

回転入力をもつ2次元オートマタ

(和形と積形の関係)

山口大工学部 井上克司
高浪五男
谷口 弘

1. まえがき

この数年間、2次元テープ上で動作する各種のオートマタが導入され、その受理能力、閉包性などが詳細に調べられてきた。^{[1]~[7]} それらのオートマタの中には、入力2次元テープを1方向的に(例えば、上から下の方向へ、あるいは左上から右下の方向へ)走査してそのテープの受理の可否を判定するものがある。^{[1]~[3]} 筆者らは先に、このような1方向的な走査を行なうオートマトンをいくつか組合せて用い、入力2次元テープの受理の可否を決定するという性質をもつ新しいタイプの2次元オートマトンを提案した。^{[5],[6]} そこでは特に、入力テープを様々な方向からながめるひとつの手段として、入力テープを(90°, 180°, あるいは270°だけ時計方向に)回転させ、各回転された入力をそれぞれ1方向直並列アレイアクセプタ^{[1],[2]}により走査し、走査して得られた結果

を積($\wedge$)形式あるいは和($\vee$)形式で組合せて受理の可否を判定する2次元オートマタの受理能力について考察した。

本稿では、各回転された入力を1方向直並列アレイアクセプタによって走査し、走査して得られた結果を積形式で組合せる場合と和形式で組合せる場合とで、受理能力の間にいかなる関係が生じるかについて議論する。

2. 準備

記号の有限集合 Σ 上の2次元テープとは、 Σ の要素からなる m 行 n 列($m, n \geq 1$)の方形配列をいう。 Σ 上のすべての2次元テープの集合を $\Sigma^{(2)+}$ と記す。2次元テープ $x \in \Sigma^{(2)+}$ に対し、 $l_1(x), l_2(x)$ はそれぞれ x の行の数、列の数を表し、又、 $x_{i,j}$ ($1 \leq i \leq l_1(x), 1 \leq j \leq l_2(x)$)は、 i 行 j 列に位置する x 上の記号を表す。更に、 $x[(i,j), (i',j')]$ は、 $1 \leq i \leq i' \leq l_1(x)$ 且つ $1 \leq j \leq j' \leq l_2(x)$ のときのみ次の(i),(ii)を同時に満たす2次元テープ z として定義される。

$$(i) \quad l_1(z) = i' - i + 1 \ \& \ l_2(z) = j' - j + 1 .$$

$$(ii) \quad \text{各 } k, r \ (1 \leq k \leq l_1(z), 1 \leq r \leq l_2(z)) \text{ に対し、}$$

$$z_{k,r} = x_{k+i-1, r+j-1} .$$

$x[(i,j), (i',j')]$ を x の $[(i,j), (i',j')]$ -部分と呼ぶ。2次元テープ $x \in \Sigma^{(2)+}$ に対し、 x を 90° 時計方向に回転

して得られる2次元テープを x^R と記す。 $(x^R)^R, ((x^R)^R)^R$ をそれぞれ x^{RR}, x^{RRR} と書くこともある。すなわち、 x^{RR}, x^{RRR} はそれぞれ x を $180^\circ, 270^\circ$ 時計方向に回転して得られるテープを表す。明らかに、 $(x^{RR})^{RR} = x, (x^{RRR})^R = x$ などが成り立つ。 T をある2次元テープの集合とする。このとき、

$$T^R = \{ x^R \mid x \in T \},$$

$$T^{RR} = \{ x^{RR} \mid x \in T \},$$

$$T^{RRR} = \{ x^{RRR} \mid x \in T \}$$

とする。演算‘ R ’, ‘ RR ’, ‘ RRR ’をそれぞれ $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 回転演算と呼ぶ。明らかに、 $(T^{RRR})^R = T$ などが成り立つ。

次に、本稿で議論の対象となる2次元オートマタを導入しよう。まず、いくつかの2次元オートマタを積($\wedge$)形式で組合せて得られるオートマトンを導入する。 M_1, M_2, M_3, M_4 をある2次元オートマタとする。このとき、 $M = (M_1 \wedge M_2^R \wedge M_3^{RR} \wedge M_4^{RRR})$ は、 M_1, M_2, M_3, M_4 から構成される次のような2次元オートマトンである。 x を M への入力2次元テープとする。 x, x^R, x^{RR}, x^{RRR} がそれぞれ M_1, M_2, M_3, M_4 に入力されて受理の可否が調べられ、 $x \in T(M_1)$ 且つ $x^R \in T(M_2)$ 且つ $x^{RR} \in T(M_3)$ 且つ $x^{RRR} \in T(M_4)$ [†]であるときに限って、 x

[†] N をある2次元オートマトンとする。 N で受理されるすべての2次元テープの集合を $T(N)$ と記す。

は M で受理される。すなわち、 M で受理されるすべての 2 次元テープの集合 $T(M)$ は、次のように定義される。

$$T(M) = \{ x \mid x \in T(M_1) \wedge x^R \in T(M_2) \wedge x^{RR} \in T(M_3) \\ \wedge x^{RRR} \in T(M_4) \} \dagger$$

同様に、 M_1, M_2, M_3, M_4 から種々の 2 次元オートマトンが定義される。

$$M' = (M_1 \wedge M_2^R \wedge M_3^{RR}) .$$

$$M'' = (M_2 \wedge M_1^R \wedge M_3^{RRR}) .$$

$$M''' = (M_4 \wedge M_3^{RR} \wedge M_1^{RRR}) .$$

$$N = (M_1 \wedge M_2^R) .$$

$$N' = (M_2 \wedge M_3^{RR}) .$$

$$N'' = (M_3 \wedge M_4^{RRR}) .$$

などがそうである。例えば、 M'' は、 M_1, M_2, M_3 から構成される 2 次元オートマトンであり、 M'' への入力 2 次元テープ x は、 x が M_2 で受理され、 x^R が M_1 で受理され、しかも x^{RRR} が M_3 で受理されるときに限って、 M'' で受理される。すなわち、

$$T(M'') = \{ x \mid x \in T(M_2) \wedge x^R \in T(M_1) \wedge x^{RRR} \in T(M_3) \}$$

である。 $\ddagger$ 同様に、

$\dagger$ ‘ $\wedge$ ’ は、‘且つ’を表す。

$\ddagger$ 定義から推察されるように、 $(M_1^R \wedge M_2 \wedge M_3^{RRR}), (M_2 \wedge M_3^{RRR} \wedge M_1^R)$ などとはすべて $M'' = (M_2 \wedge M_1^R \wedge M_3^{RRR})$ と同じオートマトンを表すと考えてよい。

$$T(M') = \{x \mid x \in T(M_1) \wedge x^R \in T(M_2) \wedge x^{RR} \in T(M_3)\},$$

$$T(M'') = \{x \mid x \in T(M_4) \wedge x^{RR} \in T(M_3) \wedge x^{RRR} \in T(M_1)\},$$

$$T(N) = \{x \mid x \in T(M_1) \wedge x^R \in T(M_2)\},$$

$$T(N') = \{x \mid x \in T(M_2) \wedge x^{RR} \in T(M_3)\},$$

$$T(N'') = \{x \mid x \in T(M_3) \wedge x^{RRR} \in T(M_4)\},$$

である。

いま、 C_1, C_2, C_3, C_4 をそれぞれ2次元テープ上のあるオートマタの集合とする。このとき、次のような2次元テープの集合の族を考えることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^R \wedge C_3^{RR} \wedge C_4^{RRR}] &= \{T \mid \text{ある } M = (M_1 \wedge M_2^R \wedge \\ &M_3^{RR} \wedge M_4^{RRR}) \text{ に対し、} T = T(M) \text{ (但し、各 } i \text{ (} 1 \leq i \leq 4 \text{)} \\ &\text{に対し } M_i \in C_i \text{)}\}^\dagger, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^R \wedge C_3^{RR}] &= \{T \mid \text{ある } M = (M_1 \wedge M_2^R \wedge M_3^{RR}) \text{ に} \\ &\text{対し、} T = T(M) \text{ (但し、各 } i \text{ (} 1 \leq i \leq 3 \text{)} \text{ に対し } M_i \in C_i \text{)}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^{RR}] &= \{T \mid \text{ある } M = (M_1 \wedge M_2^{RR}) \text{ に対し、} T = \\ &T(M) \text{ (但し、} M_1 \in C_1, M_2 \in C_2 \text{)}\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^R \wedge C_3^{RRR}], \mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^{RR} \wedge C_3^{RRR}], \mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^{RR}],$
 $\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^{RRR}]$ なども同様に定義される。

上記の $\wedge$ (且つ) を ' $\vee$ ' (または) に書き換えることにより、

$\dagger \mathcal{L}[C_2^R \wedge C_1 \wedge C_3^{RR} \wedge C_4^{RRR}], \mathcal{L}[C_1 \wedge C_3^{RR} \wedge C_2^R \wedge C_4^{RRR}]$ などはいずれも $\mathcal{L}[C_1 \wedge C_2^R \wedge C_3^{RR} \wedge C_4^{RRR}]$ と同じ2次元テープの集合の族を表わすと考えてよい。

いくつかの2次元オートマタを和($\vee$)形式で組合せて得られるオートマタ, 並びにそれらのオートマタで受理される2次元テープの集合の族を導入することができる。これらの和形式のオートマタに関する諸定義については、文献[6], [7]を参照されたい。

本稿では、1方向決定性直並列アレイクセプタ($1WDPSA$)[↓] 並びに1方向非決定性直並列アレイクセプタ($1WPISA$)[↓] を積形式で組合せて得られる2次元オートマタと和形式で組合せて得られる2次元オートマタの間の受理能力の関係を明らかにする。以下、簡単のため、すべての $1WDPSA$ ($1WPISA$)の集合を $\mathcal{D}(N)$ と記す。いま、 C を2次元テープ上のあるオートマタの集合とする。このとき、

$$\mathcal{L}[C] = \{ T \mid \text{ある } M \in C \text{ に対し, } T = T(M) \}$$

とする。

なお、本稿では、入力2次元テープはすべて正方形に限定されているものとする。

文献[5], [6]で得られている主な結果を示して、本章を終る。

定理 1 各 $\theta \in \{ \wedge, \vee \}$ に対し、 $\mathcal{L}[N]$ には含まれるが

[↓] $1WDPSA$, $1WPISA$ の定義については、文献[1], [2]を参照されたい。
 $1WDPSA$, $1WPISA$ は文献[1]では、それぞれ $DOWPS$, $OWPS$ と記されている。

$\mathcal{L}[D \theta D^R \theta D^{RR} \theta D^{RRR}]$ には含まれない集合が存在する。

定理2 各 $\theta \in \{\wedge, \vee\}$ に対し、次が言える。

(1) $\mathcal{L}[D] \subsetneq \mathcal{L}[D \theta D^R] \subsetneq \mathcal{L}[D \theta D^R \theta D^{RR}] \subsetneq \mathcal{L}[D \theta D^R \theta D^{RR} \theta D^{RRR}]$.

(2) $\mathcal{L}[D \theta D^R]$, $\mathcal{L}[D \theta D^{RR}]$, $\mathcal{L}[D \theta D^{RRR}]$ は、互いに比較不能である。

(3) $\mathcal{L}[D \theta D^R \theta D^{RR}]$, $\mathcal{L}[D \theta D^R \theta D^{RRR}]$, $\mathcal{L}[D \theta D^{RR} \theta D^{RRR}]$ は、互いに比較不能である。

定理3 各 $\theta \in \{\wedge, \vee\}$ に対し、次が言える。

(1) $\mathcal{L}[N] = \mathcal{L}[N \theta N^{RR}]$.

(2) $\mathcal{L}[N] \subsetneq \mathcal{L}[N \theta N^R]$

(3) $\mathcal{L}[N \theta N^R] = \mathcal{L}[N \theta N^{RRR}] = \mathcal{L}[N \theta N^R \theta N^{RR} \theta N^{RRR}]$

注1 定理3の(3)より、例えば、各 $\theta \in \{\wedge, \vee\}$ に対し、 $\mathcal{L}[N \theta N^R \theta N^{RR}] = \mathcal{L}[N \theta N^R \theta N^{RRR}] = \mathcal{L}[N \theta N^{RR} \theta N^{RRR}]$ であることが示される。

3. 和型と積型の関係

1WDPsA, 1WPsA を和形式で組合せた2次元オートマタと積形式で組合せた2次元オートマタの受理能力の関係については、既に文献[6]で一部考察が行なわれており、次

の結果の成り立つことが示されている。

定理4 $\mathcal{L}[N \vee N^R \vee N^{RR} \vee N^{RRR}]$ には含まれないが
 $\mathcal{L}[D \wedge D^R]$, $\mathcal{L}[D \wedge D^{RR}]$ には含まれる集合が存在する。

次の定理の(1)が示すように、 $\mathcal{L}[D \wedge D^{RR}]$ に対しては、
 定理4と類似な関係は成立しない。

定理5 (1) $\mathcal{L}[D \wedge D^{RR}] \subsetneq \mathcal{L}[N]$
 (2) $\mathcal{L}[D \vee D^{RR}] \subsetneq \mathcal{L}[N]$

証明 明らかに、各 $\theta \in \{\wedge, \vee\}$ に対し、 $\mathcal{L}[D \theta D^{RR}]$
 $\subseteq \mathcal{L}[N \theta N^{RR}]$ である。このことと定理3の(1)より、 $\mathcal{L}[D \theta D^{RR}] \subseteq \mathcal{L}[N]$ 。真の包含性の成り立つことは、定理1
 と $\mathcal{L}[D \theta D^{RR}] \subseteq \mathcal{L}[D \theta D^R \theta D^{RR} \theta D^{RRR}]$ であることから
 明らか。

次に、本稿の主要結果である三つの定理を導こう。

定理6 $\mathcal{L}[D \vee D^R \vee D^{RR} \vee D^{RRR}]$ には含まれないが、
 $\mathcal{L}[D \wedge D^{RR}]$ には含まれる集合が存在する(証明中の T_1 が
 そのような集合の一例である)。

証明 $T_1 = \{x \in \{0, 1\}^{(2)+} \mid \exists n \geq 2 [l_1(x) = l_2(x) = 4n \ \& \ \exists i (2n+2 \leq i \leq 3n) [x[(i, 1), (i, n)] = x[(2n, n+1), (2n, 2n)]] \ \& \ \exists j (n+1 \leq j \leq 2n-1) [x[j, 3n+1), (j, 4n)] = x[(2n+1, 2n+1), (2n+1, 3n)]]]\}$ とする(図1に T_1 に含まれるテープの

例を示す)。

また、 $T_2 = \{x \in \{0, 1\}^{(2)+} \mid \exists n \geq 2 [l_1(x) = l_2(x) = 4n \text{ \& } \exists i' (2n+2 \leq i' \leq 3n) [x[(i', 1), (i', n)] = x[(2n, n+1), (2n, 2n)]]]\}$ とする。容易に確かめられるように、 T_2 を受理するような 1WDP SA M' が存在する。 M' を組合せて得られる $M'' = (M' \wedge M'^{RR})$ に対し、 $T(M'') = T_1$ が成り立つことは明らかである。従って、 $T_1 \in \mathcal{L}[\mathcal{D} \wedge \mathcal{D}^{RR}]$ である。以下に、 $T_1 \in \mathcal{L}[\mathcal{D} \vee \mathcal{D}^R \vee \mathcal{D}^{RR} \vee \mathcal{D}^{RRR}]$ を示す。いま、 T_1 を受理するような $M = (M_1 \vee M_2^R \vee M_3^{RR} \vee M_4^{RRR})$ (各 $M_i \in \mathcal{D}$) が存在するとし、 M_i の各セルの状態数を k_i とする ($1 \leq i \leq 4$)。いま、各 $n \geq 2$ に対し、

$V_1(n) = \{x \in \{0, 1\}^{(2)+} \mid l_1(x) = l_2(x) = 4n \text{ \& } (x[(n+1, 3n+1), (2n-1, 4n)], x[(2n, n+1), (2n, 2n)], x[(2n+1, 2n+1), (2n+1, 3n)], x[(2n+2, 1), (3n, n)]) \text{ はすべて } \{0, 1\}^{(2)+} \text{ に含まれ、これ以外の } x \text{ の部分は記号 '0' のみからなる)}\}$,

$V_2(n) = V_1(n)^R$,

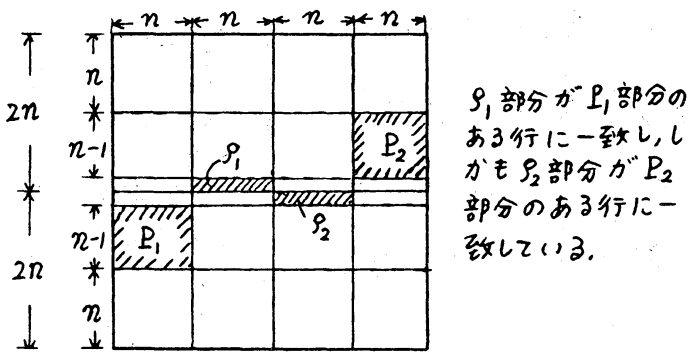


図1. T_1 に含まれるテープの例

$$Y_1(n) = \{y \in \{0, 1\}^{(2)^+} \mid l_1(y) = n-1 \text{ \& } l_2(y) = n\},$$

$$Y_2(n) = Y_1(n)^R,$$

$$W(n) = \{w \in \{0, 1\}^{(2)^+} \mid l_1(w) = 1 \text{ \& } l_2(w) = n\}$$

とする (図2に $V_1(n)$ に含まれるテ-フの例を示す)。各 $y \in Y_1(n)$ に対し、

$$\text{row}(y) = \{w \in W(n) \mid \exists i (1 \leq i \leq l_1(y) = n-1) [w = y[(i, 1), (i, n)]]\}$$

とし、 $Y_1(n)$ の中の2つのテ-フ y, y' の間の関係 ' E ' を次のように定義する。

$$y E y' \iff \text{row}(y) = \text{row}(y')$$

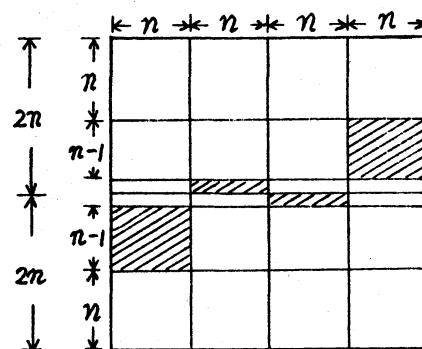
関係 E は同値関係であり、この同値関係のもとで $Y_1(n)$ のテ-フを類別したときの同値類の総数 $p(n)$ は、

$$p(n) = \binom{2^n}{1} + \binom{2^n}{2} + \cdots + \binom{2^n}{n-1}$$

となる。この $p(n)$ 個の同値類を $C_1, C_2, \dots, C_{p(n)}$ と記す。

いま、各 $y \in Y_1(n)$ に対し、

$\text{conf}_1(y) (\text{conf}_3(y)) \triangleq$ その $[(n+1, 3n+1), (2n-1, 4n)]$ -部分が y であるような $V_1(n)$ に含まれ



斜線部分は $\{0, 1\}^{2n}$ に含まれ、斜線部分以外はすべて記号 '0' からなる。

図2. $V_1(n)$ に含まれるテ-フの例。

るテープ[♯]を $M_1(M_3)$ が読むときに、そのテープの第 $2n-1$ 行目を下方に離れた直後の $M_1(M_3)$ のコンフィグレーション[♯]とし、又、各 $y \in Y_2(n)$ に対し、

$\text{conf}_2(y)(\text{conf}_4(y)) \triangleq$ その $[(1, n+1), (n, 2n-1)]$ -部分が y であるような $v_2(n)$ に含まれるテープ[♯]を $M_2(M_4)$ が読むときに、そのテープの第 n 行目を下方に離れた直後の $M_2(M_4)$ のコンフィグレーション

とする。 $M_1(M_3)$ が $v_1(n)$ に含まれるテープを読むときに、それらのテープの第 $2n-1$ 行目を下方に離れた直後に入り得る $M_1(M_3)$ の異なるコンフィグレーションの総数を $g_1(n)$ ($g_3(n)$) とすると、

$$g_1(n) \leq k_1^{4n},$$

$$g_3(n) \leq k_3^{4n}$$

である。また、 $M_2(M_4)$ が $v_2(n)$ に含まれるテープを読むときに、それらのテープの第 n 行目を下方に離れた直後に入り得る $M_2(M_4)$ の異なるコンフィグレーションの総数を $g_2(n)$ ($g_4(n)$) とすると、

$$g_2(n) \leq k_2^{4n},$$

↓ これらのテープの $[(1,1), (2n-1, 4n)]$ -部分は、 y によって一意的に定まることに注意。

♯ 入力テープを読むセル配列の状態の組合せをコンフィグレーションと呼ぶ。

♯ これらのテープの $[(1,1), (n, 4n)]$ -部分は、 y によって一意的に定まることに注意。

$$g_4(n) \leq k_4^{4n}$$

である。従って、十分大きな n に対しては、

$$P(n) > g_1(n) \times g_2(n) \times g_3(n) \times g_4(n)$$

となる。このような十分大きな n に対しては、ある i, j ($1 \leq i, j \leq P(n)$, $i \neq j$), ある y, y' ($y \in C_i$ かつ $y' \in C_j$) が存在して、次の(1)~(4)が成り立つ。

$$\text{conf}_1(y) = \text{conf}_1(y') \quad (1)$$

$$\text{conf}_3(y) = \text{conf}_3(y') \quad (2)$$

$$\text{conf}_2(y^{RRR}) = \text{conf}_2(y'^{RRR}) \quad (3)$$

$$\text{conf}_4(y^{RRR}) = \text{conf}_4(y'^{RRR}) \quad (4)$$

y と y' とは E -同値ではないので、ある $\rho \in W(n)$ が存在して、

$$\rho \in \text{row}(y) \text{ 且つ } \rho \notin \text{row}(y')$$

$$(\text{あるいは、} \rho \notin \text{row}(y) \text{ 且つ } \rho \in \text{row}(y'))$$

となる。いま、 $\rho \in \text{row}(y)$ 且つ $\rho \notin \text{row}(y')$ とする (他の場合に対しても同様に証明される)。 x, x' を次の(i)~(iv)を満たす $\mathcal{V}_1(n)$ に含まれるテープとする (図3の(a)に x を、(b)に x' を示す)。

$$(i) \quad x[(n+1, 3n+1), (2n-1, 4n)] = y \quad \&$$

$$x'[(n+1, 3n+1), (2n-1, 4n)] = y'$$

$$(ii) \quad x[(2n, n+1), (2n, 2n)] = \rho^{RR} \quad \&$$

$$\mathcal{X}[(2n+1, 2n+1), (2n+1, 3n)] = \rho$$

$$(iii) \quad \mathcal{X}[(2n+2, 1), (3n, n)] = y^{RR}$$

$$(iv) \quad \mathcal{X}'[(2n, 1), (4n, 4n)] = \mathcal{X}[(2n, 1), (4n, 4n)]$$

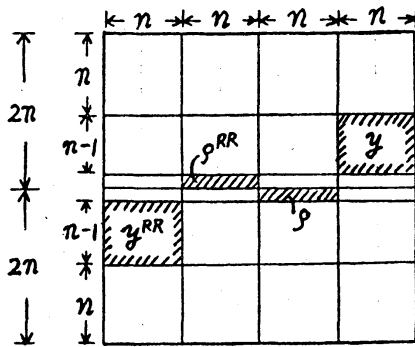
また $\mathcal{X}''$ を次の (v) ~ (vii) を満たす $\mathcal{V}_1(n)$ に含まれるテープとする (図3の(c)に $\mathcal{X}''$ を示す)。

$$(v) \quad \mathcal{X}''[(n+1, 3n+1), (2n-1, 4n)] = y$$

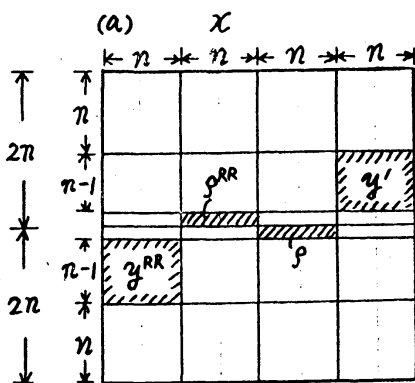
$$(vi) \quad \mathcal{X}''[(2n, n+1), (2n, 2n)] = \rho^{RR} \quad \&$$

$$\mathcal{X}''[(2n+1, 2n+1), (2n+1, 3n)] = \rho$$

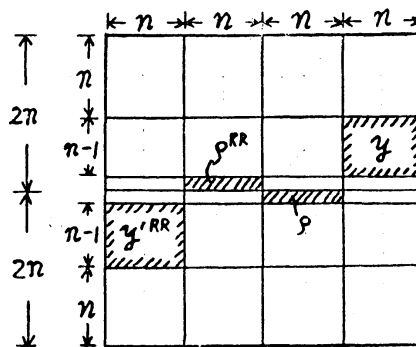
$$(vii) \quad \mathcal{X}''[(2n+2, 1), (3n, n)] = y'^{RR}$$



容易に確かめられるように、
 $\mathcal{X} \in T_1$ であり、従って、 $\mathcal{X} \in T(M_1)$, $\mathcal{X}^R \in T(M_2)$, $\mathcal{X}^{RR} \in T(M_3)$ または $\mathcal{X}^{RRR} \in T(M_4)$ のいずれかが成立しなければならない。



(b) $\mathcal{X}'$



(c) $\mathcal{X}''$

図3. 定理6の証明のための図.

① $x \in T(M_1)$ の場合： 上記の (1) 式と (i) より、 x と x' の第 $2n-1$ 行目を下方に離れるときの M_1 のコンフィグレーションは同一である。このことと上記の (iv) より、 x' もまた M_1 で受理され、従って x' は M で受理されることになる。これは矛盾である ($x'[(2n+1, 2n+1), (2n+1, 3n)] = \rho$ は $\text{row}(y') = \text{row}(x'[(n+1, 3n+1), (2n-1, 4n)])$ には含まれず、従って $x' \notin T_1$ であることに注意されたい)。

② $x^{RR} \in T(M_3)$ の場合： 明らかに $x^{RR} = x$ であるから、 $x \in T(M_3)$ である。上記の (2) 式と (i) より、 x と x' の第 $2n-1$ 行目を下方に離れるときの M_3 のコンフィグレーションは同一である。このことと上記の (iv) より、 $x' = (x'^{RR})^{RR}$ もまた M_3 で受理され、従って x'^{RR} は M で受理されることになる。これは矛盾である ($x'^{RR} \notin T_1$ であるから)。

③ $x^R \in T(M_2)$ の場合： $x^R[(1, n+1), (n, 2n-1)] = y^{RRR}$, $x''^R[(1, n+1), (n, 2n-1)] = y'^{RRR}$ であることと上記の (3) 式より、 x^R と x''^R の第 n 行目を下方に離れるときの M_2 のコンフィグレーションは同一である。このことと $x^R[(n+1, 1), (4n, 4n)] = x''^R[(n+1, 1), (4n, 4n)]$ であることから、 x''^R もまた M_2 で受理され、従って x'' は M で受理されることになる。これは矛盾である ($x''[(2n, n+1), (2n, 2n)] = \rho^{RR}$ は、 $\text{row}(y'^{RR}) = \text{row}(x''[(2n+2, 1), (3n, n)])$

])には含まれず、従って $x'' \notin T_1$ であることに注意)。

④ $x^{RRR} \in T(M_4)$ の場合: 明らかに、 $x^{RRR} = x^R$ であるから、 $x^R \in T(M_4)$ である。このとき、上記の(4)式を用いて、③と同様にして、 $x''^R = (x''^{RR})^{RR}$ もまた M_4 で受理されることが示され、従って、 x''^{RR} は M で受理されることになる。これは矛盾である($x''^{RR} \notin T_1$ であるから)。

以上で、すべての場合に対して矛盾が示された。故に、 T_1 は $\mathcal{L}[D \vee D^R \vee D^{RR} \vee D^{RRR}]$ である。

次の定理7、定理8の成立することは、文献(8)に示されている。

定理7 $\mathcal{L}[D \wedge D^R \wedge D^{RR} \wedge D^{RRR}]$ には含まれないが $\mathcal{L}[D \vee D^R]$, $\mathcal{L}[D \vee D^{RR}]$ には含まれる集合が存在する。

定理8 $\mathcal{L}[D \wedge D^R \wedge D^{RR} \wedge D^{RRR}]$ には含まれないが $\mathcal{L}[D \vee D^{RR}]$ には含まれる集合が存在する。

以上の定理4, 6, 7, 8を用いれば、例えば、次の系の成り立つことが示される。

系1 (1) $\mathcal{L}[D \vee D^R]$, $\mathcal{L}[D \vee D^{RR}]$, $\mathcal{L}[D \vee D^{RRR}]$ は、それぞれ $\mathcal{L}[D \wedge D^R]$, $\mathcal{L}[D \wedge D^{RR}]$, $\mathcal{L}[D \wedge D^{RRR}]$ と比較不能である。

(2) $\mathcal{L}[D \vee D^R \vee D^{RR}]$, $\mathcal{L}[D \vee D^R \vee D^{RRR}]$, $\mathcal{L}[D \vee D^{RR} \vee D^{RRR}]$ は、それぞれ $\mathcal{L}[D \wedge D^R \wedge D^{RR}]$, $\mathcal{L}[D \wedge D^R \wedge D^{RRR}]$, $\mathcal{L}[D \wedge D^{RR} \wedge D^{RRR}]$ と比較不能である。

(3) $\Delta \wedge \Delta^R \wedge \Delta^{RR} \wedge \Delta^{RRR}$ と $\Delta \vee \Delta^R \vee \Delta^{RR} \vee \Delta^{RRR}$ は比較不能である。

実は、定理 4, 6, 7, 8 を用いることにより、1WDPS A を和形式で組合せて得られるオートマタと積形式で組合せて得られるオートマタの受理能力の関係をすべて求めることができる。

文 献

- [1] A. Rosenfeld and D.L. Milgram : IPL. 2, P. 43 (1973) .
- [2] 井上, 中村 : 信学論(日), 58-日, 3, P. 167 (昭 50-03) .
- [3] 井上, 中村 : 信学論(日), J59-日, 4, P. 229 (昭 51-04) .
- [4] 森田, 梅尾, 菅田 : 信学論(日), J60-日, 12, P. 1077 (昭 52-12) .
- [5] 井上, 高浪, 谷口 : 信学論(日), J 63-日, 9, P. 747 (昭 55-09) .
- [6] 井上, 高浪, 谷口 : 信学論(日), 1981年 2月号 予定
- [7] 井上, 高浪, 谷口 : 信学論オートマトンと言語研資 AL79-103, 1980年 1月 .
- [8] 井上, 高浪, 谷口 : ‘回転入力をもつ 2次元オートマタ (和形と積形の関係)’ 文部省 昭和 55年度総合研究 A 報告書「多オートマトン系の研究」