

Stokes phenomena of holonomic systems

北大理・本多 尚文

(Naofumi HONDA)

本稿では、不確定特異点型、極大過剰決定系の、正則マイクロ関数解に関する Stokes 現象について述べようと思う。微分方程式論で知られる Stokes 現象は、形式巾級数解に漸近する角領域上の正則解を、漸近を壊しながら延長する時現れる障害であり、また、異なる角領域上の解を接続する問題と捉えられる。この問題を超局所的に考察する為には、最初に、形式巾級数解に相対する解層が必要である。

この様な解層を構成する為に以下の準備を行う。

§1. Sheaf $\mathcal{E}^{R,f=0}$

$Y \subset X$ を複素多様体と Y の部分複素多様体とする。

T^*X の局所座標系を $(z_1, \dots, z_n; \zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $p = (0; dz_1)$

まず、 $\mathcal{E}^{R,f}$ の左、右両行 "pull $\mathcal{I}^{R,(0)}$ " を次の様に定義する。

$$S^{(-0)}(\Omega) := \{ p(z, \zeta) \in \mathcal{O}(\Omega) ; \exists R > 0, \exists \sigma > 0, \\ \exists C, \text{ s.t. } |p(x, \zeta)| \leq C e^{-R|\zeta|^\sigma} \}$$

$$S_p^{(-0)} := \lim_{\Omega \ni p} S^{(-0)}(\Omega)$$

但し、 Ω は、 p の $\mathbb{R}^+$ Conic な近傍を走るものとする。

片岡青木先生の Symbol Calculus に従い, $I^{(-0)}$ の $\mathbb{P}^1$ の stalk
 $\mathcal{S}_p^{(-0)} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{R}f}$ の像 $\text{Im } \mathcal{S}_p^{(-0)}$ を定義する.

更に $\Sigma^{\mathbb{R}f_0}$ を

$$\Sigma^{\mathbb{R}f_0} := \frac{\Sigma^{\mathbb{R}f}}{I^{\mathbb{R}(-0)}}$$

を定義する. $\Sigma^{\mathbb{R}f_0}$ は $I^{\mathbb{R}(-0)}$ が $\Sigma^{\mathbb{R}f}$ の両側 "ideal" かつ, 明らかに
 環であり, 更に, 左, 右 $\Sigma^{\mathbb{R}f}$ module である. また, Σ 上半環である.

$\mathbb{C}^*$ 上の $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}f}$ に対応する層, $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}f_0}$ は,

$$\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}f_0} := \Sigma^{\mathbb{R}f_0} \bigotimes_{\Sigma^{\mathbb{R}f}} \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}f}$$

を定義する.

$\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}f_0}$ を導入する理由は, $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}f_0}$ の解を考へる事は
 $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}f}$ の解を指数減少の解を省略して連続して $\mathbb{C}^*$ 事に相当
 するからである. これは常微分方程式における, 異なる領域上
 の解を同じ近接展開を保ちながら連続する問題と同等
 と言えらるからである.

実際 $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}f}$ 解は局所的な Stokes 現象のみ, 複素構造
 を持つ. $\mathbb{C}$ -Constructible sheaf とは一般にはないが,

$\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}f_0}$ 解は, 再び $\mathbb{C}$ -Constructible sheaf となる.

この事は, 以下の章で多少の準備の後示す.

§2. $C_{T|X}^{RF}, C_{T|X}^{RF,0}$ 解

$\Lambda \subset T^*X$ を $\mathbb{C}^*$ Conic ラグランジアン 多様体, $\alpha \geq 1$ を有理数とする.

$E \subset \Lambda$ を $\mathbb{C}^*$ Conic 部分多様体とする時, E の fiber に沿った,

euler vector field より誘導される射

$$\theta_E : T^*E \rightarrow \mathbb{C}$$

が定義される. ω は $E \subset \Lambda$ より誘導される射

$$T^*E \xleftarrow{\rho_E} E \times_{\Lambda} T^*\Lambda \xrightarrow{\omega} T^*\Lambda$$

と合成して,

$$\theta_{\rho_E} : E \times_{\Lambda} T^*\Lambda \xrightarrow{\rho_E} T^*E \xrightarrow{\theta_E} E \times \mathbb{C}$$

を得る.

$p \in E$ の近傍で定義された holonomic $\mathbb{C}_x$ module M に対し

Λ に沿った 不確定特異点度 σ の filtration $F_{r,\Lambda}^{(\sigma)}(M)$ を

与える. $F_{r,\Lambda}^{(\sigma)}(M)$ に対し

$$G_{r,\Lambda}^{(\sigma)}(M) = \left(\bigoplus_{\mathbb{R}} F_{r,\Lambda}^{(\sigma), \mathbb{R}}(M) / F_{r,0}^{(\sigma), \mathbb{R}}(M) \right) \otimes_{\pi^{-1}\theta_{\Lambda}} \theta_{T^*\Lambda}$$

$$\Sigma_{\Lambda}^{(\sigma)}(M) = \text{Supp}(G_{r,\Lambda}^{(\sigma)}(M))$$

と定義する. 一般に $\Sigma_{\Lambda}^{(\sigma)}(M) \subset T^*\Lambda$ となる様な σ

は, 有限個の点しかない. その様な σ の系全体

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_e) \quad (\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_e > 1)$$

を M の (不確定) 不確定特異点度と呼ぶ.

最後に $\tilde{\Sigma}_{\Lambda}^{(\sigma)}(M)$ を $\Sigma_{\Lambda}^{(\sigma)}(M)$ の射 $\theta_{\rho_E}|_E$ による像とする.

この2つの解属には標準射

$$R\mathrm{Hom}_{\Sigma_X^{\mathrm{Rf}}}(\mathcal{M}^{\mathrm{Rf}}, \mathcal{N}^{\mathrm{Rf}}) \rightarrow R\mathrm{Hom}_{\Sigma_X^{\mathrm{Rf}}}(\mathcal{M}^{\mathrm{Rf}}, \mathcal{N}^{\mathrm{Rf}} \otimes)$$

が存在する。よって、この2つの解属及び射が超局所解析における Stokes 現象の舞台になる。上の射はコホモロジー間の全射となっている事に注意する。

§3. 例

§2 を踏まえて、次の定義を導入する。まず、

$$X = \mathbb{C}, Y = \{0\}, \Lambda = \mathbb{T}_Y^* X \simeq \mathbb{C}_Y^*.$$

$\{\Lambda_\alpha\}$ を Λ の $\mathbb{R}^+$ Conic な Stratification とし、

$$U(\Lambda_\alpha) = \bigcup_{\Lambda_\beta \subset \Lambda_\alpha} \Lambda_\beta$$

と置く。 $\forall \alpha$ に対して $U(\Lambda_\alpha)$ は単連結と仮定する。

2つの Categories

$$\mathcal{C}(\{\Lambda_\alpha\}) := \left\{ \begin{array}{l} \{\Lambda_\alpha\} \text{ を Stratification とし } \rightarrow \text{R-Constructible} \\ \text{sheaf の cat.} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{C}^{\mathrm{st}}(\{\Lambda_\alpha\}) := \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{st}}(\{\Lambda_\alpha\})) = \mathrm{ob}(\mathcal{C}(\{\Lambda_\alpha\})) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{st}}(\{\Lambda_\alpha\})}(F, G) = \bigoplus_{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F|_{U(\Lambda_\alpha)}, G|_{U(\Lambda_\alpha)}) \end{array} \right.$$

とする。

次の単純性事実が成立する。

補題: 次の $C(\Delta_0)$ における図式

$$\phi: F \rightarrow G \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} & & \uparrow \text{id}_G \\ & \nearrow \phi_{\text{st}} & \\ & & G \end{array}$$

もし G が $\mathbb{C}$ -Constructible なら, id_G のリフト ϕ_{st} が $C^{\text{st}}(\Delta_0)$ に存在する ($C(\Delta_0)$ では無い) の

そこで, 上のような ϕ_{st} を 組 $F \rightarrow G$ のリフト Stokes 写像と呼ぶ.

また, ϕ_{st} を $C(\Delta_0)$ の中から取れる場合, 組 $F \rightarrow G$ は "Stokes 現象を持たない" と定義する.

さて, t -equation (常微分方程式論で Stokes 現象の例として良く考えられている) の超局所バージョンで, 上の意味で Stokes 現象を持つ例を考えてみよう.

Ex

$$\tilde{L}_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{C}), \quad \omega_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$$

$f_{i, \lambda}(y) = \exp\left(\lambda \omega_n^i y^{\frac{1}{n}}\right)$ とし, $L_n \in \tilde{L}_n$ で定義した局所系.

$$\mathcal{L}_n = C_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{C}} L_n \text{ とおく.}$$

局所的な切断 $u = \begin{pmatrix} f_{0, \lambda}(y) \\ f_{1, \lambda}(y) \\ \vdots \\ f_{n-1, \lambda}(y) \end{pmatrix}$ は, $\mathcal{L}_n$ の大域切断に延長されるから, これも同じ記号 u で表わすとすると,

$$\mathcal{L}_{n,\lambda} := r^{-1} r_* (\mathcal{E}_x u) \quad (r: \overset{\circ}{T}_Y^* X \rightarrow Y)$$

なる $\mathcal{E}$ -module が定義されるが、これは holonomic $\mathcal{E}$ -module である。実際

$$\mathcal{L}_{n,\lambda} = \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_x \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(\Theta + \frac{n+k}{n} \right) - \left(\frac{\lambda}{n} \right)^n D \right)}$$

($\because \Theta = \mathbb{D}$)

$\therefore$ 超局所版 t -equation は

$$\mathcal{M}_n = \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_x \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(\Theta + \frac{n+1+k}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} \right)^n D \right)}$$

で定義される。 $\mathcal{L}_{n,\lambda}$ と $\mathcal{M}_n$ は形は似ているが Stokes 現象の意味で全く違う。 $\mathcal{L}_{n,\lambda}$ は $f_{i,\lambda}(D)$ という指数部のおかげで構成された解を持つ、標準的な system である。

$\therefore$

$$F = R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_x}(\mathcal{M}_n, \mathcal{L}_{n, \frac{n}{n+1}} \mathbb{R}f)$$

$$G = R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_x}(\mathcal{M}_n, \mathcal{L}_{n, \frac{n}{n+1}} \mathbb{R}f - \mathbb{O})$$

となく、もちろん F と G は degree 0 に集まった sheaf であり、

F は $\mathbb{R}$ -Constructible, G は $\mathbb{C}$ -Constructible であり

$$F \rightarrow G \rightarrow 0$$

は全射。

更に. Σ^∞ の解属

$$F^\infty = R\mathrm{Hom}_{\Sigma_X}(m_n, \mathcal{O}_{n, \frac{n}{n+1}}^{\mathbb{R}})$$

は. $\mathbb{C}$ -Constructible である.

$$\begin{array}{ccc} & F^\infty & \\ \uparrow & \nearrow & \\ F & \xrightarrow{\quad} & G \rightarrow 0 \end{array}$$

F^∞ と G は local system だから. それぞれの特性多項式を計算すると. (結構 2 個の多項式を計算する必要がある) 結果のみ)

$$F^\infty \text{ は } \mathcal{L}^\infty(\lambda) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{n-1} (\lambda^n - \omega_{n+1}^k)$$

$$G \text{ は } \mathcal{L}^{f=0}(\lambda) = (\lambda^n + (-1)^n \omega_{n+1})$$

ここで. 組 $F \rightarrow G \rightarrow 0$ が Stokes 現象を持たないとする.

G から F^∞ への射が存在する事になるが. $\mathcal{L}^\infty(\lambda)$ と $\mathcal{L}^{f=0}(\lambda)$

は互に素数でないから不可能である. 組 $F \rightarrow G \rightarrow 0$ は必ず

Stokes 現象を持ち. Stokes map は $C^{st}(\Lambda_\alpha)$ のみに

存在する. ちなみに. F は

$$\pi(SS(F)) = \begin{cases} \mathbb{R}_+^- & (n=2) \\ \mathbb{R}_+^- \cup \mathbb{R}_+^+ & (n \geq 3) \end{cases}$$

$$(\pi: T^* \dot{\Gamma}_{\mathrm{log}} X \rightarrow \dot{\Gamma}_{\mathrm{log}} X)$$

であり. 複素構造を持たない.

§4 加群自身の Stokes 現象

§2 から $L^{f-0} := R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_X}(m, C_{Y|X}^{\mathcal{R}, f-0})$ は $\mathbb{C}$ -Constructible であるので、確定特異点型の holonomic $\mathcal{E}_X$ module $ST(m)$ で

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_X}(ST(m), C_{Y|X}^{\mathcal{R}, f}) = L^{f-0}$$

を満たすものが $\overset{\circ}{\Gamma}_Y^* X$ の近傍で唯一存在する。

この $ST(m)$ は、 $K-K$ の結果である

“任意の holonomic module m に対し、R.S holonomic $\mathcal{E}_X$ module m_{reg} が存在し、 $\mathcal{E}_X^\infty \otimes_{\mathcal{E}_X} m \simeq \mathcal{E}_X^\infty \otimes_{\mathcal{E}_X} m_{\mathrm{reg}}$ を満たす”
 という主張に現れる m_{reg} と一般に異なる。

(当然だが、 m 自身が R.S なるすべて一致する)

つまり $ST(m)$ は m_{reg} で失われた情報を含んでいる。

実際 §3 の例で、 m_{reg} に対応する $\mathcal{Q}^\infty(\lambda)$ は $R=1$ の情報を使っているが、 $ST(m)$ に対応する $\mathcal{Q}^{f-0}(\lambda)$ はその部分の情報をまったく捨っている。

この最後の章では、 $ST(m)$ と m の関係を調べ、ここにも Stokes 現象と同様の事が発生する事を簡単に述べる。

以下、 $L^f := R\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_X}(m, C_{Y|X}^{\mathcal{R}, f})$ とする。

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(L^{f-0}, L^{f-0})$ は恒等射 id を含むが、この恒等射は、 $\overset{\circ}{\Gamma}_Y^* X$ 全体で定義された $\Sigma^{\mathcal{R}, f-0}$ 射 ϕ^{f-0}

$$\phi^{f-0} : m^{\mathcal{R}, f-0} \rightarrow ST(m)^{\mathcal{R}, f-0} \rightarrow 0 \quad (\text{全射})$$

を誘導する。

非常に粗く言うと, $\Sigma^{R,f-0}$ を考える限り, ちょうど指数部を分けない, 漸近展開の部分 $\Sigma\Gamma(m)$ が前述している状態を現している.

さて $\Sigma^{R,f-0}$ 射 ϕ^{f-0} を $\Sigma^{R,f}$ 射で実現する事を考える.

1つの strata Λ_α を取り, Λ_α 上の $\Sigma L^f \rightarrow L^{f-0} \rightarrow 0$ に対する Stokes map ϕ_α を取る. この ϕ_α は

$$\begin{aligned} \text{Hom}_\alpha(L^{f-0}, L^f)|_{\Lambda_\alpha} &\rightarrow L^f \otimes (L^{f-0})^*|_{\Lambda_\alpha} \\ &\downarrow \\ \text{Hom}_{\Sigma_x^{R,f}}(M^{R,f}, C_{\Gamma|x}^{R,f}) \otimes_\alpha \text{Hom}_{\Sigma_x^{R,f}}(C_{\Gamma|x}^{R,f}, \Sigma\Gamma(m)^{R,f})|_{\Lambda_\alpha} \\ &\downarrow \\ \text{Hom}_{\Sigma_x^{R,f}}(M^{R,f}, \Sigma\Gamma(\mu)^{R,f})|_{\Lambda_\alpha} \end{aligned}$$

より, 各角領域 Λ_α 上,

$$\begin{array}{ccccc} m^{R,f} & \xrightarrow{\phi_\alpha} & \Sigma\Gamma(\mu)^{R,f} & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\ m^{R,f-0} & \xrightarrow{\phi^{f-0}} & \Sigma\Gamma(\mu)^{R,f-0} & \rightarrow & 0 \end{array} \quad (\#)$$

を可換とする様な ϕ_α を誘導する. 以下の事が, 証明出来る. (ϕ^{f-0} 自身は $\hat{\Gamma}^*X$ 全体に存在する事に注意)

定理 ϕ^{f-0} は 各角領域 Λ_α 上 $\Sigma^{R,f}$ 射 ϕ_α で実現出来る.

$\hat{\Gamma}^*X$ 上 全体で, Σ_x 射 ϕ で $(\#)$ を満たすものが存在する事と, $\Sigma L^f \rightarrow L^{f-0} \rightarrow 0$ が Stokes 現象を持たない事は同値である. $\square$

最後に, $\Sigma\Gamma(m)$ が代数的に m から決まると良いのであるが,

まだ, 十分に示せていないので, 今回は省略する.