

Hankel 作用素と関数環

北大教養 中路貴彦 (Takahiko Nakazi)

本講演では関数環で定義される抽象的 Hardy 空間で定義される Hankel 作用素のノルムの研究についてである。アイデアの一つは Hardy 空間 H^2 のみで考えるのではなく、補助的な多くの空間でも Hankel 作用素を考えた事である。もう一つは各関数環について定義されるある定数 γ_0 を導入した事である。

I 章 問題

A を compact Hausdorff 空間 X 上の関数環とする。 τ を A 上の零でない complex homomorphism とし、 m を τ の表現測度とする。 すなわち、

$$\tau(f) = \int_X f \, dm \quad (f \in A).$$

$C = C(X)$ は X 上の連続関数の全体を示し、 $1 \leq p \leq \infty$ に対して $L^p = L^p(m)$ とする。 ここで抽象的 Hardy 空間 H^p ($1 \leq p$

$\leq \infty$) を次の様に定義する。 $H^p = H^p(m)$ は $p \neq \infty$ のとき A の L^p での閉包を示し、 $p = \infty$ のとき A の * 弱閉包を示す。
 $A_0 = \{f \in A : \int f dm = 0\}$ かつ $C_0 = \{f \in C : \int f dm = 0\}$ とし、 I を A -閉不変部分空間で $A_0 \subset I \subset C_0$ とする。 $K_0 = \{f \in C : \int f g dm = 0 \ (g \in A)\}$ はそんな I の中で最大のものであり、 A_0 は最小のものである。 I^2 は I の L^2 での閉包を示すことにする。 $\bar{I}^2 = \{f : f \in I^2\}$ とする。

Q を L^2 から $\bar{I}^2$ への orthogonal projection とする。 $\varphi \in L^\infty$ に対して

$$H_\varphi f = Q \varphi f \quad (f \in H^2)$$

とするとき、 H_φ を H^2 から $\bar{I}^2$ への Hankel 作用素と呼ぶ。

問題 (a) H_φ のノルム $\|H_\varphi\|$ を φ のことばで表わせ。(b) H_φ の本質的ノルム $\|H_\varphi\|_e$ を φ のことばで表わせ。

N_π を X 上の π の表現測度の全体を示すとする。一般的な結果も得ることができるが、 N_π が有限次元のとき更にそれを精密にすることができる。

Ⅱ章 具体的な例

例 1. X を単位円周 T とし、 A を T 上の円板環とする。
 $f \in A$ に対し $\tau(f) = f(0)$ かつ $m = d\theta/2\pi$ とする。この
 とき $H^p = H^p(d\theta/2\pi)$ は古典的 Hardy 空間 でありかつ
 $A_0 = K_0 = I$ である。 H_φ は H^2 から $e^{-i\theta} \bar{H}^2$ への普通の
 Hankel 作用素である。

定理 a $\|H_\varphi\| = \|\varphi + H^\infty\|$.

定理 b $\|H_\varphi\|_e = \|\varphi + H^\infty + C\|$.

定理 a は Nehari (1957) [11] により、普通 H^1 の
 factorization を使って証明される。すなわち、 $f \in H^1$ ならば
 ある $g, h \in H^2$ が存在して $f = hg$ とかけて、 $\|f\|_1 = \|h\|_2^2$
 $= \|g\|_2^2$ とできる。定理 b は Adamjan, Arov と Krein (1968)
 [2] により、定理 a と $z = e^{i\theta}$ のかけ算作用素を使って
 証明された。 H_φ が compact 作用素であるための必要かつ十
 分条件 $\varphi \in H^\infty + C$ はより以前に Hartman (1958) [12]
 により証明された。

例 2. Y を平面の compact 部分集合で Y の内点 Y° は空で

ないとする。 $R(Y)$ を $C(Y)$ の元となる有理関数の全体の一様閉包とする。 $X = \partial Y$ は $R(Y)$ の Shilov 境界となるが、 $A = R(Y)|_X$ とせよ。 $z_0 \in Y^0$ かつ $\tau(f) = f(z_0)$ とする。 ∂Y は Dirichlet 問題の解があるとするとき、 m を z_0 の harmonic 測度とすると、 m は τ の表現測度となる。 ∂Y 上の全ての点が Lebesgue の条件を満たすとき、 m は τ の一意な logmodular 測度となる。 Y^c が有限 $n+1$ 個の連結領域からなるとき、 $\dim N_\tau = n < \infty$ かつ m は一意な logmodular 測度になる。

例 3. $\mathcal{O}$ を円板環、 A は 1 を含む $\mathcal{O}$ の部分環で $\dim \mathcal{O} \setminus A = n < \infty$ とする。 $\tau(f) = f(0)$ ($f \in A$) かつ $m = d\theta/2\pi$ とする。例えば、 $A = \{f \in \mathcal{O} ; f(0) = 0\}$ または $\{f \in \mathcal{O} ; f(0) = f(1/2)\}$ 等がある。 $\dim \mathcal{O} \setminus A = n$ のとき $\dim N_\tau = n < \infty$ となる。

例 4. X を多重円筒 T^n とし、 A を X 上の多重円板環とする。 $\tau(f) = f(0)$ かつ $0 = (0, \dots, 0)$ とし、 m を正規 Lebesgue 測度とする。このとき $\dim N_\tau = \infty$ 。 m は一意の logmodular 測度ではない。

Ⅲ章 ノルムについての一般的な定理

$\mathcal{L}$ を H^∞ で生成される C^* -環とする。多くの例では $\mathcal{L} = L^\infty$ となる。例1、例2で ∂Y 上の全ての点が Lebesgue の条件を満たすときと例3では $\mathcal{L} = L^\infty$ であるが、例4では $\mathcal{L} \neq L^\infty$ である。 $\mathcal{L}_+^{-1} = \{ \psi \in \mathcal{L} ; \psi \geq 0 \text{ かつ } \psi^{-1} \in \mathcal{L} \}$ とする。

$\psi \in \mathcal{L}_+^{-1}$ に対して、 Q^ψ を L^2 から $\psi^{-1} \bar{I}^2$ への orthogonal projection とする。 $\varphi \in L^\infty$ に対して

$$H_\varphi^\psi f = Q^\psi \varphi f \quad (f \in \psi H^2)$$

とするとき、もし ψ が定数ならば $H_\varphi^\psi = H_\varphi$ である。

定理1 任意の $\varphi \in L^\infty$ について

$$\sup \{ \|H_\varphi^\psi\| : \psi \in \mathcal{L}_+^{-1} \} = \|\varphi + I^\perp \cap L^\infty\|.$$

定理1の証明にはもちろん H^1 の factorization を使っていないが、これより定理a (Nehari) は $|(H^\infty)^{-1}| = \mathcal{L}_+^{-1}$ を用いて簡単に導びける。 $\mathcal{M} = \psi H^2$ とすると $\mathcal{M}$ は A -不変部分空間となる。定理1のアイディアは上のタイプの全ての不変部分空間で Hankel 作用素を考えたことにある。Toeplitz 作用素の可逆性については Abrahamse (1974) [1] は例2で Y^c が有限個の連結領域からなるとき、Anderson と Rochberg (1981) [3] は例3の場合に類似の考え方をしている。

また Arveson (1975) [4] は nest algebra の理論に非常に有効な distance formula を証明した。この distance formula は定理 1 の非可換版であるが、nest algebra は Dirichlet 環の一般化と見ることが出来る。しかし Dirichlet 環に対し定理 1 の証明はやさしい。定理 1 の考え方は様々な応用がある。例えば、Cotlar と Sadosky の lifting 定理、加重つきノルム不等式の理論、Toeplitz 作用素の理論等々である。参考文献 [7]、[9] を見よ。また Arveson の distance formula の応用と同様である。参考文献 [10] を見よ。

IV 章 $N_{\mathcal{L}}$ が有限次元のときのノルム

$\dim N_{\mathcal{L}} = n < \infty$ かつ m を $N_{\mathcal{L}}$ の core 測度とする。例 1、例 2 (Y^c は有限個の連結領域のとき) と例 3 では $N_{\mathcal{L}}$ が有限次元である。 $N^{\infty} = A^{\perp} \cap L^{\infty}$ とすると、 $\dim N^{\infty} = n < \infty$ となる (cf. [6, p109])。 $\mathcal{C} = \exp N^{\infty}$ とおくと $\mathcal{C}$ は L^{∞}_+ の部分群である。このとき $A_0 \subset I \subset (H^{\infty}_0 + N^{\infty}_{\mathcal{C}}) \cap \mathcal{C}$ であるが、もし $N^{\infty} \subset \mathcal{C}$ ならば $A_0 \subset I \subset A_0 + N^{\infty}_{\mathcal{C}}$ でありかつ $H^{\infty} \subset I^{\perp} \cap L^{\infty} \subset H^{\infty} + N^{\infty}_{\mathcal{C}}$ である。ここで $N^{\infty}_{\mathcal{C}} = N^{\infty} + i N^{\infty}$ 。

定理 2 任意の $\varphi \in L^{\infty}$ について、

$$(1) \quad \sup \{ \|H_{\varphi}^{\psi}\| : \psi \in \mathcal{E} \} = \|\varphi + I^{\perp} \cap L^{\infty}\|$$

でありかつ

(2) もし更に m が $\mathcal{I}$ の一意 logmodular 測度るとき、ある $\psi_0 \in \mathcal{E}$ が存在して

$$\|H_{\varphi}^{\psi_0}\| = \|\varphi + I^{\perp} \cap L^{\infty}\|.$$

例1では $\mathcal{E}$ は正の定数のみからなり、任意の $\psi \in \mathcal{E}$ について $H_{\varphi}^{\psi} = H_{\varphi}$ となるから定理2は定理a (Nehari)を示している。例2 (Y^c が有限個の連結領域のとき)には、定理の(2)が適用できるが例3には定理2の(1)が適用できる。

Ⅶ章 $N_{\mathcal{I}}$ が有限次元のときの本質的ノルム

$\dim N_{\mathcal{I}} = n < \infty$ かつ m を $N_{\mathcal{I}}$ の core 測度とする。

$\dim N_{\mathcal{I}} = 0$ のとき compact Hankel 作用素については, Curto, Muhly, Xia と Nakazi [5] によって調べられた。 $\mathcal{I}$ の Hankel 作用素は零のみである必要十分条件は $\mathcal{I}$ の Gleason part が $\mathcal{I}$ のみからなることを示している。 $\dim N_{\mathcal{I}} = 0$ でも $\|H_{\varphi}\|_e$ については例1を除いて知られていない。

定理3 例2で ∂Y が $n+1$ 個の non-intersecting analytic Jordan curves とする。任意の $\varphi \in L^{\infty}$ について、

$$\sup \{ \|H_{\varphi}^{\psi}\|_e : \psi \in \mathcal{C} \} = \| \varphi + H^{\infty} + \mathcal{C} \|.$$

$\sup$ は常に attain される。

証明は定理 b での $z = e^{i\theta}$ の代りに、Ahlfors function を使う。 ψ で $\sup$ をとっているので、定理の時のように簡単ではないが、 $\mathcal{C}$ の性質を十分に使うならば証明できる。

Ⅵ章 ある定数 γ_0 とその応用

$f \in \mathcal{L}^{-1}$ について (f) は $\mathcal{L}^{-1}/(H^{\infty})^{-1}$ の coset を示すとき、 $\|(f)\| = \inf \{ \|g\|_{\infty} \|g^{-1}\|_{\infty} ; g \in (f) \}$ とする。我々は次の定数 γ_0 を導入する。

$$\gamma_0 = \sup \{ \|(f)\| ; (f) \in \mathcal{L}^{-1}/(H^{\infty})^{-1} \}$$

とすると、 $1 \leq \gamma_0 \leq \infty$ を満たす。 $\dim N_{\mathcal{L}} < \infty$ かつ m を一意の logmodular 測度とすると、 $\gamma_0 < \infty$ 。例 1 では $\gamma_0 = 1$ 、例 2 では Y^c が有限個の連結領域のとき、 $\gamma_0 < \infty$ 。 Y が長径 r_1 、短径 r_2 の annulus のときはきちんと計算できて、 $\gamma_0 = (r_1 / r_2)^{-1/2}$ 。 Y^c が無限連結領域のとき $\gamma_0 = \infty$ となるときがあるが、 $\gamma_0 < \infty$ が起こる場合があるかどうかわからない。 $\mathcal{L}$ は上の例では $\mathcal{L}^{\infty}$ と一致する。例 4 では $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^{\infty}$ であるが、論文 [8] では γ_0 を $(\mathcal{L}^{\infty})^{-1}/(H^{\infty})^{-1}$ で定義しているがそのときは $\gamma_0 = \infty$ となる事は泉池氏に

より指摘された。

定理 4 $\varphi \in L^\infty$ とせよ。

(1) $\gamma_0 < \infty$ ならば

$$\|H_\varphi\| \leq \|\varphi + I^\perp \cap L^\infty\| \leq \gamma_0 \|H_\varphi\|.$$

(2) 例 2 で ∂Y が $n+1$ 個の non-intersecting analytic Jordan curves からなるとき、 $\gamma_0 < \infty$ かつ

$$\|H_\varphi\| \leq \|\varphi + H^\infty + C\| \leq \gamma_0 \|H_\varphi\|_e.$$

上の定理で、 $I = A_0$ のとき (1) は $\|H_\varphi\|$ が φ の H' の dual のノルムと equivalent であることを示している。したがって BMOA が H' の dual となるときは、 φ の BMO ノルムと equivalent である。

参考文献

1. Abrahamse, M.B. : Toeplitz operators in multiply connected regions, Amer. J. Math. 96 (1974), 261-297.
2. Adamjan, V.M., Arov, D.Z. and Krein, M.G. : Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur-Takagi problem, Matem. Sbornik 86 (128) (1971), 34-35; English translation: Math.

USSR Sbornik 15(1971), 31-73.

3. Anderson, J.M. and Rochberg, R.H. : Toeplitz operators associated with subalgebras of the disc algebra, Indiana Univ. Math. J. 30(1981), 813-820.
4. Arveson, W.B. : Interpolation problems in nest algebras, J. Functional Analysis 20(1975), 208-233.
5. Curto, R.E., Muhly, P.S., Nakazi, T. and Xia, J. : Hankel operators and uniform algebras, Arch. Math. 43(1984), 440-447.
6. Gamelin, T. : Uniform Algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
7. Nakazi, T. : Norms of Hankel operators and uniform algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 299(1987), 573-580.
8. ——— : Norms of Hankel operators and uniform algebras, II, to appear in Tohoku Math. J. .
9. ——— : A lifting theorem and uniform algebras, to appear in Trans. Amer. Math. Soc. .
10. ——— : A lifting theorem and analytic operator algebras, in preprint .
11. Nehari, Z. : On bounded bilinear forms, Ann. of Math. 69(1957), 153-162.

12. Hartman, P. : On completely continuous Hankel matrices,
Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 862 - 866 .

この講演の結果の証明は [7] と [8] にある。