

Problem session のまとめ

(川久保)

1. Oriented (または weakly almost complex) manifold M と、 M 上の orientation- (weakly almost complex structure) preserving な $\mathbb{Z}p^{2_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}p^{2_k}$ action に対して、この action の fixed point set の次元を、多様体 M の次元によって評価する不等式を導け。同様の問題を S^1 -action について考察せよ。
2. $\mathbb{Z}p^2$ -action に関する G -signature theorem を、Atiyah-Singer の理論を用いずに、幾何学的に与えよ。
 (c.f. Kawakubo-Uchida: J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 351-355.
 Hattori-Taniguchi: " " 24 (1972) 701-731.

(内田)

1. $n \geq 3$ に対して、 $U_\star$ のイデアル $SF_\star(SU(n))$ を決定したい。そのため、まず $P_3(\mathbb{C})$, $P_4(\mathbb{C})$ 上に不動点をもたない $SU(3)$ 作用が存在するかどうかを判定せよ。

(注、線型作用によ、 Z は実現できない。)

2. 球面の直積 $S^m \times S^n$ ($0 < m \leq n$) 上の involution の不動点集合 F のコホモロジー環 $H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ は、次の空間のコホモロジー環のいずれかと一致することが知られている。

$$(i) \quad S^p \times S^q, \quad (0 \leq p \leq m, 0 \leq q \leq n)$$

$$(ii) \quad P^2(q) \# P^2(q), \quad m \geq q \quad (=1, 2, 4, 8)$$

$$(iii) \quad P^3(q), \quad m > q \quad (=1, 2, 4, 8)$$

$$(iv) \quad (\text{point}) + P^2(q), \quad m > q \quad (=1, 2, 4, 8)$$

$$(v) \quad S^p + S^q, \quad (0 \leq p \leq q \leq n)$$

$$(vi) \quad S^p$$

但し、 $H^*(P^k(q); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[t] / (t^{k+1})$, $\deg t = q$.

この中で、(iv) の場合を除いては、存在が知られているが、(iv) の型の不動点集合については、まだ存在が知られていない。その後の Bredon の研究によって、(iv) の型の不動点集合の存在の可能性が残されているのは、

$$q=2, \quad (m, n) = (3, 4);$$

$$q=4, \quad (m, n) = (5, 8), (6, 8), (6, 9), (7, 8), (7, 9), (7, 10)$$

の場合のみである。このような事態が起こり得るかどうかが判定せよ。

(注)、この問題は Bredon の一連の研究から生じたものであるが、これについては

G.E. Bredon : Cohomological aspects of transformation groups,
Proc. Conf. on Transf. Grs. (1967), Springer

" " : Introduction to Compact Transformation Groups,
Academic Press (1972)

を参照せよ。

(井 本)

球面の直積の上の involutions に関する Bredon の諸結果(上の内田氏の問題の項参照)が、球面上の球面 bundle の場合に拡張できるかどうか調べよ。例えば不動点集合のタイプが (v) $S^p + S^q$ または (vi) S^p の場合に、 $2^{\phi(m)} | 8-p$ が成り立つか？

(及 川)

Regular $O(n)$ -manifolds の(コ)ホモロジー群 $\mathcal{H}_*^{O(n)}(X)$ の構造を調べよ。例えば $n=2$, $X=S^1$ とすると $\mathcal{H}_*^{O(2)}(S^1) \cong \mathcal{H}_*^{O(1)}(\text{pt})$. $\mathcal{H}_*^{O(n)}(X)$ の定義や基本的性質、重要なスペクトル列などについては、

Wasserman-Lazarov : Cobordism of regular $O(n)$ -manifolds, Ann.
of Math. (2) 93(1971), 229-251

を参照せよ。

(阿部)

Cyclic group Z_k のある表現 $\alpha: Z_k \rightarrow O(m)$ をひとつ固定する。ホモトピー球面 Σ^m 上の smooth semi-free Z_k -action $\varphi: Z_k \times \Sigma^m \longrightarrow \Sigma^m$ が α -球面である、とは φ の不動点 $F(\varphi)$ が、また或るホモトピー球面 Σ^n ($m > n \geq 1$) となっており、 $\forall x \in \Sigma^n$ に対して $(d\varphi)_x: T_x(\Sigma^m) \rightarrow T_x(\Sigma^m)$ が与える Z_k の表現が α と同値である事を言う。 α -spheres の equivariant diffeomorphism による同値類の全体に、connected sum によって和が定義でき、この semi-group を $D_m(\alpha)$ と書く。 $n \geq 4$, $m-n \geq 2$ のとき、 $D_m(\alpha)$ は群になる事が示されるが、この群の構造を決定せよ。

(小宮)

1. Oriented bordism module $\Omega_*^{SO}((Z_2)^k; \text{All subgroups})$ の構造を決定せよ。特に、予想として、

① $\Omega_*^{SO}((Z_2)^k; \text{All}) \otimes Z_{(2)}$ は 偶数次元生成元による free $\Omega_*^{SO} \otimes Z_{(2)}$ -module

② $\Omega_{\text{odd}}^{SO}((Z_2)^k; \text{All})$ は 2-torsion group

(注、これらの予想は、研究集会のあとで、小宮氏自身により肯定的に解決された。)

2. さらに、もっと一般に、有限アーベル群 G で、全射：
 $G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ が存在するようなものに対して、oriented
 manifold 上の orientation-preserving な G -action の不動点集
 合は、一般には orientable とは限らない。このことに注
 意して、 G -action の oriented bordism group $\Omega_*^{SO}(G, \text{All})$
 の Ω_*^{SO} -module としての構造を決定せよ。

(吉田)

ホモトピー7次元球面上の smooth $SO(3)$ -actions を分類
 せよ。たとえば isotropy type が3個の場合には、 $(X \times D^3, (\text{trivial}) \times (\text{standard}))$ など、3種類の構成法のうち
 どれかで作られる。(但し、 X は contractible manifold.)

(北田)

次の Spin bordism module の構造をしるべよ：

$$\Omega_*^{\text{Spin}}(S^1; \text{All subgroups}), \quad \Omega_*^{\text{Spin}}(S^1; \text{Semi-free}),$$

$$\Omega_*^{\text{Spin}}(\mathbb{Z}_k; \text{All}).$$

(川崎)

リーマン多様体 M 上で定義された波動方程式 $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f$

の固有値によつて、 M の振動はどのように表わされるのか？

(柴田)

Metacyclic group $Z_{q,p} = \{x^q = y^p = 1, yxy^{-1} = x^2\}$ の U^* -cobordism 環の構造を定めよ。

(注、 $(p,q)=1$, p または q が素数の場合については、研究集会のあとで、提出者自身によつて解決された。)

(鎌田)

1. D. Quillen は "Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations", Adv. in Math. 7 (1971), 29-56 の中で、Atiyah-Poincaré 双対性を利用して、 $\mathbb{Z}$ ボルディズム群 $U^*(X)$ の幾何学的な定義を与えた。これの equivariant version として、Quillen type の G - $\mathbb{Z}$ ボルディズム群 $U_G^*(X)$ が定義される。 $U_G^*(X)$ の性質を調べよ。
2. Kamata-Minami "Bordism groups of dihedral groups" J. Math. Soc. Jap., 25 (1973), 334-341 において定義された微分多様体 $S^{2m} \times S^n / D_p = D_p(m,n)$ (D_p は dihedral 群) の tangent bundle を調べよ。

(服部)

M^{2m} が compact complex manifold ならば、Chern class

$$c_i(M) \in H^{2i}(M; \mathbb{Z}) \cong H_{2m-2i}(M; \mathbb{Z})$$

が定義されるが、Deligne は、complex analytic space に対しても、Chern class と類似の性質をもつ invariant が定義されるのではないかと予想した。ここでは、その予想をもう少し特別の場合に限って、 M を compact smooth G -manifold, $V \rightarrow M$ を complex G -vector bundle (但し G は有限群) とする時、complex vector bundle $V/G \rightarrow M/G$ に対して、“Chern class (の Poincaré dual)” $c_i(V/G) \in H_{2m-2i}(M/G) \cong H^{2i}(M/G, \mathcal{S})$ のようなものが定義できないか? (但し $\mathcal{S}$ はある sheaf) そして、 $c_i(V/G)$ の $H^{2i}(M/G, \mathcal{S})$ の中への image は、通常の Chern class のように、vector bundle に関する何らかの “obstruction” になっているのではないか?