

Rotation Set について

早大 教有

伊藤隆一

Ito Rynichi

R を実数, N を自然数の集合, $S' = R/N$ を円周とし,
 $\pi: R \rightarrow R/N = S'$ を canonical projection とする。

$f: S' \rightarrow S'$ が degree 1 の連続写像のとき, $\bar{f}: R \rightarrow R$ を
 f の lifting, つまり $\pi \bar{f} = f \pi$ をみたす写像とし,

$$\rho(\bar{f}, x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ \bar{f}^n(x) - x \}$$

$$\rho(\bar{f}) = \{ \rho(\bar{f}, x) \mid x \in R \}$$

と定義する。 $\rho(\bar{f})$ を rotation set と呼ぶ ([4])。 $\rho(\bar{f})$ は
rotation number の一般化である。 $\rho(\bar{f})$ は $\bar{f}$ のとり方に依存
するが, 異なる $\bar{f}$ のとり方をして, 整数値するだけであ
る。

$\rho(\bar{f})$ については次が成り立つ。 ([2], [3], [4])

1) f が 周期 m の周期点をもつ。 $\Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z}; \frac{l}{m} \in \rho(\bar{f})$

- 2) $\frac{p}{m} \in P(\bar{f})$, $(p, m) = 1 \Rightarrow f$ は $P(\bar{f}, x) = \frac{p}{m}$ なる
周期 m の周期点 x をもつ。
- 3) $P(f)$ は 1 点 または 閉区間
- 4) $\bar{f} \leq \bar{g} \Rightarrow P_-(\bar{f}) \leq P_-(\bar{g})$, $P_+(\bar{f}) \leq P_+(\bar{g})$
但し $\varphi(\bar{f}) = [P_-(\bar{f}), P_+(\bar{f})]$ とする。
- 5) $g = h^{-1} \circ f \circ h$ for $\exists$ homeo. $h: S' \rightarrow S' \Rightarrow \bar{f}, \bar{g}$ を適当に
とれば $P(\bar{f}) = P(\bar{g})$
- 6) (適当に lifting をとれば) $P(\bar{\cdot})$ は, degree 1 の 連続写像の
集合から $\mathbb{R}$ への 連続写像である。

この小節では、次の 2 つの Proposition を証明する。

Proposition 1 M を f に関して 不変な S' 上の 確率測度の 集合
とし, $\varphi = \bar{f} - \text{id}: S' \rightarrow S'$ とすると,

$$P(\bar{f}) = \{ \mu(\varphi) \mid \mu \in M \}$$

Proposition 2 $P_+(\bar{f})$ が 無理数, $\theta > 0$ ならば

$$P_+(\overline{R_\theta f}) > P_+(\bar{f})$$

ここに $R_\theta: S' \rightarrow S'$ は $R_\theta(x) = x + \theta$ とする。

同様に $P_-(\bar{f})$ が 無理数, $\theta > 0$ ならば $P_-(\overline{R_\theta f}) > P_-(\bar{f})$

上の 2 つは, f が homeomorphism のとき propositions

(Herman [1] p.21 及び p.34) の一般化である。

Proposition 2 と, 5) を考慮すれば, 次の得る。

Corollary f が構造安定 $\implies P_+(f), P_-(f)$ は有理数。

(注意: 上の Proposition 2 で f と $R_0 f$ の lifting は, $\overline{R_0 f} = R_0 \bar{f}$ となる) とおける。

Proposition 1 の証明 S^1 上の確率測度は $C^0(S^1)$ 上の positive linear functional μ で $\mu(1) = 1$ なるものである。

また $\forall \alpha \in P(f)$ に対して, $\varphi = \bar{f} - \text{id} : S^1 \rightarrow S^1$ とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ \bar{f}^n(x) - x \} = \alpha$$

をみる $x \in S^1$ が存在する ([2]) ことを思い出しておく。

いまこの x に対して $\mu_n : C^0(S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mu_n(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(f^i(x))$$

で定義すると, μ_n は確率測度。

確率測度の集合は weakly compact であるから, subsequence $\{k_n\}$ で $\{\mu_{k_n}\}$ がある確率測度 μ に weakly 収束するものがある。

つまり $\forall g \in C^0(S^1)$ に対して $\mu_{k_n}(g) \rightarrow \mu(g)$

とくに $g = \varphi = \bar{f} - \text{id}$ とおいて $\mu_{k_n}(\varphi) \rightarrow \mu(\varphi)$

よこゝろが
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{k_n}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=0}^{k_n-1} \varphi(f^i(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \{ \bar{f}^{k_n}(x) - x \} = \alpha$$

$$\therefore \mu(\varphi) = \alpha$$

μ が f に関して不変なことは $\mu_{k_n}(g)$ の定義より明らか。

$$\therefore P(\bar{f}) \subset \{ \mu(\varphi) \mid \mu \in M \}$$

一方、 $\frac{p}{q} < P(\bar{f})$ ならば、 $\bar{f}^q(x) - x - p > 0$ for $\forall x \in S'$

$$\therefore \mu(\bar{f}^q - \text{id} - q \cdot \frac{p}{q}) > 0 \quad \text{for } \forall \mu \in M$$

よこゝろ
$$\begin{aligned} \mu(\bar{f}^q - \text{id} - q \mu(\varphi)) &= \mu\left(\sum_{i=0}^{q-1} (\bar{f} - \text{id}) f^i\right) - q \mu(\varphi) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \mu(\varphi \cdot f^i) - q \mu(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\mu(\varphi) \geq \frac{p}{q}$$

同様にして $\frac{p}{q} > P(\bar{f})$ ならば $\mu(\varphi) \leq \frac{p}{q}$

$P(\bar{f})$ は閉集合で $P(\bar{f}) \subset \{ \mu(\varphi) \mid \mu \in M \}$ である。結局

$$P(\bar{f}) = \{ \mu(\varphi) \mid \mu \in M \} \quad \square$$

次に Proposition 2 の証明をするのに、Lemma を 2 つ用意する。

Lemma 1 $\theta > 0$ ならば、 $\forall k$: 自然数, $\forall \alpha$: 実数 に対し

$\beta \leq \alpha$ であつて $R_o \bar{f}^k(\beta) \geq \bar{f}^k(\alpha) + \theta$ である β が存在する。

証明 帰納法による。 $k=1$ のとき自明。 k のとき成立すると仮定すると $\beta \leq \alpha$ かつ $\overline{R_0 f^k}(\beta) \geq \overline{f^k}(\alpha) + \theta$ なる β が存在。 $\overline{R_0 f^k}(x+n) = \overline{f^k}(x) + n, n \in \mathbb{Z}$ 故
 $\gamma \leq \beta$ かつ $\overline{R_0 f^k}(\gamma) = \overline{f^k}(\alpha)$ なる γ が存在。

従って

$$\begin{aligned} \overline{f^{k+1}}(\alpha) + \theta &= \overline{f}(\overline{f^k}(\alpha)) + \theta = \overline{f}(\overline{R_0 f^k}(\gamma)) + \theta \\ &= \overline{R_0 f^{k+1}}(\gamma) \end{aligned}$$

で かつ $\gamma \leq \alpha$

□

次の Lemma は解析的整数論の教科書にある。

Lemma 2 任意の無理数 α に対して、^(有理数の)減少列 (及び増加列)

$\{\frac{p_n}{q_n}\}$ で α に収束し、かつ $|\frac{p_n}{q_n} - \alpha| < \frac{1}{q_n^2}$ なるものが存在する。

Proposition 2 の証明 $P(\overline{f}) = \alpha$ とする。 Lemma 2 により、

有理数の減少列 $\{\frac{p_n}{q_n}\} \downarrow \alpha$ で、 $\frac{p_n}{q_n} - \frac{1}{q_n^2} < \alpha$ なるものがとれる。 $P(\overline{f}) = \alpha$ 故に $\forall x$ に対して

$$\overline{f^{q_n}}(x) - \alpha < p_n \text{ である。}$$

今、 $\theta > 0$ で、 $\forall n, \forall x$ に対して $\overline{f^{q_n}}(x) - \alpha < p_n - \theta$ とおけると仮定する。 q_n を十分大きく $q_n \theta > 1$ とする n とすると、

$$\bar{f}^{p_n}(x) - x = \sum_{i=0}^{p_n-1} \left\{ \bar{f}^{p_n}(\bar{f}^{i p_n}(x)) - \bar{f}^{i p_n}(x) \right\}$$

$$< p_n(p_n - \theta) < p_n p_n - 1$$

よって

$$\rho(\bar{f}) < \frac{p_n p_n - 1}{p_n^2} < \alpha$$

これは $\rho(\bar{f}) = \alpha$ に矛盾。

従って ϵ は十分小さい $\theta > 0$ に対して

$$\bar{f}^{p_n}(x) - x \geq p_n - \theta$$

となる n, x が存在する。

一方 Lemma 1 より $y \leq x$ で $\overline{Rof}^{p_n}(y) \geq \bar{f}^{p_n}(x) + \theta$ なる y が存在。よって

$$\overline{Rof}^{p_n}(y) - y \geq \bar{f}^{p_n}(x) - x + \theta \geq p_n$$

$$\therefore \rho(\overline{Rof}) \geq \frac{p_n}{p_n^2} > \alpha = \rho(\bar{f})$$

$\rho(\bar{f})$ についても同様である。

□

参考文献

- [1] M. Herman, Sur la Conjugaison Différentiable des Difféomorphismes du Cercle à des Rotations, Publ. Math. I.H.E.S., No. 49, 1979.
- [2] R. Ito, Rotation Sets Are Closed, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1981), 89, 107-111.
- [3] ———, Minimal Entropy for Endomorphisms of the Circle, to appear.
- [4] S. Newhouse, J. Palis and F. Takens, Stable Families of Dynamical Systems I: Diffeomorphisms. Preprint, I.M.P.A., Rio de Janeiro.