

4 状態可逆チューリング機械の構成法

A construction method of 4-state reversible Turing machines

広島大学大学院工学研究科 森本 光也 ・ 森田 憲一

Mitsuya Morimoto and Kenichi Morita

Graduate School of Engineering,

Hiroshima University

概要: 万能可逆チューリング機械は任意のチューリング機械を模倣できる可逆チューリング機械である。従来の非可逆万能チューリング機械に関しては、これまでに非常に小さいサイズ(状態数 $\times$ 記号数)のものがいくつか示されている。一方、万能可逆チューリング機械については、例えば Morita, Yamaguchi により 17 状態 5 記号のものなどが与えられているが、まだあまり多くの研究がなされていない。本研究では、万能可逆チューリング機械の状態数をどれだけ少なくできるかを調べるために、任意の可逆チューリング機械をそれと等価な 4 状態可逆チューリング機械に変換する問題を研究し、その構成法を示した。この結果、4 状態の万能可逆チューリング機械を構成できることが示せる。

1 はじめに

計算システムにおける可逆性とは、計算の過程における任意の状態に対してただ 1 つの直前状態が存在する、つまり計算の過程を一意に逆戻りすることができるという性質である。可逆コンピューティングは、物質のミクロな可逆性を反映した計算モデルであり、計算機の低消費エネルギー化・小型化をさらに進めるための 1 つの鍵になるとされている。

可逆チューリング機械 (reversible Turing machine, RTM) は代表的な可逆コンピューティングの理論的モデルであり、Bennett [1] によりその計算万能性が示された。万能可逆チューリング機械 (universal RTM, URTM) は任意のチューリング機械を模倣できる RTM で、これまでに 17 状態 5 記号の URTM [5], 15 状態 6 記号の URTM [6] が与えられている。これらの URTM

は、cyclic tag system [2] と呼ばれる万能なシステムをシミュレートする手法を用いることで構築されている。

しかし、URTM の研究はまだそれほどなされておらず、未解決な問題も多い。特に状態数が少ない URTM, あるいは記号数が 2 の URTM でサイズ(状態数 $\times$ 記号数)の小さいものはまだ構築されていない。後者については、任意の RTM をそれと等価な 2 記号の RTM に変換する一般的方法が知られている [4] ので、2 記号 URTM の存在を示すことはできる。しかし、これを用いて既存の URTM を変換すると状態数の非常に大きなものになってしまう。

一方、状態数の少ない URTM に関しては、15 状態 6 記号 URTM が存在するという結果以外には、状態数の上限に関する有用な結果はなかった。非可逆チューリング機械の場合には、任意の TM をそれと等価な 2 状態の TM に変換できること、また、1 状態の万能 TM が存在しないことが Shannon [9] により示されている。小サイズのものとしては 2 記号 18 状態の万能 TM が Neary, Woods [7] によって与えられている。本研究では、Shannon の手法を RTM に応用し、任意の RTM をそれと等価な 4 状態の RTM に変換する手法を与えた。今回提案した変換法を 17 状態 5 記号 URTM に用いると、4 状態 175 記号の URTM が得られる。

2 諸定義

定義 2.1 1 テープチューリング機械 (TM) T は

$$T = (Q, S, q_0, q_f, s_0, \delta)$$

によって定義される。各項目は次の通り。

Q ... 有限制御部の内部状態の有限集合

$S \dots$ テープ記号の有限集合

$q_0 \in Q \dots$ 有限制御部の初期状態

$q_f \in Q \dots$ 有限制御部の最終状態

$s_0 \in S \dots$ 空白記号

$\delta \dots$ 動作規則 (5 項組) の集合

δ は $(Q \times S \times Q \times S \times \{L, R\})$ の部分集合で、動作関数 (動作規則の集合) を表す。 L, R はヘッドの移動方向を表し、それぞれ左移動、右移動を意味する。 δ の各要素は 5 項組と呼ばれ、テープへの操作と有限制御部の状態遷移を記した「命令」である。各命令は、 $[q, s, q', s', d]$ の形をしており、有限制御部の内部状態が q でテープ記号 s を読んだならば、内部状態を q' に遷移させ、記号を s' に書換え、ヘッドを d の方向に移動させる、という一連の動作を表す。

次に 決定性 TM (DTM) と可逆 TM (RTM) を定義する。TM T の任意の 2 つの異なる 5 項組

$$m_1 = [p_1, a_1, q_1, b_1, d_1], m_2 = [p_2, a_2, q_2, b_2, d_2]$$

に対して、

(i) 次の条件が成立つとき T を決定性 TM と呼ぶ。

$$p_1 = p_2 \text{ ならば, } a_1 \neq a_2.$$

(ii) 次の条件が成立つとき T を可逆 TM と呼ぶ。

$$q_1 = q_2 \text{ ならば, } d_1 = d_2 \text{ かつ } b_1 \neq b_2.$$

なお、以下で論じるチューリング機械は決定性のものに限ることにする。

万能チューリング機械 (UTM) は任意のチューリング機械の動作を模倣できる TM のことである。UTM U は、シミュレートされる TM T_i の初期テープと動作規則を符号化したものを初期テープとして与えることで TM T_i と等価な動作ができる。非可逆の UTM に関しては、過去に多くの研究がなされており、2 状態 18 記号 [8]、3 状態 9 記号 [3]、4 状態 6 記号 [8]、5 状態 5 記号 [7, 8]、6 状態 4 記号 [7]、9 状態 3 記号 [7]、18 状態 2 記号 [7] などの UTM が得られている (図 1)。

万能可逆チューリング機械 (URTM) は任意の TM を模倣できる RTM である。これに関する研究はまだ少ないが、17 状態 5 記号 URTM [5] と 15 状態 6 記号 URTM [6] が示されている (図 1)。

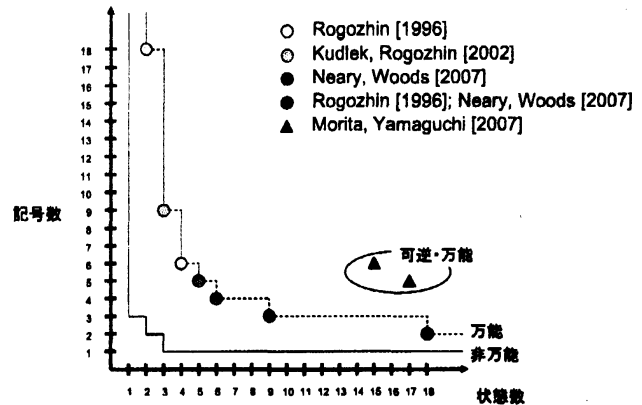


図 1: 非可逆な万能チューリング機械と万能可逆チューリング機械のサイズの世界記録

3 4 状態可逆チューリング機械

この節では次の命題が成り立つことを示す。

命題 3.1 任意の n 状態 m 記号の可逆チューリング機械に対し、それを模倣する 4 状態 $2mn+m$ 記号の可逆チューリング機械を構成することができる。

3.1 4 状態可逆チューリング機械への変換法

与えられた n 状態 m 記号 RTM を

$$T_A = (\{p_1, \dots, p_n\}, \{A_1, \dots, A_m\}, p_1, p_n, A_1, \delta_A)$$

とする。 T_A を模倣する 4 状態 RTM T_B は以下のようにして構成できる。

$$T_B = (\{q_{L1}, q_{L2}, q_{R1}, q_{R2}\}, \{B_i | i = 1, \dots, m\} \cup \{B_{ijx} | i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, x \in \{+, -\}\}, q_1, q_f, B_1, \delta_B)$$

但し、 T_B の初期状態 q_1 と最終状態 q_f をどう定めるかについては後で説明する。

T_B のテープ記号 B_i は T_A の A_i をそのまま表している。一方、 T_B は内部状態が 4 つしかないので、 T_A の内部状態 p_j とそのヘッド位置は記号 B_{ijx} をその位置に置くことによって表す。 T_A のヘッド移動を模倣するには、隣接する 2 つのます目に記号 B_{ij+} と $B_{i'j'-}$ を置き、2 つの状態 q_{L2}, q_{R2} を使って T_A の状態の情報を B_{ij+}

(送り側) から B_{ij-} (受け側) へ少しずつ送るという動作を反復する (これを「反復動作」と呼ぶ) ことで実現できる。また, q_{L1}, q_{R1} はこの反復動作の開始と終了に使われる。

T_B の5項組集合 δ_B を定めるために以下の準備をする。 T_A の全状態集合を $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, 記号集合を $S = \{A_1, \dots, A_m\}$ とし, P の部分集合 P_L, P_R, P_{null} を次のように定める。

$$\begin{aligned} P_L &= \{p' \mid \exists p \in P, \exists s, s' \in S : [p, s, p', s', L] \in \delta_A\} \\ P_R &= \{p' \mid \exists p \in P, \exists s, s' \in S : [p, s, p', s', R] \in \delta_A\} \\ P_{null} &= P - (P_L \cup P_R) \end{aligned}$$

P_L (または P_R) はヘッドが左 (右) に動いた直後にとり得る状態の集合, P_{null} は他の状態から遷移してこない状態の集合である。また T_A が RTM であることから, $P_L \cap P_R = \emptyset$ がいえる。

T_B の5項組の集合 δ_B は次のように与える。まず, 反復動作のための5項組集合として, 図2にあるものを δ_B に含める。これらは T_A の状態数と記号数だけに依存し, δ_A に含まれる個々の5項組には依存しないものである。次に, 各々の $[p_j, A_i, p_l, A_k, d] \in \delta_A$ に対して, 次の5項組を δ_B に含める。

$$[q_{L1}, B_{ij-}, q_{d1}, B_{kl+}, d] \text{ if } p_j \in P_L \cup P_{null} \quad (6a)$$

$$[q_{R1}, B_{ij-}, q_{d1}, B_{kl+}, d] \text{ if } p_j \in P_R \quad (6b)$$

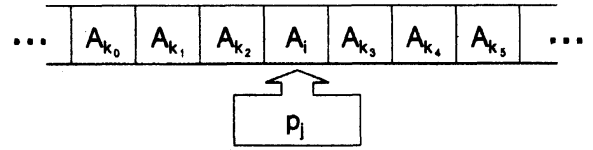
T_B の初期状態は, $p_1 \in P_L \cup P_{null}$ のとき q_{L1} となり, $p_1 \in P_R$ のとき q_{R1} となる。また, T_B の最終状態は, $p_n \in P_L$ のとき q_{L1} となり, $p_n \in P_R$ のとき q_{R1} となるが, いずれの場合もその状態で記号 B_{in-} ($i = 1, \dots, m$) を読んだときに停止する (それ以外の記号の場合は一般に計算を継続する)。

3.2 4状態可逆チューリング機械 T_B の動作

4状態 RTM T_B が T_A をどのように模倣するかを述べる。まず, T_A と T_B の計算状況の対応関係は図3の通りである。つまり, T_A が図3の上のような計算状況にあるとき, それに対応する T_B の計算状況を図3の下のものとして定める。但し, この図の x は, $p_j \in P_L \cup P_{null}$ のとき $x = L$, $p_j \in P_R$ のとき $x = R$ である。

図3の下計算状況に対して, まず (6a) または (6b) の5項組が適用される。これによって,

模倣される可逆TM T_A



模倣する4状態可逆TM T_B

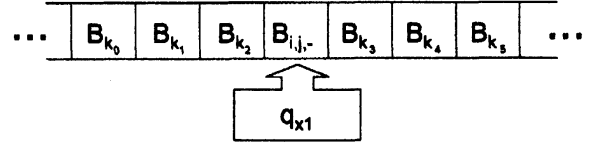


図3: RTM T_A の計算状況に対応する T_B の計算状況。

T_A が書き込む記号 A_k と T_A の新しい状態 p_l の情報が T_B の記号 B_{kl+} として書き込まれる。その後, 図2にある5項組を使って, p_l の情報を, ヘッドの移動方向に隣接するます目へ送る。このとき, B_{kl+} 中の $+$ は情報を送り出す記号であることを表す。まず, 図2の (1) または (2) によって左または右隣の B_i を, 情報の受け手であることを表す B_{i1-} に書き換える。この後は (3) と (4) による反復動作によって, T_A の内部状態の情報を移動し, それが終わると (5) によって $+$ 側の記号を B_k にする。これによって T_A の1ステップの動作の模倣が完了する。

例えば, RTM T_A が5項組 $[p_7, A_3, p_4, A_8, R]$ を実行したとする。このとき, RTM T_B は以下の動作を行う (図4の左側)。 T_B はまず, 状態 q_{R1} または q_{L1} で記号 $B_{3,7-}$ を読み込む。そして, それを $B_{8,4+}$ に書換え, 状態は q_{R1} に遷移し, 右に移動する。 T_A において, 右隣のます目の記号が A_{13} であれば, T_B ではそれに対応するます目の記号は B_{13} である。状態 q_{R1} でこのセルに移動すると, 記号 $B_{13,1-}$ に書換え, 状態 q_{L2} に遷移し, ヘッドは左へ動く。次に状態 q_{L2} で記号 $B_{8,4+}$ を読み込み, 記号 $B_{8,3+}$ に書換え, 状態 q_{R2} に遷移し, ヘッドは右へ動く。このような動作を反復し, T_A の状態の情報を移動し終われば, 状態 q_{R1} に遷移し, ヘッドは右へ動く。図4の右側は, 5項組 $[p_7, A_3, p_4, A_8, L]$ を実行した場合である。 q_{L1}, q_{R1} は反復動作の開始と終了を示すのに用いられていることが分かる。

<u>state:</u>	<u>symbol:</u>	$\rightarrow$	<u>state:</u>	<u>symbol:</u>	<u>direction:</u>	
q_{L1}	B_i	$\rightarrow$	q_{R2}	$B_{i,1,-}$	R	($i=1,2,\dots,m$) (1)
q_{R1}	B_i	$\rightarrow$	q_{L2}	$B_{i,1,-}$	L	($i=1,2,\dots,m$) (2)
q_{L2}	$B_{i,j,-}$	$\rightarrow$	q_{R2}	$B_{i,(j+1),-}$	R	($i=1,2,\dots,m$) (3)(a) ($j=1,2,\dots,n-1$)
q_{R2}	$B_{i,j,-}$	$\rightarrow$	q_{L2}	$B_{i,(j+1),-}$	L	($i=1,2,\dots,m$) (3)(b) ($j=1,2,\dots,n-1$)
q_{L2}	$B_{i,j,+}$	$\rightarrow$	q_{R2}	$B_{i,(j-1),+}$	R	($i=1,2,\dots,m$) (4)(a) ($j=2,\dots,n$)
q_{R2}	$B_{i,j,+}$	$\rightarrow$	q_{L2}	$B_{i,(j-1),+}$	L	($i=1,2,\dots,m$) (4)(b) ($j=2,\dots,n$)
q_{L2}	$B_{i,1,+}$	$\rightarrow$	q_{R1}	B_i	R	($i=1,2,\dots,m$) (5)(a)
q_{R2}	$B_{i,1,+}$	$\rightarrow$	q_{L1}	B_i	L	($i=1,2,\dots,m$) (5)(b)

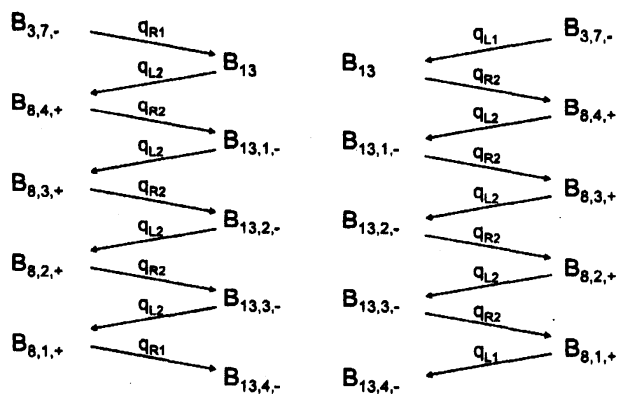
図 2: RTM T_B の反復動作のための 5 項組集合

図 4: 反復動作の様子. 左側は右シフト, 右側は左シフトの場合である.

3.3 T_B の可逆性

4 状態 RTM T_B が実際に可逆的であることは次のようにして確かめられる.

まず, δ_B 中の各 5 項組において, 遷移後の状態が q_{R2} になるのは図 2 の (1),(3a),(4a) のみである. これら 5 項組のヘッド移動方向はすべて右であり, しかも書換え後の記号がすべて異なっている. また, 遷移後の状態が q_{L2} になるのは (2),(3b),(4b) のみであり, 上と同様のことが言える. 従って, 遷移後の状態が q_{R2}, q_{L1} である 5 項組については RTM の定義に合致している.

次に, 遷移後の状態が q_{R1} になりうる 5 項組

は (5a),(6a),(6b) のみである. これらはいずれもヘッドの移動方向は右であり, また, (5a) は (6a) や (6b) とは書換え後の記号が異なっている. さらに, T_A が可逆的であることから, 各々の p_i と A_k に対して, (6a) または (6b) のタイプの 5 項組で書換え後の記号が B_{kl+} となるものは高々 1 つしか存在しない. 従って, 遷移後の状態が q_{R1} である 5 項組については RTM の定義に合致している. これと同様のことは, 遷移後の状態が q_{L1} である 5 項組についても言える.

以上により, 構成された T_B は可逆性の定義を満たしていると結論できる.

4 むすび

本稿では, 任意の可逆チューリング機械をそれと等価な 4 状態可逆チューリング機械に変換するアルゴリズムを設計した. このことから 4 状態の万能可逆チューリング機械が構成できることがわかる. 特に, 17 状態 5 記号の万能可逆チューリング機械をこの方法で変換すると, 4 状態 175 記号の万能可逆チューリング機械が得られる. より少ない記号数の 4 状態万能可逆チューリング機械の構成や, 2 状態および 3 状態の万能可逆チューリング機械が存在するか否かの問題は今後の課題として残される.

参考文献

- [1] C.H. Bennett, Logical reversibility of computation, *IBM J. Res. Dev.*, **17**, 525–532 (1973).
- [2] M. Cook, Universality in elementary cellular automata, *Complex Systems*, **15**, 1–40 (2004).
- [3] M. Kudlek, and Y. Rogozhin, A universal Turing machine with 3 states and 9 symbols, *Proc. of DLT 2001*, LNCS-2295, Springer-Verlag, 311–318 (2002).
- [4] Morita, K., Shirasaki, A., and Gono, Y., A 1-tape 2-symbol reversible Turing machine, *Trans. IEICE Japan*, **E-72**, 223–228 (1989).
- [5] K. Morita, and Y. Yamaguchi, A universal reversible Turing machine, *Proc. of MCU 2007*, LNCS-4664, Springer-Verlag, 90–98 (2007).
- [6] K. Morita, Reversible computing and cellular automata — a survey, *Theoretical Computer Science*, (to appear) (2008).
- [7] T. Neary, and D. Woods, Four small universal Turing machines, *Proc. of MCU 2007*, LNCS-4664, Springer-Verlag, 242–254 (2007).
- [8] Y. Rogozhin, Small universal Turing machines, *Theoretical Computer Science*, **168**, 215–240 (1996).
- [9] C. E. Shannon, A universal Turing machine with two internal states, *Automata Studies*, Princeton University Press, 157–161 (1956).