

Cabling, Twisting, and Branching on Higher Dimensional Knots

九州大理 金信泰造 (Taizo Kanenobu)

高次元 knot の構成法として, Artin [1] の spinning, Zeeman [11] の twist spinning 等が知られている. また, satellite knot やその特別の場合である cable knot は同じ次元の knot の構成法である. [6] このノートでは, knot を $(n+2)$ -manifold への n -sphere の埋め込みと考えると, さらに, knot の cyclic branched cover と knot の引き戻しの pair を branching という knot の構成法とみて表題に示した3つの関係について調べてみる.

§1. Branching

定義 1.1. M を oriented, connected, closed $(n+2)$ -manifold, k を n -sphere とするとき locally flat pair (M, k) を n -knot とする. NK^n を n -knot 全体の集合とする. $\square$

Lemma 1.2. (Kato [7] Wall [10]) (M, k) を n -knot とすると, k は $S^n \times D^2$ と同相な regular neighborhood をもち, k は $S^n \times$

0 (0 は D^2 の中心) に対応する. $\square$

K の exterior $E(K)$ とかくと, この Lemma により同相写像 $\nu: S^n \times S^1 \rightarrow \partial E(K)$ が存在する.

[11, Lemma 2] と同様にして次の Lemma を得る.

Lemma 1.3. $K \in \mathcal{BK}^n$, $n \geq 1$. $\nu: S^n \times S^1 \rightarrow \partial E(K)$ 上の同相写像で, $H_1(E(K); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(\mu) + A$ とする μ は meridian loop $\nu(* \times S^1)$ に対応する生成元で, A は Abel 群. $g_m: H_1(E(K); \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}_m$ を $g_m(\mu) = +1$, $g_m(a) = 0$ ($a \in A$) で与えられる epimorphism とする. $n \geq 2$ のとき, g_0 を表現する map $p: E(K) \rightarrow S^1$ で, $p \circ \nu: S^n \times S^1 \rightarrow S^1$ が射影となつてゐるものが存在する. $n = 1$ のときは同相写像 $\nu': S^n \times S^1 \rightarrow \partial E(K)$ で, 同じ性質をみたすものが存在する. $\square$

定義 1.4. Lemma 1.3 の条件をみたす n -knot 全体 $\mathcal{BK}^n$ とし, $\text{pair}(\nu, p)$ ($n \geq 2$) ((ν', p) , $n = 1$) を K の projection とよぶ. $\square$

定義 1.5. $K = (M, \ell) \in \mathcal{BK}^n$, (ν, p) を K の projection とする. $E(K)$ の a -fold cyclic covering $E_a(K) = \{(y, \theta) \in E(K) \times S^1 \mid p(y) = a\theta\}$ とする. これは $\pi_1(E(K)) \xrightarrow{\text{Hurwitz}} H_1(E(K); \mathbb{Z}) \xrightarrow{g_a} \mathbb{Z}_a$ に関する covering である. $\gamma_a: S^n \times S^1 \rightarrow \partial E_a(K)$ を $\gamma_a(x, \theta) = (\gamma(x, a\theta), \theta)$ で定義された同相写像, $p_a: E_a(K) \rightarrow S^1$ を $p_a(x, \theta) = \theta$ で定義された map とすると $B_a(K) = (S^n \times D^2 \bigcup_{\gamma_a} E_a(K), S^n \times 0) \in \mathcal{BK}^n$ で,

projection (ν_a, p_a) をもつ。□

次の性質は明らかである。

Proposition 1.6. $K, K_1, K_2 \in BK^n, n \geq 1$.

i) $B_1(K) = K$, ii) $B_{a \circ b}(K) = B_a(B_b(K))$, iii) $B_a(K_1 \# K_2) = B_a(K_1) \# B_a(K_2)$.

□

定義 1.7. $K = (M, k) \in NK^n, n \geq 2$. $\nu: S^n \times S^1 \rightarrow \partial E(K)$ を同相写像, $t: S^n \times S^1 \rightarrow S^n \times S^1$ を $t(x, \theta) = (p_\theta(x), \theta)$, (p_θ は S^n の S^{n-2} に関する回転) で与えられた同相写像とするとき, $K^* = (S^n \times D^2 \bigcup_{\nu \circ t} E(K), S^n \times 0) \in NK^n$ を K の Gluck surgery で得られた knot とする。□

$E(K)$ と同相な exterior をもつ knot は, K または K^* であることが知られている。[4, 2, 8]

また, $K \in BK^n$ に対し, (ν, p) を projection とすると, $K^* \in BK^n$ に対し, $(\nu t, p)$ がその projection である。

Proposition 1.8. $K_1, K_2 \in NK^n, n \geq 2$.

$(K_1 \# K_2)^* = K_1^* \# K_2^*$. □

(証明) $S^n = D_+^n \cup D_-^n$, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, $D_+^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$, $D_-^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}$, $r: D_\pm^n \rightarrow D_\mp^n$ を reflection $r(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$, $K_i = (S^n \times D^2 \bigcup_{\nu_i} E(K_i), S^n \times 0) \in NK^n, n \geq 2$, $\nu_i = \nu_i|_{D_\pm^n \times S^1}$ とする。 ($i=1, 2$)

$E(K_1 \# K_2) = E(K_1) \cup_{V_1 \cup V_2} E(K_2)$ とする, $K_1 \# K_2 = (S^n \times D^2 \cup_{V_1 \cup V_2} E(K_1 \# K_2), S^n \times 0)$ とする. $t_{\pm} = t|_{D_{\pm}^2 \times S^1}$ とする
 と, $(V_i t)_{\pm} = V_{i\pm} t_{\pm}$ なのを, $(V_1 t)_+ \cup (V_2 t)_- = (V_1 \cup V_2)_- t$,
 $(V_2 t)_+ \cup (V_1 t)_- = V_2 \cup V_1 t$ となり Proposition が示される. $\square$

Proposition 1.9. $K \in BK^n$, $n \geq 2$.

$$Ba(K^*) = \begin{cases} Ba(K)^* & a: \text{odd} \\ Ba(K) & a: \text{even} \end{cases} \quad \square$$

§2. Twisting

定義 2.1. Proposition 1.8 の notation を使う. $K = (M, k) \in BK^n$

に対し $\overset{\circ}{K} = (\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{k}) = (D_+^n \times D^2 \cup_{V_+} E(K), D_+^n \times 0)$ は disk pair
 であるか, これを K に関する disk knot と呼ぶ. $\square$

定義 2.2. $K = (M, k) \in BK^n$, $Ba(K) = (M_a, k_a)$, $\tau_a: M_a \rightarrow M_a$
 は covering translation, i.e. $\tau_a: S^n \times D^2 \rightarrow S^n \times D^2$ は,

$$\tau_a(x, (r, \theta)) = (x, (r, \theta - \frac{1}{a}))$$

$\tau_a: E_a(K) \rightarrow E_a(K)$ は, $\tau_a(y, \theta) = (y, \theta - \frac{1}{a})$ で定義される. $Ba(\overset{\circ}{K}) = (Ba(K))^{\circ} = (\overset{\circ}{M}_a, \overset{\circ}{k}_a)$

に対し, $\overset{\circ}{\tau}_a = \tau_a|_{\overset{\circ}{M}_a}$ と定義する. $\partial Ba(\overset{\circ}{K}) = (\partial \overset{\circ}{M}_a, \partial \overset{\circ}{k}_a)$ は,
 trivial $(n+1)$ -knot なのを, $\overset{\circ}{\tau}_a|_{\partial \overset{\circ}{M}_a}$ は軸 $\partial \overset{\circ}{k}_a$ に関する回転
 $P_{\frac{1}{a}}$ と考えられる. $\partial \overset{\circ}{M}_a \times [0, 1] \hookrightarrow \overset{\circ}{M}_a$ は $\partial \overset{\circ}{M}_a \times 0 \in \partial \overset{\circ}{M}_a$ に同一視
 するような collar とする. $\rho_a: \overset{\circ}{M}_a \rightarrow \overset{\circ}{M}_a$ を次のように定義す
 る: collar の complement において $\rho_a = \overset{\circ}{\tau}_a$, collar では,

$$\alpha_a(x, s) = \begin{cases} (x, s) & x \in \partial \dot{M}_a, 0 \leq s \leq \frac{1}{3}, \\ (p_{\partial S^{-1}/a}(x), s) & \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3}, \\ (p_{1/a}(x), s) & \frac{2}{3} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

特に $\alpha_1 = \alpha$ とおく。□

定義 2.3. $K = (M, k) \in \mathcal{BK}^n$, $n \geq 1$. K の a -twist spin Σ について定義する: $T_a(K) = (\dot{M} \times_{\alpha_a} S', \dot{k} \times_{\alpha_a} S') / \sim$, 但し $(x, 0) \sim (x, 0)$, $\forall x \in \partial \dot{M}$, $\forall \theta \in S'$. □

このように一般化しても, 次の Goldsmith-Kauffman の interchanging theorem [5, Theorem 1.10] が成り立つ.

Proposition 2.4. $K = (M, k) \in \mathcal{BK}^n$, $n \geq 1$, $T_1(K) = (M_{<1>}, k_{<1>})$ とすると triple の間の同相写像 $R: (M_{<1>}, \partial \dot{M}, k_{<1>}) \rightarrow (M_{<1>}, k_{<1>}, \partial \dot{M})$ が存在する. □

従って [5] の多くの twist spin に関する結果が成り立つ. ここでは Zeeman の fibration theorem [11, Main Theorem] と, [5] の主定理を挙げよう.

Proposition 2.5. (cf. [5, Lemma 7.4]) $K \in \mathcal{BK}^n$, $n \geq 1$, $a > 0$ とする. $T_a(K)$ は fibered $(n+1)$ -knot Σ , fiber は $\dot{M}_a \Sigma$, monodromy は, $\Sigma_a \Sigma$ である. □

Proposition 2.6. ([5, Theorem *], cf. [3, Theorem 6]) $K \in \mathcal{BK}^n$, $n \geq 1$, $a, b > 0$, $g = \text{g.c.d.}(a, b)$ とする.

$$|B_a T_b(K)| \underset{\text{同相}}{\cong} \begin{cases} |B_0 T_2(K)| & , \quad ab: \text{even}, \\ |B_2 T_2(K)| & , \quad ab: \text{odd} \end{cases}$$

但し. $K = (M, R)$ に對して, $|K| = M$, fiber が F , monodromy が h の fibered knot K に對して. $B_0(K) \in$, fiber が F , monodromy が identity の fibered knot を定義する. $\square$

Proposition 2.7. ([5, Theorem **]) Proposition 2.6 と同じ条件の下で,

$$T_a T_b(K) = \begin{cases} T_2 T_0(K) & , \quad ab: \text{even}, \\ T_2 T_2(K) & , \quad ab: \text{odd}. \end{cases} \quad \square$$

Proposition 2.5 より次の Proposition を得る.

Proposition 2.8. ([5, Theorem 7.6], cf. [9]) $K \in \mathcal{BK}^n$, $n \geq 1$, $a, b > 0$. $B_a T_b(K) = (B_b T_a(K))^*$. $\square$

Proposition 2.9. $K \in \mathcal{BK}^n$, $n \geq 1$. $a \geq 0$, $b > 0$.

$$T_a B_b(K) = B_b T_a(K) \quad \square$$

Remark. $ab \neq 0$ ならば, この knot は fiber が M_{ab} で, monodromy が γ_{ab}^b の fibered knot である. $\square$

§ 3. Cabling

定義 3.1. $K \in \mathcal{NK}^n$, O : trivial n -knot, $n \geq 2$, とする.

$O = (S^{n+2}, S^n)$ に對して, $l \in \mathcal{lk}(S^n; l) = a$ とする. a は a 本の単純閉曲線とする. $V \in l$ の tubular neighborhood とする.

$R: S^{n+2} - \text{int } V \rightarrow N(K)$ を同相写像とする. K に関する a -

Cable knot を次で定義する: $\Gamma_a(K) = (M, h(S^n))$. $\square$

次の性質は [6] と同様に示される.

Proposition 3.2. $K, K_1, K_2 \in \mathcal{NK}^n$, $n \geq 2$.

(i) $\Gamma_0(K) = 0$, (ii) $\Gamma_1(K) = K$, (iii) $\Gamma_{a+b}(K) = \Gamma_a \Gamma_b(K)$,

(iv) $\Gamma_a(K_1 \# K_2) = \Gamma_a(K_1) \# \Gamma_a(K_2)$,

(v) $\Gamma_a(K)^* = \begin{cases} \Gamma_a(K) & a: \text{even}, \\ \Gamma_a(K^*) & a: \text{odd}. \end{cases} \quad \square$

Theorem 3.3. $K \in \mathcal{BK}^n$, $n \geq 2$, g.c.d. $(r, s) = 1$ とする.

$$\Gamma_{rs} \Gamma_{rs}(K) = \begin{cases} \mathfrak{z} \Gamma_s \Gamma_r(K)^* & s: \text{even}, r, s: \text{odd}, \\ \mathfrak{z} \Gamma_s \Gamma_r(K) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

但し $\mathfrak{z}K = \underbrace{K \# \cdots \# K}_s$. $\square$

この Theorem は, [6] の Theorem の一般化である.

Remark. $\mathcal{NK}^n$, $\mathcal{BK}^n$ の knot は, $\#$ に関して可換半群をなすが, B_a , Γ_a , T_a , $*$, は半群の準同型写像とみなすことができる.

References

1. Artin, E.: Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R_4 .
Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4 (1925) 174-177.
2. Browder, W.: Diffeomorphisms of 1-connected manifolds.
Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967) 155-163.
3. Giffen, C. H.: The generalized Smith conjecture. Amer. J.
Math. 88 (1966) 187-198.
4. Gluck, H.: The embedding of two-spheres in the four-sphere.
Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962) 308-333.
5. Goldsmith, D. L. and Kauffman, L. H.: Twist spinning revisited.
Trans. Amer. Math. Soc. 239 (1978) 229-251.
6. Kanenobu, T.: Higher dimensional cable knots and their finite
cyclic covering spaces. to appear.
7. Kato, M.: Combinatorial prebundles Part II. Osaka J. Math.
4 (1967) 305-311.
8. Kato, M.: A concordance classification of PL homeomorphisms
of $S^p \times S^q$. Topology 8 (1969) 371-383.
9. Viro, O. Ya.: Nonprojecting isotopies and knots with homeomor-
phic coverings. J. Soviet Math. 12 (1979) 86-96.
10. Wall, C.T.C.: Locally flat PL submanifolds with codimension
two. Proc. Camb. Phil. Soc. 63 (1967) 5-8.
11. Zeeman, E. C.: Twisting spun knots. Trans. Amer. Math. Soc.
115 (1965) 471-495.