

Anosov diffeomorphism について

都立大 理 岡部 恒治

§ 定義

Anosov diffeo は, Morse-Smale diffeo の他に structurally stable な diffeo はないか? という疑問に対して, 提出されたものである。

今, T^2 (2次元 torus) を $\mathbb{R}^2$ に $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ で quotient した空間と考える。 $\widehat{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ なる linear map を matrix

$$\widehat{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えておく。 この $\widehat{f}$ は 整係数 matrix であるから, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に 写す。 おて, この $\widehat{f}$ から,

$$f: \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

なる map が得られる。 ie. $f: T^2 \longrightarrow T^2$ なる map が得られたわけである。 容易に, f が diffeo であることがわかる。 このような diffeo を toral automorphism という。

この diffeo は matrix の固有値 $1-\sqrt{2}$ に対応する固有空間の方向に関しては縮んでゆき, $1+\sqrt{2}$ の固有空間方向に対しては伸びてゆく性質をもっている。このような写像は、明らかに、少々の perturbation によっても、この性質を変えないだろうと推測される。よって、この map の性質を抜き出したものが structurally stable であろうということは予想されて当然であり、実際 Anosov によって証明されたのである。

<定義> M を Riemann manifold

$$f: M \longrightarrow M \quad \text{diffeo}$$

f が Anosov diffeo

$\Leftrightarrow$

(i) $T(M)$ (M の tangent bundle) が $T(f)$ 不変な2つの subbundle の Whitney sum になる。即ち, $E^u, E^s \subset T(M)$ があって, $T(M) = E^u \oplus E^s$, $T(f)(E^u) = E^u$, $T(f)(E^s) = E^s$, [ここで $T(f)$ は f の微分]

(ii) 定数 $c > 0$, $\lambda > 1$ を適当に取ることができて,

$\forall m \in \mathbb{N}$ (自然数) に対して,

$$|T(f)^m(x)| \geq c\lambda^m |x| \quad , \quad x \in E^u$$

$$|T(f)^m(x)| \leq c\lambda^{-m} |x| \quad , \quad x \in E^s$$

§ 構成法

Anosov diffeo を理解するために, 最も(知られてゐるうちに)一般的な構成法を紹介する。

- N を simply connected nilpotent Lie group (*)
- $K \subset \text{Aut}(N) (= \{f: N \rightarrow N \text{ Lie group isomorphism}\})$
特に K finite としておく。
- $N \rtimes K$ を N と K の semi direct product (即ち set としては,
 $N \rtimes K = \{(x, a) \mid x \in N, a \in K\}$ であつて, group operation として,
 $(x, a) \cdot (y, b) = (xa(y), ab)$ なるもの) とする。
- $\Gamma \subset N \rtimes K$ を uniform discrete group (i.e. $N \rtimes K / \Gamma$ compact)
であつて, torsion free (位数有限 $\Rightarrow$ 単位元) とする。

Auslander [1] の結果から直ちに, $\Gamma \cap N$ は N の sub group として, uniform discrete である。また, $N \rtimes K$ の元 g は N に次のように作用する。 $g = (x, a) (x \in N, a \in K)$ と考え,

$$\begin{array}{ccc} g: N & \longrightarrow & N \\ (x, a) \downarrow & & \downarrow \\ (x, a) & y \longmapsto & xa(y) \end{array}, \quad \Gamma \cap N \text{ の元は } (x, e) \quad (x \in N, e \in K)$$

と考えられる(e は単位元)から, $N \ni y$ を $xy \in N$ に写すように作用する。

(*) 「nilpotent Lie group であることが必要である」という点に関しては後藤守邦氏の明解な解説を参照された。[2]

よって, 次の onto map の列が出る。

$$N \xrightarrow{p_1} N/(\Gamma \cap N) \xrightarrow{p_2} N/\Gamma$$

しかるに, $N/(\Gamma \cap N)$ が compact であるから, N/Γ も compact である。

一オ, 再び Auslander の結果から, Γ は N に free act かわかり, N/Γ が manifold となり, p_1, p_2 はともに, covering map であることがわかる。 p_2 の covering transformation gr. は $\Gamma/(\Gamma \cap N)$ であるから, finite であって,

$$\pi_1(N/\Gamma) \cong \Gamma, \text{ かわかる。}$$

さて, $h: N \circ K \longrightarrow N \circ K$ automorphism であって,

$$\left[\begin{array}{l} \text{(i) } h(\Gamma) = \Gamma \\ \text{(ii) } h(N) = N \\ \text{(iii) } h|_N \text{ が hyperbolic} \end{array} \right. \text{ なる条件を満たすものを考え}$$

ると, 右図のような可換な diagram を作ることが出来る

(但し, $\bar{h}, \bar{\bar{h}}$ は h によって, natural に出来る map)

この $\bar{h}$ を hyperbolic infranil

manifold automorphism といい, N/Γ を infranil manifold

と呼ぶ。 $\bar{\bar{h}}$ は Anosov map になっていることがわかる。

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{h|_N} & N \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_1 \\ N/(\Gamma \cap N) & \xrightarrow{\bar{h}} & N/(\Gamma \cap N) \\ \downarrow p_2 & & \downarrow p_2 \\ N/\Gamma & \xrightarrow{\bar{\bar{h}}} & N/\Gamma \end{array}$$

§ Shub の例

ここでは前§の構成法に一つの実例を見る。\$N\$ は \$(3 \times 3)\$-matrix の pair から成る次のような manifold.

$$N = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ f & e & 1 \end{pmatrix} \right) \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

\$N\$ は \$\mathbb{R}^6\$ と homeo である。\$N\$ に普通の product operation を考える (即ち, \$(A, B) \cdot (C, D) = (AC, BD)\$) と, Lie group の構造を持っていることがわかる。

さて, \$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{m + n\sqrt{3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}\$ は \$\mathbb{R}\$ の中の sub group を考えておく。\$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \ni \alpha = m + n\sqrt{3}\$ の共役 \$\bar{\alpha}\$ を \$m - n\sqrt{3}\$ で定義する。ここで \$\Gamma_0\$ を次のように決める。

$$N \cap \Gamma_0 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \gamma & \beta & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{\alpha} & 1 & 0 \\ \bar{\gamma} & \bar{\beta} & 1 \end{pmatrix} \right) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \right\}$$

この \$\Gamma_0\$ は uniform discrete subgroup である。

— お, \$B: N \longrightarrow N\$ は Automorphism を次のように定義する。

$$B : \underset{\cup}{N} \longrightarrow \underset{\cup}{N} \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ f & e & 1 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ +c & -b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d & 1 & 0 \\ f & -e & 1 \end{pmatrix} \right)$$

\$B^2 = id\$ であるから, \$\{B, id\}\$ は group を作る。今, \$\{B, id\} = K\$ とおく。

次に, $\Gamma \subset N \circ K$ を作る. まず, $\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ とおく,
 (これは $\omega \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $2\omega \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ を満たす). さらに, この ω を
 用いて, $B_1 = \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{\omega} & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], B \right) \in N \circ K$ とおく,

さて, $\Gamma = \{ \Gamma_0 \text{ と } B_1 \text{ で generate される sub group} \} \subset N \circ K$ と
 すると, 直ちに, ($2\omega \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ より) $\Gamma = \Gamma_0 \cup B_1 \Gamma_0$ がわかる.

最後に定義すべきものは map $h: N \circ K \rightarrow N \circ K$ で
 ある. その為に, $k = 2 + \sqrt{3}$ とおき ($k\bar{k} = 1$ を満たしている)

$$\begin{array}{ccc}
 h : N \circ K & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & N \circ K \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ f & e & 1 \end{pmatrix} \right], H \right) & \mapsto & \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{k}a & 1 & 0 \\ \bar{k}c & \bar{k}b & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{k}d & 1 & 0 \\ \bar{k}f & \bar{k}e & 1 \end{pmatrix} \right], H \right) \\
 & & (\text{但し } H \in K)
 \end{array}$$

この map h は, (i), (ii), (iii) の条件を満たしている. ((i) の
 条件の為に, $(k-1)\omega \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ となるようにあらかじめ ω
 を取っておいた. 又, (iii) のために, $k > 1$, $0 < \bar{k} < 1$ とし
 ておいた.) よって, hyperbolic infranilmanifold Auto-
 morphism $\bar{h}: N/\Gamma \rightarrow N/\Gamma$ が構成された. しかも
 $\pi_1(N/\Gamma) \cong \Gamma$ であるから, N/Γ は明らかに torus と
 は違う manifold である.

§ 存在, 分類 etc.

他の map と同じように, Anosov diffeo についても, 同値関係を入れて議論する。

<定義>

$$f: M \longrightarrow M$$

$$g: N \longrightarrow N \quad \text{なる } 2 \text{ つの Anosov diffeo が}$$

topologically conjugate とは.

$\exists h: M \longrightarrow N$ なる homeo があって, 次の図式が可換であるときにいう。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

$$\text{即ち, } g \circ h = h \circ f$$

このとき, f と g と書く。

Anosov diffeo について基本的な問題は,

すべての Anosov diffeo を top conjugacy で分類せよ。

という問題である。この問題と並んで重要な問題は,

Anosov diffeo を持つような多様体はどういう多様体か?

である。

[語の都合上, これから「manifold」は全て, compact, without boundary とする。]

先ほどの§で述べたように infranil manifold には, Anosov diffeo が存在している。今まで知られている manifold は全て Lie group をある種の subgroup で割って得られている。しかし, これ以外の多様体が存在するのか? あるいは存在しないのか? は未だ判明していない。Shiraiwa は [3] に於いて, homology group による条件を用いて, いくつかの

manifold が Anosov diffeo を持ち得ない事を示した。例えば, rational homology sphere, lens space, projective space, $S^{2n} \times S^{2n}$, $Spin(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, ... etc. には Anosov diffeo が存在しない。

一方, top conjugate による分類は Smale, Franks, Newhouse 等が着々と成果を収めて来た。中でも目ざましいのは Mannings である。彼は [4] に於いて, 次の定理を証明した。

〈定理〉 (Mannings)

M を infranilmanifold (或いは torus と思ってよい)
 $f: M \longrightarrow M$ Anosov diffeo
 $\Rightarrow f \simeq$ hyperbolic infranilmanifold Auto
 (或いは hyperbolic toral auto)

— Reference —

- [1] L. Auslander, "Bieberbach's Th on Space Groups and"
Annals of Math., 71 (1960)
- [2] M. Goto, この講究録に載るであろう.
- [3] K. Shiraiwa, "Some condition on Anosov diffeo"
Manifolds Tokyo (1973.)
- [4] Manning "There are no new Anosov diffeo on Tori"