

Local splitting families of pencils of curves of genus two with automorphism groups

群馬高専 荒川 達也 (Tatsuya Arakawa)

1 はじめに

$\Delta \subset \mathbf{C}$ を原点のまわりの開円板とし, $f: S \rightarrow \Delta$ を種数 2 の極小曲線束とする. さらに, f が原点上にのみ特異ファイバー F をもつとき, f を種数 2 の退化族と呼ぶ.

Z. Chen [3] と 堀川 [4] は, 種数 2 の退化族について, それぞれ次のような問題を調べた:

問題 1 退化族 f の自己同型群 $\text{Aut} f$ を分類すること. また, 与えられた有限群を自己同型群に含む f を決定すること.

問題 2 (i) f の変形 $\{f_\alpha\}_\alpha$ により特異ファイバー F を“分裂”させること.

(ii) 分裂を持たない特異ファイバー (原子ファイバー) を分類すること.

本稿では, これらの研究をもとに次の問題を考える:

問題 与えられた有限群を自己同型群に含む退化族に対し,

(i) 群の作用を保つような特異ファイバーの分裂を構成すること.

(ii) 群の作用を保つような分裂を持たない特異ファイバー (群作用のもとでの原子ファイバー) を分類すること.

以下, §2 で問題 1, 2 に対する Chen 氏と堀川氏の結果について述べ, §3 で上の問題に対するいくつかの結果を述べる. また §4 では, ある群の作用のもとでの原子ファイバーについて, その群の部分群の作用を保つ分裂の例を構成する.

2 自己同型群と分裂族

この節では問題 1, 2 に対する Chen 氏 と堀川氏の結果について述べるが, そのためにまず, 退化族の特異ファイバーを記述するための堀川氏の方法を復習し, 次に特異ファイバーの不変量を 2 種類定義する.

2.1 特異ファイバーと不変量

2.1.1 特異ファイバーの表示

特異ファイバー F をもつ種数 2 の退化族 $f: S \rightarrow \Delta$ に対し, 次の事実が成り立つ:

命題 下の図式が可換となるような 正規曲面 S' , 双有理写像 $S \rightarrow S'$, および 2 重被覆 $S' \rightarrow W = \mathbf{P}^1 \times \Delta$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} S & \rightarrow & S' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta & \leftarrow & W \end{array}$$

上の命題の 2 重被覆 $S' \rightarrow W$ に対し, $B \subset W$ をその分岐因子とすると, S' は正規だから B は 被約. さらに各ファイバー $\Gamma \subset W$ ($\Gamma = \mathbf{P}^1$) に対し, $BF = 6$.

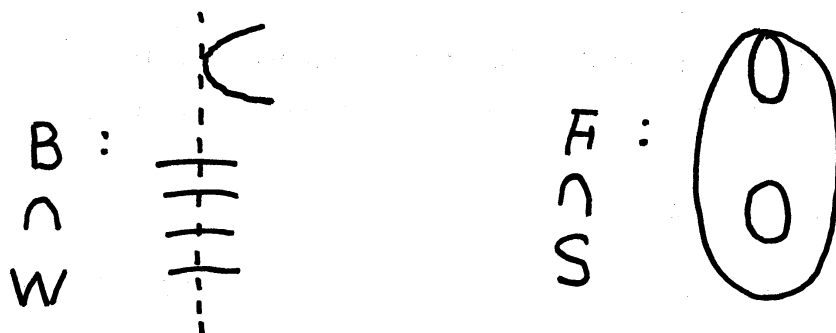
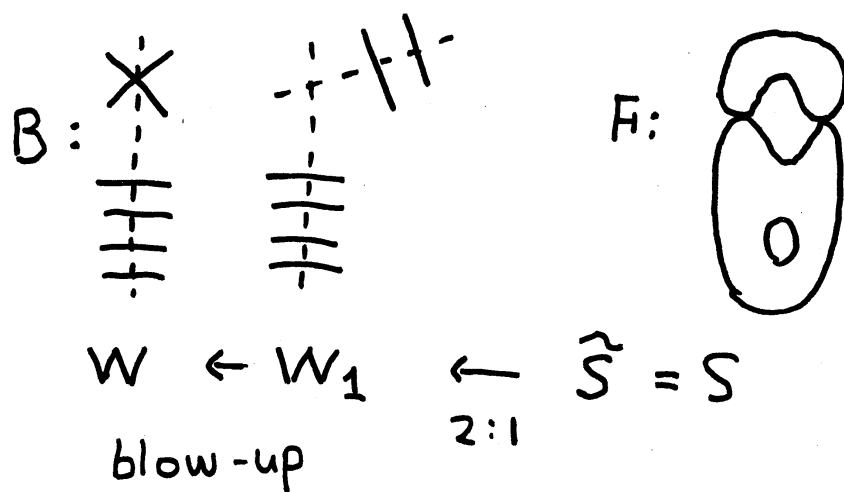
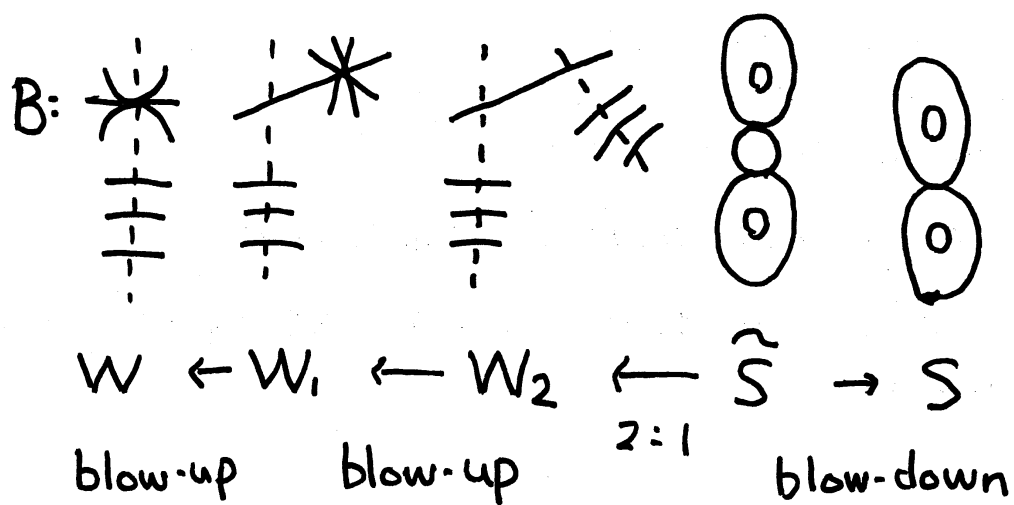
注意 S' は一意には決まらないが, B になるべく簡単な形になるものを選ぶ.

以下の例で見るように B の形により特異ファイバー F の形が決定される. 従って $W = \mathbf{P}^1 \times \Delta$ 上の因子 B を指定することにより, 退化族 $f: S \rightarrow \Delta$ の特異ファイバーを表示することができる.

記号

$$W = \mathbf{P}^1 \times \Delta \text{ 上 } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}^1 \uparrow \searrow \Delta \\ \cdots \not\subset B \\ \text{---} \subset B \end{array} \right.$$

例 1

例 2 (B が特異点をもつ場合 I)例 3 (B が特異点をもつ場合 II)

定義 例 2, 3 で見た S' の resolution $\tilde{S}$ を S' の canonical resolution と呼ぶ.

注意 例 3 で見たように, canonical resolution $\tilde{S}$ は minimal resolution とは限らないので, 極小曲線束 $f: S \rightarrow \Delta$ を得るためには何回か blow down を行う必要がある.

2.1.2 堀川指数とオイラー寄与

種数 2 の退化族 $S \rightarrow \Delta$ に対し, 特異ファイバー F の複雑さの指標となる二つの不変量を導入する.

定義 1 S' の canonical resolution $\tilde{S}$ に対し, $\tilde{S} \rightarrow S$ に含まれる blow down の数を F の堀川指数と呼び, $\mathcal{H}(F)$ と表す.

定義 2 $\mathcal{E}(F) := e(F) + 2$ を F のオイラー寄与と呼ぶ (e は位相的なオイラー数).

補題 特異ファイバー F に対し 常に $\mathcal{E}(F) \geq 1$.

例 例 1, 2, 3 の特異ファイバーに対し, それぞれ $(\mathcal{H}(F), \mathcal{E}(F)) = (0, 1), (0, 2), (1, 1)$.

2.2 曲線束の自己同型群

S の複素多様体としての自己同型 $\sigma: S \rightarrow S$ が 条件 $f = f\sigma$ をみたすとき, σ は曲線束 f の自己同型であるという. $\text{Aut} f$ で f の自己同型全体からなる群を表す.

$\mathcal{G}$ を $\text{Aut} f$ の有限部分群とすると, f の非特異ファイバー X に対し自然に $\mathcal{G} \hookrightarrow \text{Aut} X$. X は種数 2 の代数曲線なので, 次の事実が成り立つ (cf. [5]):

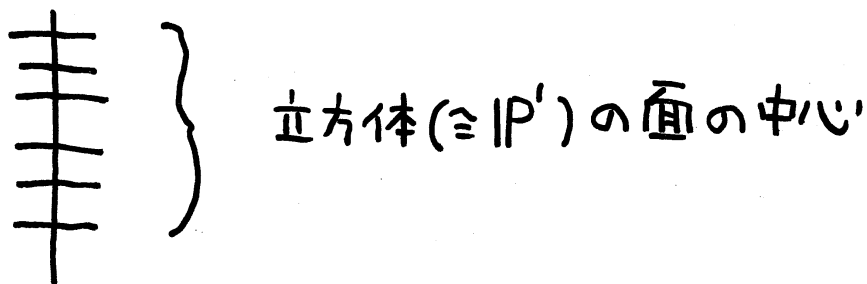
命題 下の条件 (i), (ii) をみたす全射準同型 $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow G$ が存在する:

- (i) $\text{Ker} \varphi$ は高々 hyperelliptic involution から成る
- (ii) G は $\mathbf{P}^1$ の有限自己同型群で, 次のどれかに同型:

$$O_{24}, T_{12}, D_{12}, D_8, D_6, D_4, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \{1\}.$$

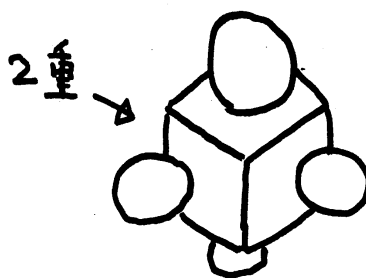
Z. Chen [3] は, これらの群を自己同型群に含むような種数 2 曲線束の特異ファイバーの分類を与えた (cf. [3, §2]).

例 1 $G = O_{24}$ のとき, 分岐因子 B は次の形:



対応する特異ファイバーは

$$F = 2D_0 + D_1 + D_2 + D_3 \\ + D_4 + D_5 + D_6 \\ (D_i \cong \mathbb{P}^1)$$

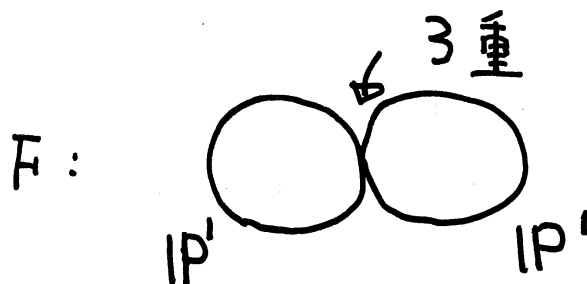


例 2 $G = Z_6$ のとき, 分岐因子 B は次のどれか:

- (i) $B : x^6 - t^k = 0 \ (k = 1, 2, 3).$
- (ii) $B : t(x^6 - t^k) = 0 \ (k = 0, 1, 2).$

(x は $\mathbb{P}^1$ の, t は Δ の局所座標.)

例 (i) で $k = 1$ のとき, 対応する特異ファイバーは:



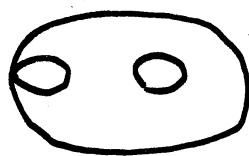
2.3 特異ファイバーの分裂

曲線束 $f: S \rightarrow \Delta$ と特異ファイバー $F \subset S$ に対し、下の条件 (i), (ii) をみたす種数 2 曲線束の族 $f_\alpha: S_\alpha \rightarrow \Delta$ ($\alpha \in U$) を特異ファイバー F の分裂と呼ぶ ($U \subset \mathbb{C}$ は原点の開近傍で $\alpha \in U$ はパラメータ):

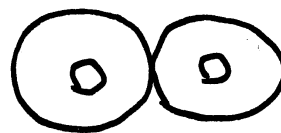
- (i) $\alpha = 0$ のとき f_α は f と一致する.
- (ii) $\alpha \neq 0$ に対し、 f_α は l 本 ($l \geq 2$) の特異ファイバーを持つ.

定理 1 (cf. [1], [2], [4])

- (i) 種数 2 曲線束の各特異ファイバーは、有限回の分裂により、次の 2 種に還元される;
 - (a) F は node をひとつ持つ楕円曲線 ($\mathcal{E}(F) = 1, \mathcal{H}(F) = 0$).
 - (b) $F = D_0 + D_1$ (D_1, D_2 は非特異楕円曲線で一点で transversal に交わる) ($\mathcal{E}(F) = 1, \mathcal{H}(F) = 1$).



(a)



(b)

定理 2 (遠藤, 足利) 特異ファイバーの分裂 $F \rightarrow F_1 + \cdots + F_l$ に対し、次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(F) &= \mathcal{E}(F_1) + \cdots + \mathcal{E}(F_l), \\ \mathcal{H}(F) &= \mathcal{H}(F_1) + \cdots + \mathcal{H}(F_l).\end{aligned}$$

不変量の値と定理 2 から直ちに次が従う:

系 定理 1 の 2 種の特異ファイバーはこれ以上分裂しない (種数 2 の原子ファイバー).

3 自己同型群を保つ分裂

定義 1 種数 2 の退化族 $f: S \rightarrow \Delta$ と $\text{Aut} \mathbf{P}^1$ の有限部分群 G に対し、自然な写像 $\mathcal{G} \rightarrow \text{Aut} \mathbf{P}^1$ の像が G になるような $\text{Aut} f$ の部分群 $\mathcal{G}$ が存在するとき、 f は G -退化族であ

るという.

定義 2 G -退化族 $f: S \rightarrow \Delta$ と f の分裂

$$F: S = \bigcup_{\alpha \in U} S_{\alpha} \rightarrow U$$

に対し, 次のふたつの条件をみたすような, G に対応する部分群 $\mathcal{G} \subset \text{Aut} f$ が存在するとき, F は f の G -分裂であるという:

- (i) $\mathcal{G} \hookrightarrow \text{Aut} F$.
- (ii) $\alpha \in U$ ごとに $\mathcal{G} \hookrightarrow \text{Aut} f_{\alpha}$.

我々は Chen 氏により分類された G -退化族の各タイプに対し, 堀川氏による分裂の構成法を適用することにより §1 の問題に対する若干の結果を得た.

以下に, いくつか例を挙げる:

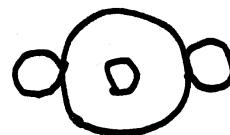
例 1 $G = Z_6$ のとき

- (i) 各特異ファイバーは, 有限回の分裂で次の 2 種にまで還元される:
 - (a) $F = D_0 + D_1$ (D_0, D_1 は非特異有理曲線で, 一点で 3 重に交わる).
 - (b) $F = 2D_0 + D_1 + D_2$ (D_0 は非特異楕円曲線, D_1, D_2 は非特異有理曲線で, D_0 と D_1, D_0 と D_2 はそれぞれ一点で transversal に交わる).



$$\mathcal{E} = 5, \mathcal{H} = 0$$

(a)



$$\mathcal{E} = 4, \mathcal{H} = 1$$

(b)

- (ii) 上の 2 種は, Z_6 の作用を保つ分裂を持たない.

例 2 $G = Z_5$ のとき

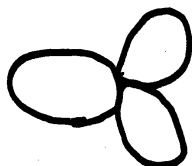
- (i) 各特異ファイバーは, 有限回の分裂で次の 3 種にまで還元される:
 - (a) F は $(2, 5)$ -cusp をひとつ持つ有理曲線.
 - (b) $F = D_0 + D_1 + D_2$ (D_0, D_1, D_2 は一点で会する非特異有理曲線で, $D_0 D_1 = D_0 D_2 = D_1 D_2 = 1$).

(c) $F = D_0 + 2D_1 + 3D_2 + 2D_3$ (D_0, D_1, D_2, D_3 は非特異有理曲線で, $D_0D_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = 1$ (その他の交点数はすべて 0)).



$$\xi = 4, \kappa = 0$$

(a)



$$\xi = 6, \kappa = 0$$

(b)



$$\xi = 7, \kappa = 1$$

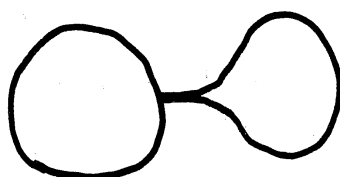
(c)

(ii) 上の 3 種は, Z_5 の作用を保つ分裂を持たない.

例 3 $G = Z_4$ のとき

各特異ファイバーは, 有限回の分裂で次の 1 種類のファイバーに還元される:

(a) $F = D_0 + D_1$ (D_0, D_1 は一点で交わる有理曲線で, D_0 は非特異, D_1 は D_0 との交点に (2,3)-cusp を持つ).



$$\xi = 5, \kappa = 0$$

4 部分群を保つ分裂の例

$G \subset \text{Aut } \mathbf{P}^1$ を有限部分群とし, $f: S \rightarrow \Delta$ を特異ファイバー F の G -退化族とすると, 任意の部分群 $H \subset G$ に対し f は H -退化族にもなっている.

そこで, 次の問題を考える:

問題 G -原子ファイバー $f: S \rightarrow \Delta$ の H -分裂を構成すること

より一般に

問題' 部分群の列

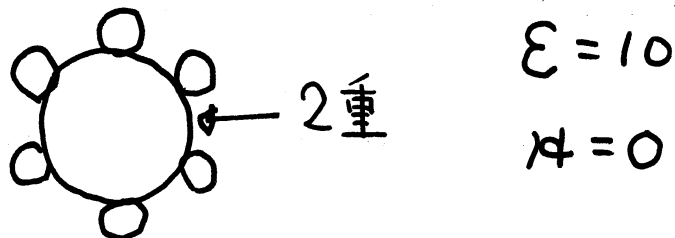
$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots$$

に対応する分裂の列を構成すること.

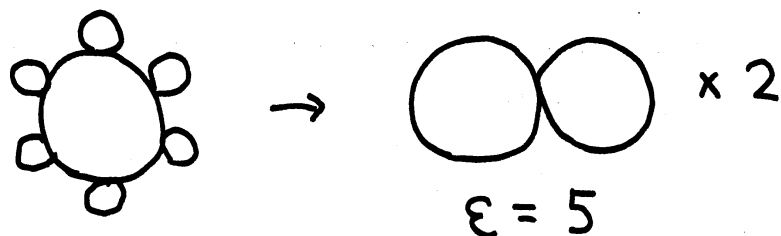
以下, ひとつの例について観察する:

例 $D_{12} \supset Z_6 \supset Z_3 \supset \{1\}$:

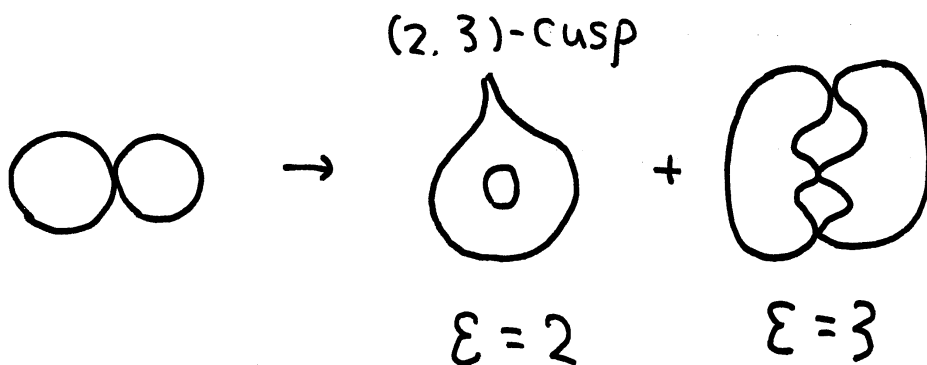
(i) D_{12} -退化は次の1種類のみ:



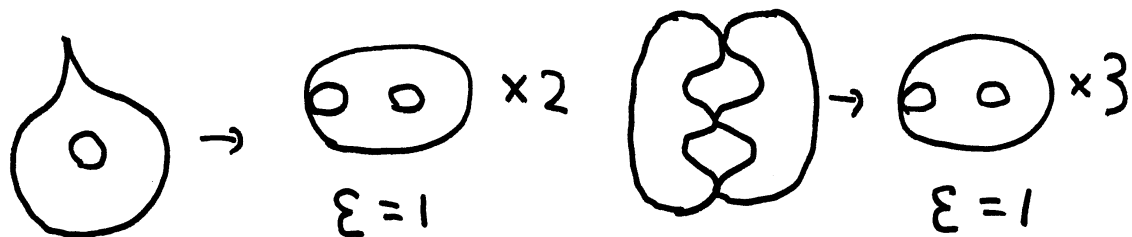
(ii) (i) の D_{12} -退化は次のように Z_6 -原子ファイバーに Z_6 -分裂する:



(iii) (ii) で現れた Z_6 -原子ファイバーは, 次のように Z_3 -原子ファイバーに Z_3 -分裂する:



(iv) (iii) で現れた2種の Z_3 -原子は, それぞれ次のように種数2の原子ファイバーに分裂する:



参考文献

- [1] T. Arakawa and T. Ashikaga, Local splitting families of pencils of hyperelliptic curves I, preprint
- [2] T. Arakawa and T. Ashikaga, Local splitting families of pencils of hyperelliptic curves II, in preparation
- [3] Z. Chen, Bounds of automorphism groups of genus 2 fibrations, Tôhoku Math. J. 46 (1994), 499–521.
- [4] Local deformation of pencils of curves of genus two, Proc. Japan. Acad. Ser. A Sect IA Math. 28 (1988), 241–244.
- [5] R. Tsuji, On conformal mapping of a hyperelliptic Riemann surface onto itself, Kôdai Math. Sem. Rep. 10 (1958), 1–23.

DEPARTMENT OF INFORMATION AND COMPUTER ENGINEERING

GUNMA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY

580 TORIBA MAEBASHI GUNMA 371-8530

JAPAN

E-mail address: arakawa@ice.gunma-ct.ac.jp