

Nonlinear elliptic equations with critical growth

東大理 石村 直之

Introduction and Main Result

次の方程式の古典解を問題にする。

$$(1) \quad -\Delta u = u^5 \quad \text{in } \mathbf{R}^3.$$

(1) の解は $u \in H^1(\mathbf{R}^3)$ に対する functional

$$(2) \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 - \frac{1}{6} \int_{\mathbf{R}^3} u^6,$$

の critical point として与えられる。このとき (1) の右辺の指数 "5" は Sobolev の埋め込み

$$H^1(\mathbf{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbf{R}^3)$$

に対応する。そのため一般に J は $H^1(\mathbf{R}^3)$ において (P.S) 条件を満たさない。

Gidas, Ni, Nirenberg [GNN] は (1) の energy 有限な正值解、すなわち

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 < \infty$$

をみたす正值解は、ある $a > 0$ 、 $\xi \in \mathbf{R}^3$ に対して次の形であることを示した。

$$u(x) = 3^{1/4} \sqrt{\frac{a}{a^2 + |x - \xi|^2}}.$$

一方 Ding [D] は (1) の解の無限列 u_k で

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_k|^2 \rightarrow \infty \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

をみたすものが存在することを示した。Ding の解は一般に正值解ではないことに注意する。

本講演では Ding の定理をひとつの方向に精密化する。

まずひとつ記号を導入する。

$$N(u) = \mathbf{R}^3 \setminus \{u^{-1}(0)\} \text{ の連結成分の個数}$$

とおく。このとき次の定理が成立する。

定理. 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して $N(u) = k$ をみたす (1) の解 u が存在する。

u_k の energy が k によりどのように、特に下から、評価されるかは未解決である。

Idea of the Proof

まず立体射影により (2) を S^3 上の functional に書き直す。

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(y^1, \dots, y^4) \in \mathbf{R}^3 \mid \Sigma(y^i)^2 = 1\} \\ y^i &= \frac{2x^i}{|x|^2 + 1} \quad i = 1, 2, 3 \\ y^4 &= \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \\ v(y) &= \sqrt{\frac{|x|^2 + 1}{2}} u(x) \end{aligned}$$

とすれば

$$J(v) = \int_{S^3} \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \frac{3}{8} v^2 - \frac{1}{6} v^6 \, dv_y$$

ここで ∇ は S^3 上の standard metric に関してのもの。

$H^1(S^3)$ の subspace E を用意する。

$$\begin{aligned} E &= \{v \in H^1(S^3) \mid v(y) = v(|y'|, |y''|) \\ &\quad (y')^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2, (y'')^2 = 1 - (y')^2\} \end{aligned}$$

補題 1、(DING [D]). 埋め込み $E \hookrightarrow L^6(S^3)$ は compact である。

そこで E において定理の性質をみたす解 u_k を構成する。

$$\begin{aligned} E_k &= \{v \in E \mid 0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{k-1} < r_k = 1, k \geq 1 \\ &\quad v(r_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq k-1 \\ &\quad (\pm 1)^i v \geq 0, v \neq 0 \quad \text{および} \\ &\quad \int_{S_i^3} |\nabla v|^2 + \frac{3}{4} v^2 - v^6 \, dv \quad \text{in } S_i^3 \\ &\quad \text{ここで} \\ &\quad S_0^3 = \{|y'| < r_1\} \\ &\quad S_i^3 = \{r_i < |y'| < r_{i+1}\} \quad i = 1, 2, \dots, k-2 \\ &\quad S_{k-1}^3 = \{r_{k-1} < |y'| \leq r_k\} \} \end{aligned}$$

とおく。Cerami, Solimini, Struwe [CSS] の議論を利用して次を示す。

補題 2. $\inf_{v \in E_k} J(v)$ は達成される。

最後に次の性質に注意する。

補題 3. $J|_E$ の critical point は J の critical point.

REFERENCES

- [CSS] G.Cerami, S.Solimini and M.Struwe, *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, J. Funct. Anal. **69** (1986), 289-306.
- [D] W.-Y. Ding, *On a conformally invariant elliptic equation on $\mathbf{R}^n$* , Comm. Math. Phys. **108** (1986), 331-335.
- [GNN] B.Gidas, W.-M.Ni and L.Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209-243.