

常微分方程式と Factorial series について

京大 数理解 河野實彦

§ 1 序

Factorial series とは次の形の無限級数をいふ。

$$(1) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

この級数は、収束領域として半平面 $\operatorname{Re} z > \alpha$ を持つ。

任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して、半平面 $\operatorname{Re} z > \alpha + \varepsilon$ では級数は一様収束する。

Factorial series は 差分方程式の理論と関連づけられるが、一般には次の様な Laplace 積分による取扱いが行われる。積分路は実軸上にとり

$$(2) \quad F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x) dx$$

前者の例としては、我々は reducedされた微分方程式系 $x \frac{dx}{dt} = (A + tB)X$ の原点近傍における収束解の無限大での Behavior や、sector 間の Stokes 現象を調べる。いわゆる global 問題(接続問題)の研究において Factorial series

を、有効に使って来た。即ち、上の微分方程式系の収束解
 $X_j(x) = x^{p_j} \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m) x^m$ の係数 $G_j(m)$ が満足する差分方程式
 $(p_j + m - A) G_j(m) = B G_j(m-1)$ の一般解として $F_j(m) =$
 $\sum_{s=0}^{\infty} H(s) g_j(m+s)$ を得た。ここで $g_j(m+s) = \frac{x^{m+s} \Gamma(p_j - A_{jk})}{\Gamma(m+s+p_j - A_{jk} + 1)}$
 であり、 $F_j(m)$ は収束する Factorial series である。
 この研究については、参考文献 [1][2][3][4] を見て
 いただきたい。

今日、紹介いたしますのは、微分方程式の特異点近傍にあ
 ける解を収束する Factorial series により展開しようとするも
 のです。特異点近傍（特に不確定特異点）における解の
 Behavior を調べる際に、よく用いられた方法は漸近級数展開
 です。実際、次の様な結果がある。

定理 $A(x)$ は $n \times n$ 行列函数、 S は原点に頂点を持つ sector。
 今、 $x \in S$, $|x| \geq x_0$ で $A(x)$ は正則であり

$$A(x) \simeq \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{-m} \quad x \rightarrow \infty \text{ in } S$$

であれば、 S の任意の subsector に対して 微分方程式

$$x^{-p} \frac{dY}{dx} = A(x) Y$$

の基本解は、次の構造を持つ。

$$Y(x) = \hat{Y}(x) x^G e^{Q(x)}$$

ここで、 p を正の整数とし、 $Q(x)$ は $x^{\frac{1}{p}}$ の多項式、 G は定数
 行列、 $\hat{Y}(x)$ は subsector で正則で、 $x^{-\frac{1}{p}}$ の漸近級数を持つ。

ここでは $\hat{Y}(z)$ を収束する Factorial series によって展開出来る場合を紹介する訳です。Factorial series が数値計算上からも漸近級数よりは有力な方法であることは明らかです。常微分方程式と Factorial series の研究は、J. Horn に始まり Trjitzinsky, Turritin によりなされていりますが、ここでは Brel, Nörlund に基づき、含蓄のある J. Horn の一連の研究の中から紹介して行きたい。尚、まとまった説明として Wasow Chapter XI があります。

§2. Laplace 積分と Factorial series の基本定理。

さて収束性は考えずに Laplace 積分 (2) を調べてみると $f(z)$ を x の巾級数で展開したものを (2) に代入し、項別積分すれば $F(z)$ は z^{-1} の巾級数に展開される。しかし $e^{-x} = s$ の変換を行えば、積分は

$$(3) \quad F(z) = \int_0^1 s^{z-1} \phi(s) ds, \quad \phi(s) = f(\log s^{-1})$$

と表わされるから、この $\phi(s)$ を $s=1$, 即ち $x=0$, で展開した級数

$$(4) \quad \phi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (1-s)^m$$

を (3) に代入し 項別積分すれば、次の様な Factorial series 展開が得られるのである。

$$(5) \quad F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m m!}{z(z+1) \cdots (z+m)}$$

即ち、任意の函数 $F(x)$ が Factorial series に展開されるためには、次の三つの条件があれば良い事がわかる。

- (i) $F(z)$ が Laplace 積分により表わされる事。
- (ii) $\phi(s)$ が $|1-s| < 1$ で正則である事。
- (iii) (4) を (3) に代入した時、項別積分が許される事。

これから、上の三条件を満足するための $F(z)$ に対する条件や、Laplace 積分の基本定理等を調べて行こう。

定理 1 (Laplace 積分表示の一貫性)

(2) の形の Laplace 積分は半平面 $\operatorname{Re} z > \alpha$ z 収束する。

しかも Laplace 積分表示は一貫的である。

証明。Laplace 積分表示可能な函数 $F(z)$ は特別な class をなし、 $\sin kz$ の様に等差数列をなす実根を無限にもつ函数はこの class に入らな。今、その様な函数 $\varphi(z)$ が Laplace 積分表示されたとする。 $\varphi(z, x) = \int_0^x e^{-zt} f(t) dt$ とおき、 z_0 を最初の零点、 h を公差とする。

$$\varphi(z_0 + mh) = \int_0^\infty e^{-(z_0 + mh)t} f(t) dt = mh \int_0^\infty e^{-mh t} \varphi(z_0, t) dt = 0$$

最後の等式で、 $e^{-ht} = x$ とおけば、 $\int_0^1 x^{m-1} \varphi(z_0, -\frac{\log x}{h}) dx = 0$ 、即ち、任意の正の整数 p に対して $\int_0^1 t^p \varphi(t) dt = 0$ となり、 $P(t)$ を多項式とすれば $\int_0^1 P(t) \varphi(t) dt = 0$ が成立つ。Weierstrass の多項式近似定理により、

$$\int_0^1 [\varphi(t)]^2 dt = 0$$

故に、 $\varphi(t)$ は連続函数であるから $\varphi(t) \equiv 0$ ($0 \leq t \leq 1$)

を得る。これより Laplace 積分表示の一意性は明らか。

定理 2. (Laplace 積分表示可能定理)

函数 $F(z)$ が 半平面 $\operatorname{Re} z \geq \beta > 0$ で、正則で、次の形をとりければ Laplace 積分表示可能である。

$$(6) \quad F(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{\mu(z)}{z^2}$$

ここで、 $\mu(z)$ は上の半平面 $\operatorname{Re} z \geq \beta$ で正則で有界である。

証明。

積分路 C を図の様にとり、正方向に積分すれば

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(u)}{u-z} du \quad \text{を得る。}$$

$R \rightarrow \infty$ とすれば、円周上の積分は 0 に収束

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{F(u)}{u-z} du$$

直線 $\operatorname{Re} u = \beta$ 上では $\operatorname{Re} u < \operatorname{Re} z$ より

$$\frac{1}{z-u} = \int_0^\infty e^{-x(z-u)} dx$$

これを上式に代入し、仮定(6)から積分の順序が交換出来

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x) dx.$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{ux} F(u) du$$

を得る。 $e^{-x} = t$ の変換を行って整理すると

$$(7) \quad F(z) = \int_0^1 t^{z-1} f(-\log t) dt = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt$$

$$(8) \quad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} t^{-u} F(u) du$$

この定理から factorial series で定義される函数は、この定理の条件を満足し、Laplace 積分表示可能な事がわかる。逆に、Laplace 積分 (7) において $\varphi(t)$ が $|1-t| < 1$ で正則な函数であり、収束円周上の M. Hadamard の "Order" が有界であれば、Factorial series 展開出来る事を示す。この前に M. Hadamard の "Order" について説明する。

定義 (M. Hadamard の "Order")

収束半径が 1 の巾級数で定義される函数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

の収束円周上の "order" λ は次の様に定義される。

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |n a_n|}{\log n}$$

即ち、任意の正の数 ε に対して、正の整数 n_0 が存在して $n > n_0$ のとき $|a_n| < n^{k-1+\varepsilon}$ が成立し、一方全ての n に対して $|a_n| > n^{k-1-\varepsilon}$ となる。

定理 3 (収束円周上の特異性)

巾級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数 a_n が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{k-1}} = 0 \quad (k > 0) \quad \text{を満足するとき, } f(z) \text{ は}$$

$|z| < 1$ で収束し、 z が円の内部から円周上の点へ近づくとき、一様に $\lim_{|z| \rightarrow 1} (1-|z|)^K f(z) = 0$ が成立つ。

証明。 $(1-z)^{-K} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(K+n)}{P(n+1)P(K)} z^n$ であり

条件より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \frac{P(K+n)}{P(n+1)P(K)} = 0$ が成立つかう。

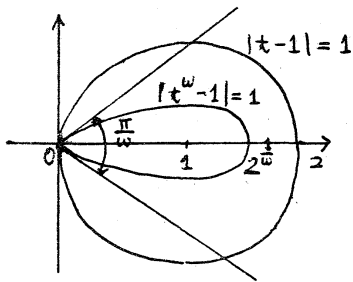
任意の正の数 ε に対して整数 n_0 が存在し、 $n \geq n_0$ で

は $|a_n| < \varepsilon \frac{P(K+n)}{P(n+1)P(K)}$ が成立つ。よって

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n \right| < \varepsilon \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{P(K+n)}{P(n+1)P(K)} |z|^n < \varepsilon (1-|z|)^{-K}$$

これより $(1-|z|)^K |f(z)| < (1-|z|)^K \left| \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n z^n \right| + \varepsilon$ 。

さて、前にもどって $\varphi(t)$ が $|t-1| < 1$ で正則函数とする。今、 $\omega > 1$ とし、 $t = \xi^{\frac{1}{\omega}}$ の変換を行うと、円周 $|z-1|=1$ は、曲線 $|t^{\omega}-1|=1$ に対応してゐる。それを図示すれば、下図の様になる。この図から $\varphi(\xi^{\frac{1}{\omega}})$ は



円 $|\xi-1| \leq 1$ で原点を除けば円周を含めて、正則な函数である事がわかる。それゆえ、仮定をゆゑめて $\varphi(t)$ は原点に頂点を

持ち、実軸 $0 \leq t \leq 1$ を含む sector 内で正則函数で、非負の数 K が存在して、この sector 内部から $t \rightarrow 0$ のとき

一樣に, $\lim_{t \rightarrow 0} t^k \varphi(t) = 0$ (収束円周上で"order")
 が成立つならば ω を充分大きい正の数にとれば $\varphi(\frac{z}{\omega})$ は
 円 $|\xi - 1| \leq 1$ で正則になり, 円周上で有界な "order" を
 持つ。この条件により Laplace 積分

$$F(z) = \frac{1}{\omega} \int_0^1 \xi^{\frac{z}{\omega}-1} \varphi(\xi \frac{1}{\omega}) d\xi$$

は項別積分が許され, 変数 $\frac{z}{\omega}$ の Factorial series に展開
 出来る。

$$(9) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n! \omega^n}{z(z+\omega)(z+2\omega) \dots (z+n\omega)}$$

これは, 少なくとも 半平面 $\operatorname{Re} z > K$ で収束する。

よって, 次の定理を得る。

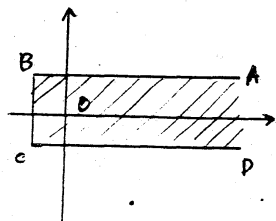
定理 4 (Factorial series 展開可能定理)

$$(I) \quad F(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{\mu(z)}{z^2}$$

$\mu(z)$ は 半平面 $\operatorname{Re} z \geq K > 0$ で, 正則有界な函数。

$$(II) \quad (10) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K-i\infty}^{K+i\infty} e^{xz} F(z) dz$$

で定義される函数 $f(x)$ は 帯状領域 $ABCD$ で正則



で, この帯状領域の中を, 一樣に

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-Kx} f(x) = 0 \quad \text{が成立つ。}$$

こゝで, 帯状領域 $ABCD$ は 変換 $t = e^{-x}$

による t -平面の sector の z -平面への像である。

上の二つの条件 (I) (II) が満足されるならば、充分大きい ω をとれば、半平面 $\operatorname{Re} z \geq K > 0$ で、 $F(z)$ は Factorial series (9) により展開出来る。

定理 5 (Factorial series の漸近展開定理)

$F(z)$ が Factorial series (9) で定義された函数とすれば、半平面 $\operatorname{Re} z \geq K$ で $\frac{1}{z}$ の漸近級数展開可能である。

証明。 (10) 式の右辺の $F(z)$ に

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1 \omega}{z(z+\omega)} + \cdots + \frac{a_n n! \omega^n}{z(z+\omega) \cdots (z+n\omega)} + R_n(z)$$

を代入すると

$$f(z) = a_0 + a_1(1 - e^{-\omega z}) + \cdots + a_n(1 - e^{-\omega z})^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{K-i\infty}^{K+i\infty} e^{xz} R_n(z) dz$$

を得る。これを p -階微分すると

$$f^{(p)}(z) = \pi_p(e^{-\omega z}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{K-i\infty}^{K+i\infty} z^p e^{xz} R_n(z) dz, \quad (p < n)$$

π_p は定数項を含まない多項式。

つまり、 $|z^{n+2} R_n(z)|$ は直線 $\operatorname{Re} z = K$ 上では有界であり、上の積分の絶対値は Ce^{Kx} の上限を持つ。

よって、任意の p に対して、 $\varepsilon \in$ 任意の小さい正の数とす

れば、
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(K+\varepsilon)x} f^{(p)}(x) = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots)$$

これより、Laplace 積分 (2) を部分積分して

$$F(z) = \frac{f(0)}{z} + \frac{f'(0)}{z^2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^{n+1}} \int_0^\infty e^{-zx} f^{(n+1)}(x) dx$$

を得るが $|f^{(n+1)}(x)| < C e^{(X+\varepsilon)x}$ によつて、最後の積分項

$$\text{は } \frac{C\theta}{z^{n+1}(Re z - X - \varepsilon)} \quad (|\theta| < 1) \quad \text{となり、}$$

$$F(z) = \frac{f(0)}{z} + \frac{f'(0)}{z^2} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{z^{n+1}} \{1 + \eta_n\}$$

を得る。こゝで η_n は $z \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。

定理 6 (Borel 函数の評価)

$\varphi(x)$ は $|x| \geq R$ で収束する巾級数 $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$ で

表わされ、領域 $Re(x^{\frac{1}{k}} e^{i\omega}) > X(\omega) \geq 0$ で正則な函数とする。

その時 $x=0$ を除けば絶対収束する級数

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^{\frac{n}{k}-1}}{\Gamma(\frac{n}{k})} \quad \text{に対し、下の評価式が得ら}$$

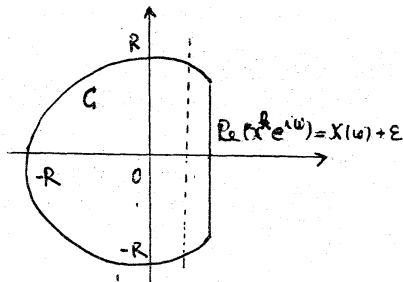
れる。

$$(II) \quad |\Phi(z)| < A e^{(X(\omega) + \varepsilon)|z|}$$

こゝで定数 A は ω には無関係、 ε は任意の正の数。

証明。

左図の様な閉曲線 C を考える。すると



$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta$$

が成立す。 $\Phi(z)$ に代入する。

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta \frac{z^{\frac{n}{k}-1}}{\Gamma(\frac{n}{k})}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{n-1} z^{\frac{n}{k}-1}}{\Gamma(\frac{n}{k})} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \zeta^{\frac{k}{k}-1} \varphi(\zeta) F(\zeta z^{\frac{1}{k}}) d\zeta$$

$$F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-k}}{\Gamma(\frac{n}{k})} = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{u^{-m}}{\Gamma(\frac{k-m}{k})} + E_{\frac{1}{k}}(u)$$

$E_{\frac{1}{k}}(u)$ は Mittag-Leffler 函数 z^{α} $|u| \geq \rho > 0$ に対して

$|E_{\frac{1}{k}}(u)| < C|e^{u^k}|$ の評価式が得られ、 $F(u)$ に対して

$|F(u)| < D e^{\operatorname{Re}(u^k)}$ を得る。よって $z = |z|e^{i\omega}$, $|z| \geq \gamma > 0$

に対して $|F(\frac{1}{z})| < H e^{|z| \operatorname{Re}(\frac{1}{z^k} e^{i\omega})}$ の評価式が得ら

れる。よって積分路 C 上の点 z に対して

$\operatorname{Re}(\frac{1}{z^k} e^{i\omega}) \leq \chi(\omega) + \varepsilon$ であるから、 $|F(\frac{1}{z})| < H e^{(\chi(\omega) + \varepsilon)|z|}$

しかも $|\frac{1}{z^{k-1}} \varphi(z)| < M$ である。今、閉曲線 C の長

さを L と表わし、 $MHL = 2\pi A$ とおけば

$$|\Phi(z)| < \frac{1}{2\pi} MH e^{(\chi(\omega) + \varepsilon)|z|} \cdot L$$

$$\therefore |\Phi(z)| < A e^{(\chi(\omega) + \varepsilon)|z|}$$

定理 7 (Laplace 積分の積定理)

$$\varphi_1(z) = \int_0^{\infty} \Phi_1(x) e^{-zx} dx$$

$$\varphi_2(z) = \int_0^{\infty} \Phi_2(x) e^{-zx} dx$$

複素函数 $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ は $0 < x < \infty$ で連続で、 $\sigma > \chi \geq 0$

なる σ に対して、正の定数 g_1, g_2, K_1, K_2 が存在して

$$|\Phi_1(x)| < K_1 x^{g_1-1} e^{\sigma x}, \quad |\Phi_2(x)| < K_2 x^{g_2-1} e^{\sigma x}$$

が成立せば、上の二つの Laplace 積分は半平面 $\operatorname{Re} z > \chi$

で絶対収束する。このとき、

$$(12) \quad \varphi_1(z) \varphi_2(z) = \int_0^\infty e^{-zx} \Psi(x) dx \quad \operatorname{Re} z > K$$

が成立つ。こゝで $\Psi(x)$ は $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$ の convolution である。

$$(13) \quad \Psi(x) = \int_0^x \Phi_1(t) \Phi_2(x-t) dt$$

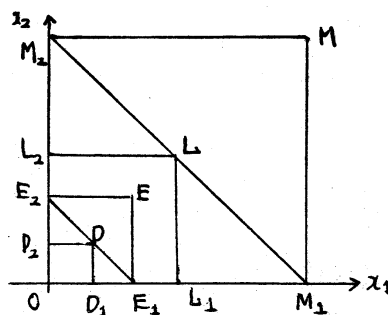
証明。 $\varphi_1(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty} \int_\delta^{2\lambda} \Phi_1(x_1) e^{-zx_1} dx_1$

$$\varphi_2(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty} \int_\delta^{2\lambda} \Phi_2(x_2) e^{-zx_2} dx_2$$

よって φ_1, φ_2 の積は 次の様な重積分の形に書ける。

$$(14) \quad \varphi_1(z) \varphi_2(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty} \int_\delta^{2\lambda} \int_\delta^{2\lambda} \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_2) e^{-z(x_1+x_2)} dx_1 dx_2$$

下図において



$$OD_1 = OD_2 = \delta, \quad OE_1 = OE_2 = 2\delta,$$

$$OL_1 = OL_2 = \lambda, \quad OM_1 = OM_2 = 2\lambda$$

$$(2\delta < \lambda)$$

先づ、平面 $DD_1M_1MM_2D_2D$ 上で、

絶対収束する重積分は、 $\delta \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$

のとき、平面 $E_1M_1M_2E_2E_1$ 上の

重積分と同じ極限值に収束する事を示そう。何故ならば

これらの重積分の差の絶対値は、三角形 $DD_1E_2, DD_2E_2, MM_1M_2$

上での重積分 $\iint |\Phi_1(x_1)| |\Phi_2(x_2)| |e^{-z(x_1+x_2)}| dx_1 dx_2$

の和より小さい。これは更に、平面 $DD_1E_1EE_2D_2D$,

平面 $LL_1M_1MM_2L_2L$ 上での上の重積分の和よりも小さい。

後者の重積分の和は 次の二つの重積分の差に等しい。

$$\int_{\delta}^{2\lambda} |\Phi_1(x_1)| |e^{-zx_1}| dx_1 \int_{\delta}^{2\lambda} |\Phi_2(x_2)| |e^{-zx_2}| dx_2 \\ \int_{2\delta}^{\lambda} |\Phi_1(x_1)| |e^{-zx_1}| dx_1 \int_{2\delta}^{\lambda} |\Phi_2(x_2)| |e^{-zx_2}| dx_2$$

と等しく、これは $\lambda \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づく。

上の説明において $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ の絶対収束性により

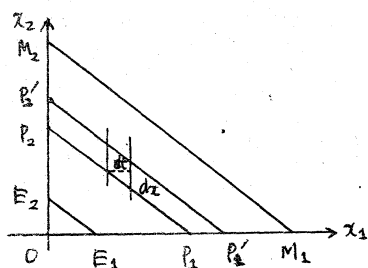
$$\left| \int_{\delta}^{\lambda} \int_0^{\delta} \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_2) e^{-z(x_1+x_2)} dx_1 dx_2 \right| \\ \leq \int_0^{\delta} |\Phi_1(x_1) e^{-zx_1}| dx_1 \int_{\delta}^{\lambda} |\Phi_2(x_2) e^{-zx_2}| dx_2 \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty)$$

なる事を使つて。

すなわち 平面 $E_1 M_1 M_2 E_2 E_1$ 上 z の重積分

$$\iint \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_2) e^{-z(x_1+x_2)} dx_1 dx_2 \quad \text{を考へよう。}$$

これを z , $x = x_1 + x_2$, $t = x_1$ なる変数変換を行ふ。



左図で $OP_1 = OP_2 = x$

$PP_1' = P_2P_2' = dx$. すると上の重積分

$$\text{は} \quad \int_{2\delta}^{2\lambda} e^{-zx} dx \int_0^x \Phi_1(t) \Phi_2(x-t) dt$$

$$\text{故に} \quad \varphi_1(z) \varphi_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} dx \int_0^x \Phi_1(t) \Phi_2(x-t) dt \\ = \int_0^{\infty} e^{-zx} \Psi(x) dx$$

これで 予備知識の説明を終えましたので 表題の「微分方程式と Factorial series」の説明に移ります。

§3 常微分方程式の解の factorial series 展開。

この章では 常微分方程式の不確定特異点近傍の解が収束する factorial series に展開出来る事を示そう。

$x = \infty$ に rank k の不確定特異点を持つ 次の単独線型常微分方程式を考える。

$$(A) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + x^{k-1} P_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + x^{2(k-1)} P_2(x) \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + x^{m(k-1)} P_m(x) y = 0$$

$$= z^n, \text{ 係数 } P_\mu(x) = a_\mu + \frac{\bar{a}_\mu^{(1)}}{x} + \frac{\bar{a}_\mu^{(2)}}{x^2} + \dots \quad (\mu=1, 2, \dots, m)$$

は $x = \infty$ の近傍で正則な函数である。

この方程式は簡単な変数変換により、次の形に reduce される。

$$(B) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + P_{m-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_m(x) y = 0$$

$= z^n$, 係数 $P_\mu(x)$ は $x^{-\frac{1}{k}}$ の巾級数で展開される。

$$P_\mu(x) = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x^{\frac{1}{k}}} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^{\frac{2}{k}}} + \dots \quad (\mu=1, 2, \dots, m)$$

以下、方程式 (B) を考察する事にする。

$$\text{方程式 (B) の特性方程式は } x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

となり、この特性根は 相異なる と仮定する。

この時、方程式 (B) は m の形式解を持つ。次の形となる。

$$y(x) = e^{\alpha x + \alpha^{(1)} x^{\frac{k-1}{k}} + \dots + \alpha^{(k-1)} x^{\frac{1}{k}}} \cdot x^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{-\frac{n}{k}}$$

その形式解の一つは 変換 $y = e^{\alpha x + \alpha^{(1)} x^{\frac{k-1}{k}} + \dots + \alpha^{(k-1)} x^{\frac{1}{k}}} z$

によって $z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n / x^{r + \frac{n}{k}}$ の形をなすとしてもよい。

即ち 特性根が 0 であり、方程式 (B) にありて、 $a_m = 0$,

$a_m^{(1)} = 0, \dots, a_m^{(k-1)} = 0$ と仮定する事が出来る。

もし $a_{m-1} \neq 0$ であれば $r = \frac{a_m^{(k)}}{a_{m-1}}$ であらわれる。とし

て、 r の実部 $\bar{r}$ は正と仮定してもよい。何故ならば、それ

は $y = x^{\bar{r}} z$ の変換により達せられる。

± 今 常微分方程式に Laplace 積分をほどこす。

$$y(x) = \int_0^{\infty} v(z) e^{zx} dz$$

積分路はある直線 $\operatorname{Re} z = \omega$ にとり、積分の収束性を仮定

し、Laplace 変換の積定理 (定理 7) を使えば、形式的に

常微分方程式 (B) は $v(z)$ に関する次の積分方程式に reduce

される。

$$(C) \quad (z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z) v(z)$$

$$= \int_0^z \sum_{\mu=1}^m G_{\mu}(z-\zeta) \zeta^{m-\mu} v(\zeta) d\zeta$$

$$\text{即ち } z^{\nu} \quad G_{\mu}(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\mu}^{(\lambda)} (1-z)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma(\frac{\lambda}{k})} \quad (\mu=1, 2, \dots, m)$$

これは Borel 函数といひ、 $z=0$ を除き 絶対収束する

級数である。Borel 函数の評価 (定理 6) より、

$P_\mu(x)$ ($\mu=1, 2, \dots, m$) が領域 $R_2(xe^{i\omega}) > \sigma(\omega) \geq 0$ で
正則であれば

$$|G_\mu(z)| < A e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|z|}$$

を得る。

そこで積分方程式(6)を逐次近似法で解こう。そのために

$$F(z, \zeta) = \frac{\sum_{\mu=1}^m G_\mu(z-\zeta) \zeta^{m-\mu}}{z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1}}$$

とおくと、積分方程式は

$$z^n(z) = \int_0^z F(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta$$

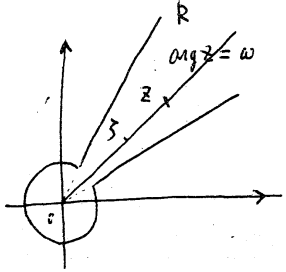
更に

$$\begin{aligned} H(z, \zeta) &= F(z, \zeta) - Y = F(z, \zeta) - \frac{a_m^{(k)}}{a_{m-1}} \\ &= H_1(z, \zeta) + H_2(z, \zeta) \end{aligned}$$

と分割する。

$$H_1(z, \zeta) = \frac{(z-\zeta)^{\frac{1}{k}-1} \zeta \sum_{\mu=1}^{m-1} \left[\frac{a_\mu^{(1)}}{P(\frac{1}{k})} + \frac{a_\mu^{(2)}}{P(\frac{2}{k})} (z-\zeta)^{\frac{1}{k}} + \dots \right] \zeta^{m-\mu-1}}{z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1}}$$

$$\begin{aligned} H_2(z, \zeta) &= \frac{a_m^{(k)} + \frac{a_m^{(k+1)}}{P(1+\frac{1}{k})} (z-\zeta)^{\frac{1}{k}} + \dots}{z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1}} - \frac{a_m^{(k)}}{a_{m-1}} \\ &= \frac{a_{m-1} \left[\frac{a_m^{(k+1)}}{P(1+\frac{1}{k})} (z-\zeta)^{\frac{1}{k}} + \dots \right] - a_m^{(k)} (z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-2} z)}{a_{m-1} (z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1})} \end{aligned}$$



領域 R とし、左図の如くとり、 R の内部にも、境界上にも

$z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1}$ の零点を含ま

ぬ様にする。 z が R に属し、 ζ が

直線 $0 \dots z$ 上にあれば、 $|\zeta| \leq |z|$, $|z - \zeta| = |z| - |\zeta| \leq |z|$

が成立す。次の評価式を得る。

$$|H_1(z, \zeta)| < L (|z| - |\zeta|)^{\frac{1}{k}-1} |z|$$

$$|H_2(z, \zeta)| < M |z|^{\frac{1}{k}}$$

$$|H(z, \zeta)| < L (|z| - |\zeta|)^{\frac{1}{k}-1} |z| + M |z|^{\frac{1}{k}}$$

L, M は定数である。

そこで、積分方程式

$$z v(z) = \int_0^z (\gamma + H(z, \zeta)) v(\zeta) d\zeta$$

を微分して、次の関係式を得る。

$$\begin{cases} z \frac{dv(z)}{dz} = (\gamma - 1) v(z) + \frac{dV}{dz} \\ V = \int_0^z H(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta \end{cases}$$

$$\text{最初の式より } v(z) = C z^{\gamma-1} + z^{\gamma-1} \int_0^z z^{-\gamma} \frac{dV}{dz} dz$$

を得るが、これを更に部分積分する事により、結局、次の

積分方程式系になる。

$$\begin{cases} v(z) = C z^{\gamma-1} + z^{\gamma-1} V(z) + \gamma z^{\gamma-1} \int_0^z z^{-\gamma-1} V(z) dz \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} V(z) &= \int_0^z H(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta \end{aligned} \right.$$

この積分方程式系を逐次近似法で解く。

$$\left\{ \begin{aligned} v_0(z) &\equiv C z^{\gamma-1} \\ V_{\nu-1}(z) &= \int_0^z H(z, \zeta) v_{\nu-1}(\zeta) d\zeta \\ v_{\nu}(z) &= z^{-1} V_{\nu-1}(z) + \gamma z^{\gamma-1} \int_0^z z^{-\gamma-1} V_{\nu-1}(z) dz \end{aligned} \right.$$

領域 R の中では、 f, f' を定数として、 $|z|^{\bar{r}} \leq f |z|^{\bar{r}}$,
 $|z|^{-\bar{r}} \leq f' |z|^{-\bar{r}}$ であることを注意して、以下。

$$|v_0(z)| \leq C_0 |z|^{\bar{r}-1}$$

今、 $|v_{\nu-1}(z)| \leq C_{\nu-1} |z|^{\bar{r} + \frac{\nu-1}{k} - 1}$ と仮定すると

$$|V_{\nu-1}(z)| \leq C_{\nu-1} \int_0^{|z|} \left\{ L(|z|-\zeta)^{\frac{1}{k}-1} |z| + M|\zeta|^{\frac{1}{k}} \right\} |\zeta|^{\bar{r} + \frac{\nu-1}{k} - 1} d|\zeta|$$

$$= C_{\nu-1} L |z|^{\bar{r} + \frac{\nu}{k}} \frac{\Gamma(\frac{1}{k}) \Gamma(\bar{r} + \frac{\nu-1}{k})}{\Gamma(\bar{r} + \frac{\nu}{k})}$$

$$+ C_{\nu-1} M \frac{|z|^{\bar{r} + \frac{\nu}{k}}}{\bar{r} + \frac{\nu-1}{k}}$$

$$= C_{\nu-1} G_{\nu-1} |z|^{\bar{r} + \frac{\nu}{k}}$$

すると、

$$|v_{\nu}(z)| \leq C_{\nu-1} G_{\nu-1} |z|^{\bar{r} + \frac{\nu}{k} - 1} \left(1 + \frac{\max R + f'}{\nu} \right)$$

$$\text{ゆえに } C_v = C_{v-1} Q_{v-1} \left(1 + \frac{|Y|k + f'}{v}\right)$$

$$\frac{C_v}{C_{v-1}} = \left[L \frac{\Gamma(\frac{1}{k}) \Gamma(\bar{r} + \frac{v-1}{k})}{\Gamma(\bar{r} + \frac{v}{k})} + M \frac{1}{\bar{r} + \frac{v-1}{k}} \right] \left(1 + \frac{|Y|k + f'}{v}\right)$$

$$\therefore \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{C_v}{C_{v-1}} = 0$$

よって、級数 $\sum_{v=0}^{\infty} z^{-v+1} v_v(z)$ は領域 Rz 広義絶対一様収束する。今 $v(z) = \sum_{v=0}^{\infty} v_v(z)$ とおくと、この函数は z^{r-1} と領域 Rz $z^{\frac{1}{k}}$ に関し正則な函数との積であり、しかも積分方程式 (G) を満足する。

そこで、次にこの $v(z)$ が exponential type であることを示そう。 C を充分大きい定数とし、 $h > \sigma(\omega)$ に対して

$$|v(z)| < C e^{h|z|}$$

が成立つ。この評価式は $z^{m+1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m+1}$ の零点を含まぬ直線 $\arg z = \omega \pm \varepsilon$ で成立つ。

$|z| \leq R$ z は $|v(z)| < C e^{h|z|}$ であるが、もし $|z| = R'$ のとき $|v(z)| = C e^{h|z|}$ となったとする。

$|z| = R'$ の時、積分方程式 (C) と Borel 函数 $G_\mu(z-\zeta)$ の評価式 $|G_\mu(z-\zeta)| < A e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)(|z| - |\zeta|)}$ を使って

$$|z| |v(z)| \leq \int_0^{|z|} \frac{\sum_{\mu=1}^m |G_\mu(z-\zeta)| |\zeta|^{m-\mu}}{|z^{m+1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m+1}|} |v(\zeta)| d|\zeta|$$

$$\begin{aligned}
 |z| C e^{k|z|} &\leq A C \frac{|z|^{m-1} + |z|^{m-2} + \dots + |z| + 1}{|z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1}|} e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|z|} \int_0^{|z|} e^{(k - \sigma(\omega) - \varepsilon)|s|} ds \\
 &\leq A C \frac{|z|^{m-1} + \dots + |z| + 1}{|z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1}|} e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|z|} \frac{e^{(k - \sigma(\omega) - \varepsilon)|z|}}{k - \sigma(\omega) - \varepsilon}
 \end{aligned}$$

$$\therefore 1 \leq \frac{1}{|z|} \frac{A}{k - \sigma(\omega) - \varepsilon} \frac{|z|^{m-1} + |z|^{m-2} + \dots + |z| + 1}{|z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1}|}$$

右辺は $|z|$ が充分大きいとき 0 に近付き 矛盾する。ゆ
えに $v(z)$ が exponential type である事がわかった。

この事から、直線 $\arg z = \omega$ 上 z^n の Laplace 積分

$$y(x) = \int_0^\infty v(z) e^{zx} dz$$

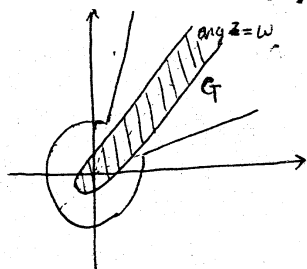
が、領域 $\operatorname{Re}(xe^{i\omega}) + \sigma(\omega) < 0$ で絶対収束し、 $y(x)$

が、微分方程式 (B) の解となる事が証明された訳である。

さて、本論の factorial series 展開に移そう。

先づ、変数変換 $z = \frac{1}{x} \log t$, $t = e^{xz}$ を考える。こ

$$= z, \quad |K| = r, \quad K = r e^{i(\pi - \omega)} = -r e^{-i\omega}$$



この変換により、 t -平面上の円

$|t-1| \leq 1$ は z -平面上のある領域

G (左図) に移される。 r は充分大

きく事によって、領域 G には

$z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1}$ の零点は含まれる様に出来る。

この時、

$$\varphi(t) = v\left(\frac{1}{k} \log t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1-t)^{\gamma + \frac{n}{k} - 1}$$

は $|t-1| < 1$ で収束する。

$t=0$ は z -平面の $\arg z = \omega$ 上での $z \rightarrow \infty$ に対応し

$t=0$ での $\varphi(t)$ の特異性は $v(z)$ に対する評価式

より

$$|\varphi(t)| < D |t|^{-\frac{\sigma(\omega)}{\delta} - \varepsilon}$$

を得る。(定理4, 定理3 参照)

これから係数 B_n に対する次の評価式を得る事が出来

る。

$$|B_n| < K \frac{\Gamma(n + \frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon)}{\Gamma(n+1) \Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon)} = K \left\{ n^{\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon - 1} (1 + O(\frac{1}{n})) \right\}$$

つまり K は n に depend しない定数。

この証明は Hadamard の order の証明に対応するものである。

$$\psi(t) = t^{\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon - 1} (1-t)^{\gamma} \varphi(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} K_n (1-t)^{\frac{n}{k}}$$

は $|t-1| < 1$ で $(1-t)^{\frac{1}{k}}$ の正則な函数である。

今、 $0 < \rho < 1$ とし、 $\rho \leq |t-1| \leq 1$ に対して

$$D |(1-t)^{1-\gamma}| < Q \text{ とすれば}$$

$$|\psi(t)| < D|(1-t)^{1-\gamma}| |t|^{\varepsilon-1} < Q|t|^{\varepsilon-1}$$

が成立つ。

また $|t-1| < \rho$ に対して $|\psi(t)|$ はある有界な上限 E より小さい。 $2^{1-\varepsilon} E < Q$ とすれば, $|t| < 2$ より

$$|\psi(t)| < Q|t|^{\varepsilon-1}$$

が成立つ。結局 $|\psi(t)| < Q|t|^{\varepsilon-1}$ とする。

さて $u = (1-t)^{\frac{1}{k}}$, $t = 1-u^k$ とおけば

$$\psi(t) = \chi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n u^n$$

より

$$K_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

$$|K_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\chi(e^{i\theta})| d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(1-e^{i\frac{k}{2}\theta})| d\theta < \frac{Q}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |1-e^{i\frac{k}{2}\theta}|^{\varepsilon-1} d\theta$$

$$= \frac{Q}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| 2 \sin \frac{k\theta}{2} \right|^{\varepsilon-1} d\theta = K$$

K は有界で n に depend しない定数。

$$\text{さて } \varphi(t) \text{ に関する } \varphi(t) = t^{-\frac{\sigma(\omega)}{\delta} - 2\varepsilon + 1} (1-t)^{\gamma-1} \psi(t)$$

$$\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon = \delta \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}
 t^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma} - 2\varepsilon + 1} &= (1 - (1-t))^{1-d} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d-1+n)}{\Gamma(n+1) \Gamma(d-1)} (1-t)^n
 \end{aligned}$$

より、

$$B_n = \sum_{\nu=0}^n \frac{\Gamma(d+\nu-1)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(d-1)} K_{n-\nu}$$

が成立する。

$$\begin{aligned}
 |B_n| &< K \sum_{\nu=0}^n \frac{\Gamma(d+\nu-1)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(d-1)} = K \frac{\Gamma(d+n)}{\Gamma(n+1) \Gamma(d)} \\
 &= K \frac{\Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma} + 2\varepsilon + n)}{\Gamma(n+1) \Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma} + 2\varepsilon)}
 \end{aligned}$$

この係数の評価式により、我々の目的の factorial series 展開を得るのであるが、そのための次の定理をあげておく。

定理 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が $a \leq x \leq b$ (b は任意で

有界) で一様収束し、 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\infty} |f_n(x)| dx$ が収束するならば、項別積分が許される。

$$\int_a^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\infty} f_n(x) dx$$

が成立する。

係数 B_n の評価式を利用して 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |B_n| \int_0^1 (1-t)^{\bar{r} + \frac{n}{k} - 1} t^{R_2(\frac{x}{k}) - 1} dt$$

が収束する事を示そう。

$$S_n = |B_n| \int_0^1 (1-t)^{\bar{r} + \frac{n}{k} - 1} t^{\operatorname{Re}(\frac{\lambda}{k}) - 1} dt$$

$$< \frac{K \Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon + n) \Gamma(\bar{r} + \frac{n}{k}) \Gamma(\operatorname{Re}(\frac{\lambda}{k}))}{\Gamma(n+1) \Gamma(\operatorname{Re}(\frac{\lambda}{k}) + \bar{r} + \frac{n}{k}) \Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon)}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon + n)}{\Gamma(n+1)} = n^{\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon - 1} (1 + O(\frac{1}{n}))$$

$$\frac{\Gamma(\bar{r} + \frac{n}{k})}{\Gamma(\operatorname{Re}(\frac{\lambda}{k}) + \bar{r} + \frac{n}{k})} = (\frac{n}{k})^{-\operatorname{Re}(\frac{\lambda}{k})} (1 + O(\frac{1}{n}))$$

$$\therefore S_n < \frac{K \Gamma(\operatorname{Re}(\frac{\lambda}{k})) k^{\operatorname{Re}(\frac{\lambda}{k})}}{\Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon)} n^{\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon - \operatorname{Re}(\frac{\lambda}{k}) - 1} (1 + O(\frac{1}{n}))$$

よって、上の級数が収束するためには

$$\frac{\sigma(\omega)}{\delta} + 2\varepsilon - \operatorname{Re}(\frac{\lambda}{k}) < 0$$

であればよい。εは任意の小さい数であるから

$$\frac{\sigma(\omega)}{\delta} - \operatorname{Re}(\frac{\lambda}{k}) = \frac{\sigma(\omega)}{\delta} + \frac{\operatorname{Re}(\lambda e^{i\omega})}{\delta} < 0$$

$$\therefore \operatorname{Re}(\lambda e^{i\omega}) + \sigma(\omega) < 0$$

に於て、級数は収束する。

この事から上の定理により、項別積分が許されて

$\operatorname{Re}(xe^{i\omega}) + \sigma(\omega) < 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 y(x) &= -\frac{1}{k} \int_0^1 y(t) t^{\frac{x}{k}-1} dt \\
 &= -\frac{1}{k} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1-t)^{\gamma+\frac{n}{k}-1} t^{\frac{x}{k}-1} dt \\
 &= -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_0^1 (1-t)^{\gamma+\frac{n}{k}-1} t^{\frac{x}{k}-1} dt \\
 &= -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(\gamma+\frac{n}{k}) \Gamma(\frac{x}{k})}{\Gamma(\gamma+\frac{n}{k}+\frac{x}{k})}
 \end{aligned}$$

これより、微分方程式 (B) の解の factorial series 展開式が得られた。

REFERENCES

- (1) K. Okubo, A connection problem involving a logarithmic function, Pub. of R.I.M.S., 1, no.1 (1965) 99-128
- (2) M. Iwano & K. Okubo, On a set of convergent solutions for a system of second order linear difference equations, Pub. of R.I.S.M., 1, no.2 (1966) 205-210.
- (3) M. Kohno, A two points connection problem involving logarithmic polynomials, Pub. of R.I.M.S., 2, no.2 (1966)
- (4) M. Kohno, The condition of the convergence of the series $\sum_{k=0}^{\infty} H^k(s) g_i^k(m+s)$ and the determination of Stokes' multipliers, to appear.
- (5) E. Borel, Leçons sur les séries divergents, Paris (1928)
- (6) N. E. Norlund, Leçons sur les séries d'interpolation, Paris (1926).
- (7) J. Horn, Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. 71 (1911), 510-532.
- (8) ———, Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle, Jour. f. Math. 143 (1913) 212-240.
- (9) ———, Laplaceshe Integrale als Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen. Jour. f. Math. 144 (1914) 167-199.
- (10) ———, Laplaceshe Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen, Jour. f. Math. 146 (1915) 95-115.
- (11) ———, Zur Theorie der linearen Differenzgleichungen, Jahres. d. D. Math. Ver. 24 (1915) 210-225.
- (12) ———, Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplaceshe Integrale und Fakultätenreihen, Jahresber. d. D. Math. 24 (1915) 309-329, Jahresber. d. D. Math. 24 (1916) 74-83.
- (13) ———, Verallgemeinerte Laplaceshe Integrale als Lösungen linearer und nichtlinearer Differentialgleichungen, Jahres. D. Math. 25 (1916/17) 301-325.
- (14) ———, Über eine nichtlineare Differenzgleichung. Jahres. 26 (1917) 230-251.
- (15) ———, Zur Theorie der nichtlinearen Differenzgleichungen Math. Zeit. 1 (1918) 80-114.

- (16) J. Horn, Singuläre Systeme linearer Volterrasher Integralgleichungen. Math. Zeit. 3 (1919) 265-313.
- (17) ———, Laplaceshe Integrale und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterrasher Integralgleichungen. Math. Zeit. 8 (1920) 100-114.
- (18) ———, Zur Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen. Math. Zeit. 13(1922) 263-282.
- (19) ———, Laplaceshe Integrale, Binomialkoeffizientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Math. Zeit. 21 (1924) 85-95.
- (20) ———, Integration linearer Differentialgleichungen. durch Laplacesche Integrale I,II, Math. Zeit. 49 (1944) 339-350, 684-701.
- (21) W. J. Trjitzinsky, Laplace integrals and factorial series in the theory of linear differential and difference equations, Trans. Am. Math. Soc. 37 (1935) 80-146.
- (22) W. J. Turrittin, Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, Acta Math., 93 (1955) 27-66
- (23) D. V. Widder, The Laplace transform, Princeton, (1941)
- (24) W. Wasow, Asymptotic expansions for ordinary differential equations. Interscience. 1966.
- (25) Whittaker & Watson, Modern Analysis. Cambridge.

