用素 $P = 2x^2D_x^2 + xD_x - 6$ の定める非同次方程式に対し, 原点での形式べき級数の空間での可解条件を考える. 作用素 P の決定方程式 $(2\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$ は非負の整数解 2 を持つ. そこで, 微分作用素環での左イデアル $\mathcal{J}$ を $\mathcal{J} = \langle P^*, x^3 \rangle$ で導入する. グレブナ基底の計算を行うと

$$\mathcal{J} = \langle xD_x + 3, x^3 \rangle$$

を得る. 実際, 随伴微分作用素 $P^* = 2x^2D_x^2 + 7xD_x - 3$ と x^3 の S 多項式は

$$xP^* - 2D_x^2x^3 = -5(x^2D_x + 3x)$$

であるが,

$$P^* - 2D_x(x^2D_x + 3x) = -3(xD_x + 3)$$

となるので, $xD_x + 3$ と x^3 がイデアル $\mathcal{J}$ のグレブナ基底となることが分かる.

従って, 随伴方程式の代数的局所コホモロジー群における同次解は $\sigma = \frac{1}{x^3} \bmod \mathcal{O}_X$ で与えられることがわかる. 随伴作用素 P^* 自体は, 同次方程式の古典解として有理関数解 $\frac{1}{x^3}$ 以外に $x^{\frac{1}{2}}$ なる多価解をもつ. 上記の方法では, イデアル $\langle P^*, x^3 \rangle$ を考えることで, 多価関数 $x^{\frac{1}{2}}$ を方程式のレベルで (代数的計算のみで) 排除してしまったと言える.

例 8 次の微分作用素を考える.

$$P = (3x - 1)x^3D_x^2 + (x - 4x^2 + 12x^3)D_x - 2 + 4x.$$

この微分作用素の原点での決定方程式は $\lambda - 2 = 0$ であり非負の整数解をもつ. そこで, 微分作用素環において, P の随伴作用素 P^* と x^3 の生成するイデアル $\mathcal{J} = \langle P^*, x^3 \rangle$ をとる. 随伴作用素 P^* の具体的表示

$$P^* = (3x - 1)x^3D_x^2 + (-x - 2x^2 + 12x^3)D_x - 3 + 6x$$

を用いて, グレブナ基底の計算を行うと, $\mathcal{J} = \langle xD_x + 3, x^3 \rangle$ を得る. 先ほどの例と同様に, 随伴方程式の代数的局所コホモロジー群における同次解は $\sigma = \frac{1}{x^3} \bmod \mathcal{O}_X$ で与えられることが分かる. いまの場合, 随伴作用素 P^* は, 有理関数解 $\frac{1}{x^3}$ 以外に真性特異点を持つ関数 $\exp \frac{1}{x}$ を一次独立な解として持っている. 先ほどの例と同じ様に, イデアル $\mathcal{J}$ を導入することで, 超越的特異性を持つ関数 $\exp \frac{1}{x}$ を方程式のレベルで解から排除したことになる.

微分作用素 P の点 A での決定多項式を $b_A(\lambda)$ とおく. 決定方程式 $b_A(\lambda) = 0$ が非負の整数解を持たない場合は明らかに, $\text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) = \{0\}$ となる. そこで, いままでと同様

に、微分作用素 P として、その決定方程式 $b_A(\lambda) = 0$ が非負の整数解を少なくとも一つ持つような作用素の場合を考える。

定理 7

微分作用素 P の点 $A = \{x \mid x = \alpha\}$ における決定方程式 $b_A(\lambda) = 0$ の最大の非負の整数解を λ_{max} とおく。微分作用素環において、 P の随伴作用素 P^* と $(x - \alpha)^{\lambda_{max}}$ により生成される左イデアルを $\mathcal{J} = \langle P^*, (x - \alpha)^{\lambda_{max}} \rangle$ とおく。この時、次が成立する。

$$\text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X)) = \{\sigma \in \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X) \mid R\sigma = 0, \forall R \in \mathcal{J}\}$$

さてここで、 D_X 加群 $D_X/\mathcal{J}$ は点 A に台を持つ確定特異点型の極大過剰決定系となることに注意しよう。この極大過剰決定系を考えることは、その代数的局所コホモロジー解を考えることと全く同等になる。このことから、形式べき級数の空間で非同次方程式 $Pu = f$ の可解性を調べるにあたって、随伴作用素 P^* の定める同次方程式を直接解かなくても定理 7 で導入したイデアル $\mathcal{J}$ の構造を調べることで可解条件を導けることが従う。

系 8 極大過剰決定系 $D_X/\mathcal{J}$ の点 A における重複度を n とおく。このとき次が成り立つ。

$$\dim \text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) = n.$$

証明 $\dim \text{Hom}_{D_X}(D_X/\mathcal{J}, \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X)) = n$ より明かである。

この結果を使うと、微分作用素環における代数的計算を行うことで $\text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A)$ の次元が計算出来ることになる。

例 9 微分作用素 $P = (x^2 + x^3)D_x^2 + (-2x + x^2)D_x + 2$ の場合を考える。決定方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ となる。この決定方程式は非負の整数解 $\lambda = 1, 2$ を持つので、 P の随伴作用素 $P^* = (x^2 + x^3)D_x^2 + (6x + 5x^2)D_x + 6 + 4x$ と x^3 の生成するイデアル $\mathcal{J}$ を考える。S 多項式の計算をしてこのイデアルのグレブナ基底を求めてみる。

$$S(P^*, x^3) = P^* - D_x^2 x^3 = x^2 D_x^2 + (6x - x^2)D_x + 6 - 2x$$

であるが、

$$x(x^2 D_x^2 + (6x - x^2)D_x + 6 - 2x) - D_x^2 x^3 = -(x^3 D_x + 2x^2) = -D_x x^3 + x^2$$

より、 $x^2 \in \mathcal{J}$ を得る。Buchberger アルゴリズムを使って計算を続ければ $\mathcal{J} = \langle xD_x + 2, x^2 \rangle$ を得る。イデアル $\mathcal{J}$ の定める方程式系の重複度は 1 であり、 $\dim \text{Coker}(P, \hat{\mathcal{O}}_A) = 1$ を得る。非同次方程式 $Pu = f$ を直接扱う事と比較すると、はるかに簡明な形で可解条件を導けることに留意されたい。

この例では、随伴作用素 P^* に対する同次方程式は、有理関数 $\frac{1}{x^2}$ と対数項を含む関数 $\frac{1}{x^2} \log x - \frac{1}{x^3}$ を一次独立な古典解として持つ。随伴作用素 P^* の決定方程式は $\lambda = -1, -3$

を負の整数解として持つ. 一般に, 決定方程式の解からの情報だけでは同次解に対数項を含むものが存在するかどうかは判定出来ない. そのために通常の方法では解析が煩雑になるが, ここで示したように微分作用素環での代数的計算を行うことでその煩雑さを回避することが出来る. イデアル $\mathcal{J}$ を導入したことで対数項を含むような関数を同次解からあらかじめ排除したからである.

もう少し複雑な例で計算をしてみよう.

例 10 次で定める 2 階の微分作用素

$$P = (3 - 5x^2 - 4x^7 + 2x^9)x^2D_x^2 + (-12 - 10x^2 - 68x^7 + 46x^9)xD_x + 12 + 30x^2 - 240x^7 + 240x^9$$

に対し, 非同次方程式 $Pu = f$ を形式べき級数の空間で考える. この微分作用素 P の原点における決定方程式は $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$ であり, 非負の整数解 1 と 4 を持つ. 随伴微分作用素は

$$P^* = (3 - 5x^2 - 4x^7 + 2x^9)x^2D_x^2 + (24 - 30x^2 - 4x^7 - 2x^9)xD_x + 30 + 16x^7$$

となる. この随伴作用素 P^* と x^5 の生成するイデアルを $\mathcal{J} = \langle P^*, x^5 \rangle$ とおく. このイデアルのグレブナ基底を求めると

$$\mathcal{J} = \langle x^2D_x^2 + 8xD_x + 10, x^3D_x + 5x^2, x^5 \rangle$$

を得る. このことから, 解空間 $\text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{[A]}^1(\mathcal{O}_X))$ は, 代数的局所コホモロジー類

$$\frac{1}{x^2} \bmod \mathcal{O}_X, \frac{1}{x^5} \bmod \mathcal{O}_X$$

を一次独立な基底として持つことが直ちにわかる.

この例の随伴作用素 P^* の定める同次方程式は, 有理関数 $\frac{1}{x^2} - 1$ と $\frac{1}{x^5} + x^2$ を一次独立な古典解として持つ. 特異性のみに注目して, 代数的局所コホモロジー群での解を考えることにより, このような簡明な扱いが可能となった点に留意されたい.

いままで主に一点における局所可解性のみを論じていた. この節で述べた方法は留数を用いることに基づいているので, いくつかの点での局所可解性を同時に扱うことも出来る.

例 11 微分作用素 $P = (-2x + x^2 + x^3)D_x^2 + (2 - 8x)D_x + 8$ に対し, 2 点 $x = 0$ と $x = 1$ において非同次方程式 $Pu = f$ の局所可解性を考える. この 2 点での決定方程式の非負の整数解を求めると, それぞれ $\lambda = 1$ と $\lambda = 2$ を得る. 形式べき級数の空間での可解条件を考えるために, 微分作用素 P の随伴作用素

$$P^* = (x + 2)x(x - 1)D_x^2 + 6(-1 + 2x + x^2)D_x + 6(3 + x)$$

と $x^2(x - 1)^3$ の生成するイデアル $\mathcal{J}$ を考える. グレブナ基底の計算をすると

$$\mathcal{J} = \langle x(x - 1)D_x - 2 + 2x + 15x^2 - 19x^3 + 7x^4, x^2(x - 1)^3 \rangle$$

を得る. このイデアル $\mathcal{J}$ の定める微分方程式系は, 随伴作用素 P^* の代数的局所コホモロジー群での同次解を特徴つけるものになっている. 実際, イデアル $\mathcal{J}$ を準素イデアル分解して微分方程式を局所化すると

$$\mathcal{J} = \langle xD_x + 2, x^2 \rangle \cap \langle (x-1)D_x + 3, (x-1)^3 \rangle$$

となることが分かる. このことから, $\frac{1}{x^2} \bmod \mathcal{O}_X$ が点 $x=0$ における代数的局所コホモロジー解であり $\frac{1}{(x-1)^3} \bmod \mathcal{O}_X$ が点 $x=1$ における代数的局所コホモロジー解であることがわかる.

注意 論文 [9] では, 微分作用素を用いて留数計算する方法を与えた. この方法を我々の問題に適用すると, 形式べき級数の空間での可解条件等を計算するアルゴリズムを構成することができる.

4. 収束べき級数解と多項式解

微分作用素 P に対し, その随伴作用素の局所コホモロジー群での同次解の空間

$$\text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X))$$

が既に求まっているとしよう. この時, 留数による双対性を用いてベクトル空間 $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_A)$ の基底を構成する方法を考える. 以下, 簡単のため点 A は原点であるとする.

定理 9

微分作用素 P に対し, その随伴作用素 P^* の局所コホモロジー群での同次解のなすベクトル空間

$$\text{Ker}(P^*, \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X))$$

の次元を n とする. 局所コホモロジー類 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ はこの解空間の基底であり, さらに各 σ_j の原点におけるローラン展開を

$$\sigma_j = \sum_{k \geq \ell_j} \frac{a_{j,k}}{x^{k+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

と表したとき (ただし, $a_{j,\ell_j} \neq 0$) $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_n$ なる条件を満たしていると仮定する. この時, $\{x^{\ell_1}, x^{\ell_2}, \dots, x^{\ell_n}\}$ はベクトル空間 $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_A)$ の基底である.

例 12 原点 A において微分作用素 $P = x^2 D_x - 1 - 3x$ に対し $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_A)$ を考える. そのためにまず, 随伴作用素 $P^* = -x^2 D_x - 1 - 5x$ の定める同次方程式

$$P^* \sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X)$$

を解く. そのために, 局所コホモロジー類 σ の原点におけるローラン展開を

$$\sigma = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots$$

とおき, 方程式に代入して解くと, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ を得る. 計算すると,

$$\sigma = \frac{1}{x^5} \exp \frac{1}{x} \bmod \mathcal{O}_X$$

が同次方程式 $P^*\sigma = 0$ の解であることが分かる.

従って, 一次元ベクトル空間 $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_A)$ の基底として x^4 が取れることになる. 非同次方程式 $Pu = f$ が収束べき級数解を持たないような単項式のうち, 最もその次数が低いものがこの x^4 である. 例えば, 微分方程式 $Pu = 1$ は $u(x) = -1 - 3x - 6x^2 + 6x^3$ を解に持つ. 他の単項式 $f(x) = x, x^2, x^3$ の場合も非同次方程式 $Pu = f$ は可解となる.

例 13 次の 2 階の微分作用素

$$P = (2 - x - 2x^2)x^5 D_x^2 + (-4 + 3x^2 - 10x^4)x^2 D_x + 4 + 10x - 6x^2 - x^3 + 6x^4 - 6x^5$$

に対し, $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_A)$ の基底を構成する問題を考える. そのため双対をとり, 随伴作用素

$$P^* = (2 - x - 2x^2)x^5 D_x^2 + (4 + 17x^2 - 12x^3 - 18x^4)x^2 D_x + 4 + 18x - 6x^2 + 27x^3 - 24x^4 - 30x^5$$

の定める同次方程式

$$P^*\sigma = 0, \quad \sigma \in \mathcal{H}_{\{A\}}^1(\mathcal{O}_X)$$

を解く. 局所コホモロジー類

$$\sigma = \frac{1}{x^3} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) \bmod \mathcal{O}_X, \quad \tau = \frac{1}{x^5} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \bmod \mathcal{O}_X$$

が一次独立な解であることが容易に分かる. 従って, $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_A)$ の基底として $\{x^2, x^4\}$ が取れることが分かる.

最後になったが, 局所コホモロジー解の計算法に関して注意すべき事柄をのべてから本稿を終えることにする. 具体例として次の例を考える.

例 14 微分作用素 $P = x^3 D_x - 2 + 3x^2 + x^3$ に対しその随伴作用素 $P^* = -x^3 D_x - 2 + x^3$ をとり, 同次方程式 $P^*\sigma = 0$ を考える. いま, 局所コホモロジー類 σ を形式的に

$$\sigma = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots$$

とおき, 方程式に代入する. 変数 x に関するべきでそろえると

$$P^*\sigma = a_1 x^2 + (a_1 + a_2)x + (2a_2 + a_3) + (2a_1 - 3a_3 - a_4)\frac{1}{x} + (2a_2 - 4a_4 - a_5)\frac{1}{x^2} + \cdots$$

となる. 特異性のみに注目して計算しているので $a_1 x^2 + (a_1 + a_2)x + (2a_2 + a_3)$ の部分は零と見なす. 形式ローラン展開の範囲で同次解 σ を考えると σ の展開の係数は

$$2a_1 - 3a_3 - a_4 = 2a_2 - 4a_4 - a_5 = 2a_3 - 5a_5 - a_6 = \cdots = 0$$

を満たすことになり, 形式解は 3 次元のベクトル空間をなすことが分かる. それに対し, 局所コホモロジー解は

$$\sigma = \exp\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \bmod \mathcal{O}_X$$

で張られる一次元のベクトル空間で与えられる.

この微分作用素は無限遠点においても不確定であるため, このような形式解が存在することになる. もともとの微分作用素 P と随伴作用素 P^* が定めるこれらの形式解との関係は, 関数空間として多項式空間を考えると次のように理解できる.

多項式 f が与えられた時, 多項式係数の非同次微分方程式 $Pu = f$ が多項式解 u を持つ必要十分条件は, P^* のすべての形式ローラン級数解 (非負べき項は零とみなし, 負べきのみからなる) σ に対して $\text{Res}_A(f, \sigma) = 0$ が成り立つことである.

先ほどの例 14 は, 原点も無限遠点もともに不確定特異点であった. 次の例は原点を確定特異点として持ち無限遠点のみを不確定特異点として持つ場合である.

例 15 微分作用素 P を $P = xD_x + 4 + x$ とおき, その随伴作用素 $P^* = -xD_x + 3 + x$ の形式ローラン級数解を求める. 形式解を

$$\sigma = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots$$

とおけば簡単な計算で, σ の満たす条件として $a_2 + 4a_1 = 0$, $a_3 + 5a_2 = 0$, $a_4 + 6a_3 = 0, \dots$ を得る.

参考文献

- [1] J. Briançon and Ph. Maisonobe, *Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable*, l'Enseignement Math. **30** (1984), 7–38.
- [2] M. Kashiwara, *On the maximally overdetermined system of linear differential equations I*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **10** (1975), 563–579.
- [3] M. Kashiwara and T. Kawai, *On holonomic systems of micro-differential equations, III*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **17** (1981), 813–979.
- [4] H. Komatsu, *On the index of differential operators*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo IA **18** (1971), 379–398.
- [5] H. Komatsu and T. Kawai, *Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **7** (1971/72), 95–104.
- [6] B. Malgrange, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, l'Enseignement Math. **20** (1974), 147–176.

- [7] 田島慎一, 中村弥生, 微分作用素を用いた留数計算と Holowitz's algorithm, 京都大学数理解析研究所講究録 1038「数式処理における理論と応用の研究」(1998), 23–30.
- [8] 田島慎一, 中村弥生, D-加群を用いた留数計算アルゴリズムの局所化, 数式処理 7 (1999), 2–10.
- [9] Y. Nakamura and S. Tajima, *Residue calculus with differential operators*, Kyushu J. of Math. 54 (2000), 127–138.