

# 低プラントル数流体の熱乱流の性質 — 2つの境界層の逆転はあるか? —

東北大通研 瀬川武彦(Takehiko Segawa)

東北大通研 佐野雅己(Masaki Sano)

## 1 はじめに

近年、様々な物質で熱対流の統計的性質が詳しく調べられ、乱流中にはHard乱流とSoft乱流の2つの状態があることが分かっている。Hard乱流中には熱境界層と速度境界層の2つの境界層が存在し、通常では熱境界層は速度境界層の内側にある。最近その2つの境界層の位置関係が、さらに高い乱流状態では逆転する可能性があることが理論や実験で示されている。例えば、 $\text{SF}_6$  (不活性ガス) の実験結果から、Rayleigh数 ( $Ra$ ) が  $10^{14}$  あたりで2つの境界層が逆転することが推察される[1]。本研究では、境界層の逆転現象の有無を実験的に確かめるために、低Prandtl数 ( $Pr$ ) の流体である水銀 ( $Pr = 0.024$ ) を使用する。これは、低Prandtl数流体は高Prandtl数流体に比べ、小さいRayleigh数で逆転が起こる可能性があることが理論で示されているためである[2]。水銀では  $10^5 < Ra < 10^8$  で境界層の逆転があるのではないかと考えられており、本研究において実現可能である。また、可動式の温度センサにより対流セル内の様々な位置での温度ゆらぎ時系列を測定し、その解析により得られる温度ゆらぎの平均から熱境界層を、温度ゆらぎ周波数スペクトルから速度境界層を決定することができる。2つの境界層が逆転している場合、熱流の変化に伴うNusselt数 ( $Nu$ ) などの物理量のRayleigh数に対するスケーリング則が遷移することや、乱流を特徴付けられると思われるplumeの発生機構が変化することがなど予想される。このような現象はまだ見られておらず、大変興味深い問題である。

## 2 熱乱流におけるスケーリング則

近年、様々な物質の熱乱流の統計法則が調べられ、乱流中には今のところHard乱流とSoft乱流の2つの状態が存在することが知られている。それに合わせて、乱流中の温度分布や速度分布を単純な構造の仮定のもと次元解析が行われ、実験により得られたいくつかのスケーリング則を満たす理論もある。ここでは、実験や理論のうち代表的なもの

をあげ比較する。

## 2.1 対流系を特徴付ける無次元数

これからの内容で必要な無次元数を4つあげておく。

**Rayleigh Number**

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\kappa \nu}$$

**Reynolds Number**

$$Re = \frac{L U}{\nu}$$

**Prandtl Number**

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

**Nusselt Number**

$$Nu = \frac{Q}{\chi \frac{A}{L} \Delta T}$$

ここで、 $\alpha$ は熱膨張率、 $g$ は重力加速度、 $\Delta T$ は温度差、 $L$ は系の長さ、 $\nu$ は動粘性率、 $Q$ は単位時間当たりの全熱輸送量、 $\kappa$ は熱拡散定数、 $U$ は流体の速さ、 $\chi$ は熱伝導率、そして $A$ は断面積である。

## 2.2 低温ヘリウム気体のスケーリング則

1980年代後半からシカゴ大グループにより、低温ヘリウム気体の乱流の実験が行われた[3-6]。それによると、Nusselt数のRayleigh数に対するスケーリングが $Ra \sim 10^8$ 付近で転移し、また温度ゆらぎ確率分布の形が転移点を境にして、低Rayleigh数側でGauss分布、高Rayleigh数側でExponential分布であることが分かった。

(i) Soft 乱流 ( $Ra = 10^5 \sim 10^7$ ) 領域において、温度ゆらぎ周波数スペクトルは、

$$P(f) = P_0 \exp \left( - \frac{f}{f_h} \right)^\beta$$

なる関数で fitting 可能であり、各係数はそれぞれ、

$$\beta = 0.55 \pm 0.05$$

$$Nu \sim Ra^{0.33}$$

$$f_h = Ra^{0.9}$$

である。

(ii) Hard 乱流 ( $Ra = 10^8 \sim 10^{14}$ ) 領域において、温度ゆらぎ周波数スペクトルは、

$$P(f) = \left( \frac{f}{f_0} \right)^\alpha \exp \left( - \frac{f}{f_h} \right)$$

なる関数で fitting 可能であり、各係数はそれぞれ、

$$\alpha = -1.35 \pm 0.05$$

$$Nu = 0.22 Ra^{0.285 \pm 0.004}$$

$$f_h \sim Ra^{0.78 \pm 0.02}$$

である。 $f_h$  は cut off 周波数である。

Hard 乱流には、温度ゆらぎパワースペクトルに  $f_p \sim Ra^{1/2}$  なるスケーリングも得られている。Hard 乱流中には、Soft 乱流には存在しない巨視的流れ (Large Scale Flow) が存在することが確認されており、 $f_p$  は巨視的流れにより現れる周波数である。実験により得られた対流セルの Reynolds 数は次のスケーリングに従う。

$$Re = 0.31 Ra^{0.485 \pm 0.005}$$

### 2.3 水銀による乱流のスケーリング則

竹下 (1994) により、水銀乱流の実験が行われた。 $Ra$  を  $10^6 \sim 10^8$  の範囲で変化させ温度ゆらぎの統計則を調べた結果、低温ヘリウム気体の乱流の実験の Hard 乱流の特徴を持つ温度ゆらぎ確率分布およびスケーリングが得られた [7-8]。周波数スペクトルは、

$$P(f) = \left( \frac{f}{f_0} \right)^\alpha \exp \left( - \frac{f}{f_h} \right)$$

で fitting される。各係数は、

$$\alpha = -1.6 \pm 0.1$$

$$Nu = 0.155 Ra^{0.27 \pm 0.02}$$

$$Re = 6.24 Ra^{0.46 \pm 0.02}$$

$$f_h \sim Ra^{0.39 \pm 0.02}$$

である。水銀乱流中にも低温ヘリウム同様、温度ゆらぎパワースペクトル中に  $f_p \sim Ra^{1/2}$  なるスケーリングが得られている。 $f_h$  に関しては、低温ヘリウムの値と異なるスケーリングが得られた。低温ヘリウムのスケーリングと比較すると、Nusselt数、Reynolds数のRayleigh数に対するスケーリングはほぼ同じ値を示したが、 $\alpha$  および  $f_h$  は異なる値を示した。

## 2.4 次元解析による Hard乱流のスケーリング則

Casting et al. (1989) は乱流中に Mixing Layer, Thermal Boundary Layer (熱境界層), Center Region の3つの領域の存在を仮定し、次元解析を行った[9]。熱境界層においては速度 $\sim 0$ で熱の輸送は熱伝導のみ、中央の領域では粘性は無視でき平均の温度勾配はないと仮定する。この2つの領域の間に Mixing Layer とよばれる、慣性は無視できるが粘性と浮力がバランスするような中間領域を加える。それぞれの領域で次元解析を行い、熱流や速度の Matching を行くと、

$$Nu \sim Pr^{-1/7} Ra^{2/7}$$

$$Re \sim Pr^{-5/7} Ra^{3/7}$$

なるスケーリング導ける[2]。Reynolds数のRayleigh数に対するスケーリングは、低温ヘリウムや水銀のHard乱流の指数 ( $=1/2$ ) と比べ少し小さいが、Nusselt数に関する値は、実験の結果と一致している。

### 3 熱境界層と速度境界層

熱対流系のHard乱流中の速度分布と温度分布の概念図を図1に示す。Zは対流セルの上部プレート（または下部プレート）からの距離である。上部（下部）プレート付近では、熱は熱伝導のみで運ばれると考えられるので温度の平均値はZに対して直線的な変化をするが、対流セルの中心へ近づくにつれ勾配がなっていく。突置く線的な部分の勾配の逆数を熱境界層の厚さ（ $\lambda_T$ ）と定義する。一方、速度はプレートではゼロでZと共に速くなり、あるところで流速最大になるが、中心へ向かうにつれて速度（平均）はゼロに近づいていく。この流速最大になる場所を速度境界層の厚さ（ $\lambda_v$ ）と定義する。

2つの境界層の位置関係に関して、理論的に予測することができる。対流セルにおいてその上下のプレートの温度差を $\Delta T$ 、セルの高さをLとすると、熱境界層における熱流Qは、

$$Q = \chi \frac{\Delta T}{\lambda_T}$$

と表される。このQをNusselt数の式に代入すると、

$$Nu = \frac{L}{2\lambda_T}$$

$$\frac{\lambda_T}{L} \sim \frac{1}{Nu} \sim Pr^{1/7} Ra^{-2/7}$$

とスケールされる。一方、熱境界層の厚さ $\lambda_v$ は、

$$\lambda_v \sim \frac{\nu}{U} \sim \frac{L}{Re}$$

$$\frac{\lambda_v}{L} \sim \frac{1}{Re} \sim Pr^{5/7} Ra^{-3/7}$$

とスケールされる。ここでReynolds数のスケーリングは実験結果ではなく、前節の理論の結果を用いた。熱境界層と速度境界層の厚さの比は、

$$\frac{\lambda_v}{\lambda_T} \sim Pr^{4/7} Ra^{-1/7}$$

となる。上式は、2つの境界層が一致もしくは逆転する（ $\leq 1$ ）ときのRayleigh数がPrandtl数に依存し、低Prandtl数流体は高プラントル数流体より小さいRayleigh数で逆転現象が起ることを示している。

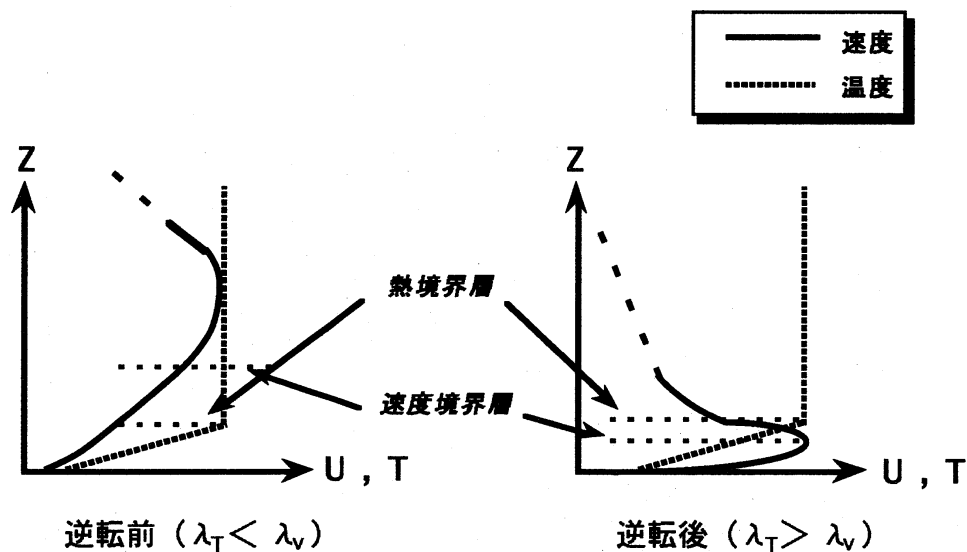


図1 2つの境界層の逆転現象の概念図

Belmonte et al. (1993)は、 $\text{SF}_6$  ( $\text{Pr} = 0.7$ ) のHard乱流中の2つの境界層の位置関係を実験的に詳しく調べた[1]。それによると、2つの境界層はそれぞれ、

$$\begin{aligned}\lambda_T &\sim Ra^{-2/7} \\ \lambda_v &\sim Ra^{-1/2}\end{aligned}$$

で薄くなる。また、それらの関係を高Rayleigh数側へ外挿するとが $10^{14}$ あたりで2つの境界層が一致する可能性を示した。

理論の予測と実験結果から、水銀 ( $\text{Pr} = 0.024$ ) における境界層の逆転は $10^5 < Ra < 10^8$ と見積られる。本研究において $10^6 < Ra < 10^8$ の乱流状態を実現することが可能であり、逆転現象の有無を確かめることができる。

## 4 実験

### 4.1 実験方法

図2は、本研究の測定系及び制御系を示している。対流セルは高さ10cm、底面の直径10cm (アスペクト比: 1) の円筒形である (図3)。下部プレートは熱伝導のよい銅で作られ、裏側に幅0.4mmのらせん溝が掘ってある。この溝には、ヒーターとして直径0.3mmの絶縁されたマンガン線が巻かれおり、最数百Wの熱量を水銀に加えることが

できる。銅製の上部プレートは、循環水により恒温（20℃）に保たれるようになっている。対流セルの側壁はステンレス製で、水銀と熱伝導率がほぼ一致するよう設計してある。この装置により、本研究において $10^6 \leq Ra \leq 10^8$ の乱流状態が実現可能である。対流セル内の数ヶ所には直径0.44mmのサーミスタが取付けてあり、Lock-in Amp（PAR 124A）を用いて温度ゆらぎを測定する。また、対流セルの外部に取付けられたz軸ステージによりサーミスタを対流セルの上部2cmの範囲を $0.5 \mu m$ 精度で動かすことができ、上部プレート付近の局所的な温度ゆらぎを測定することにより速度境界層と熱境界層を位置を決定することができる。サーミスタの抵抗値は、図4に示すブリッジ回路を用い、Lock-in Ampにより出力電圧を増幅することにより温度ゆらぎを測定できる。

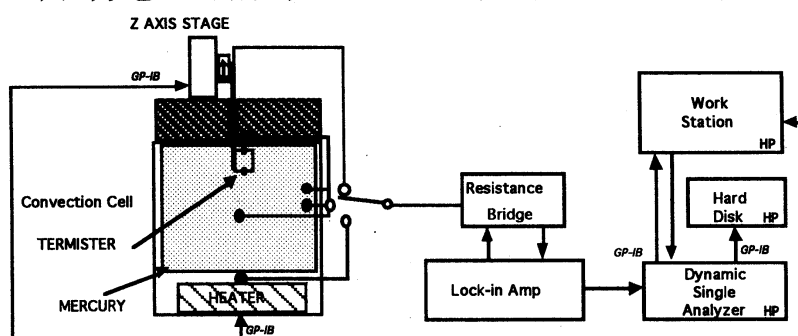


図2 測定系及び制御系

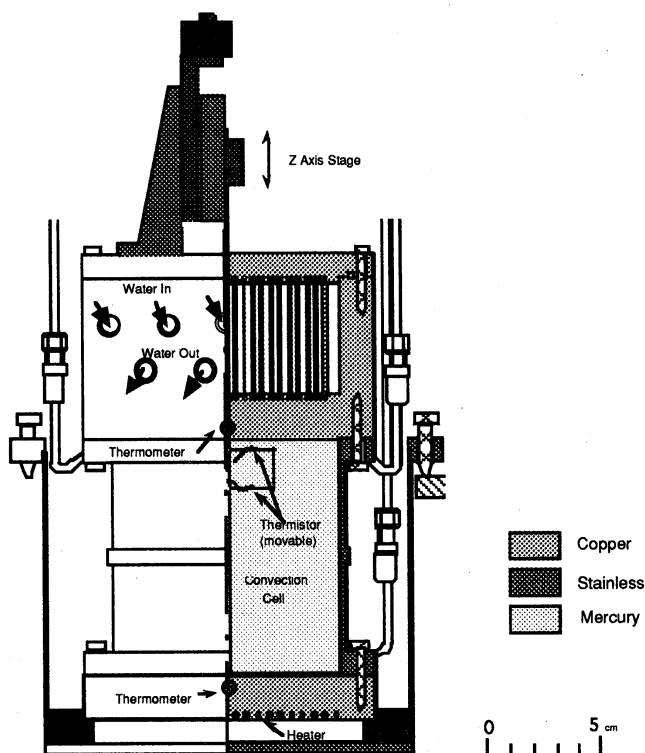


図3 実験装置

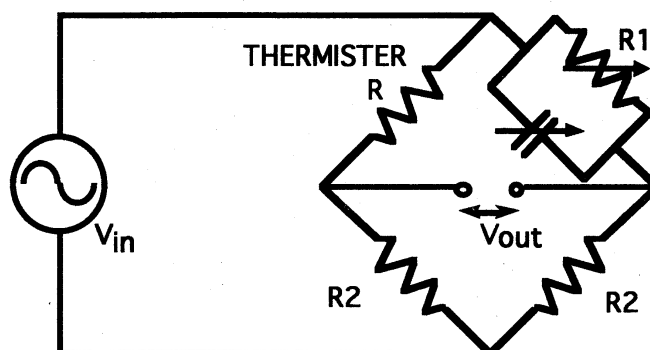


図4 ブリッジ回路

## 4.2 水銀乱流の温度ゆらぎの測定データ

図5から図7に、測定した温度ゆらぎ時系列データと、それを解析した温度ゆらぎパワースペクトル及び温度ゆらぎ確率分布を示す。温度ゆらぎパワースペクトルは2章の2.3で述べた関数でfittingされるが、その曲線がノイズレベルに到達したときの周波数を  $f_c$  (Hz) とする。

$f_c$  は次の節で述べるように流速に比例すると考えられ、速度境界層を決めることができる。温度ゆらぎ確率分布は対流セル中央ではExponential分布であり、Hard乱流であることを示している。可動式ステージにより、サーミスタは上部プレートから最大2 cm動くことができる。図8に温度ゆらぎ確率分布の形が変化する様子 ( $Ra = 6.0 \times 10^6$ ) を示す。これを見ると、プレートに近いところではGauss分布になっているが、サーミスタがプレートから中央へ近づくにつれ形がExponential分布へと変化していくようすがわかる。サーミスタは、Thermal Boundary Layer, Mixing layer, Center Region とHard乱流中の3つに領域を通過したものと思われる。

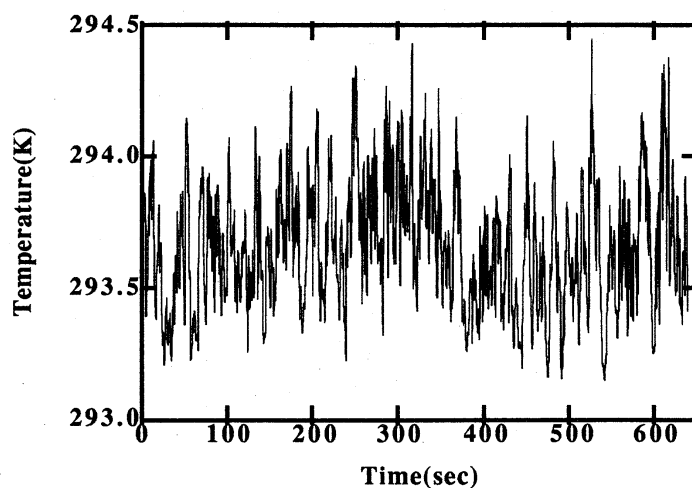


図5 温度ゆらぎ時系列データ

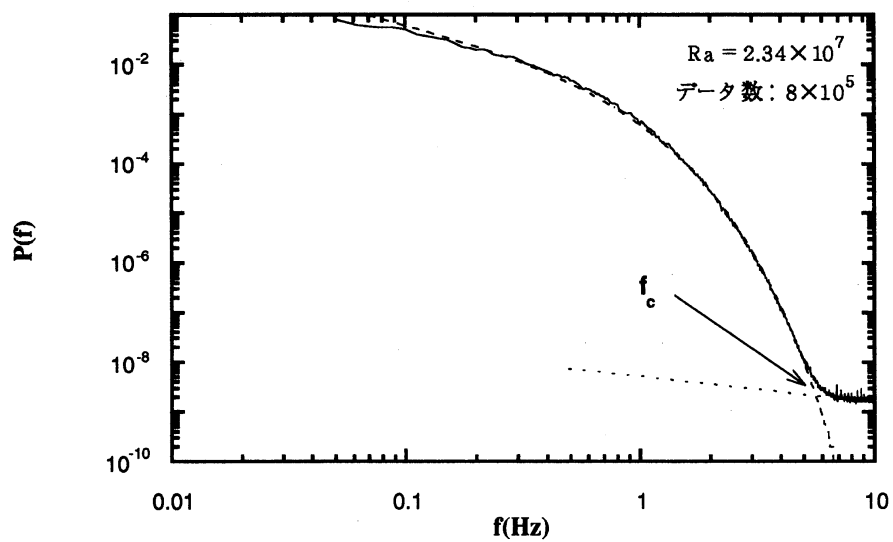


図6 60 Wにおける温度ゆらぎパワースペクトル ( $Z = 1.0$  mm)

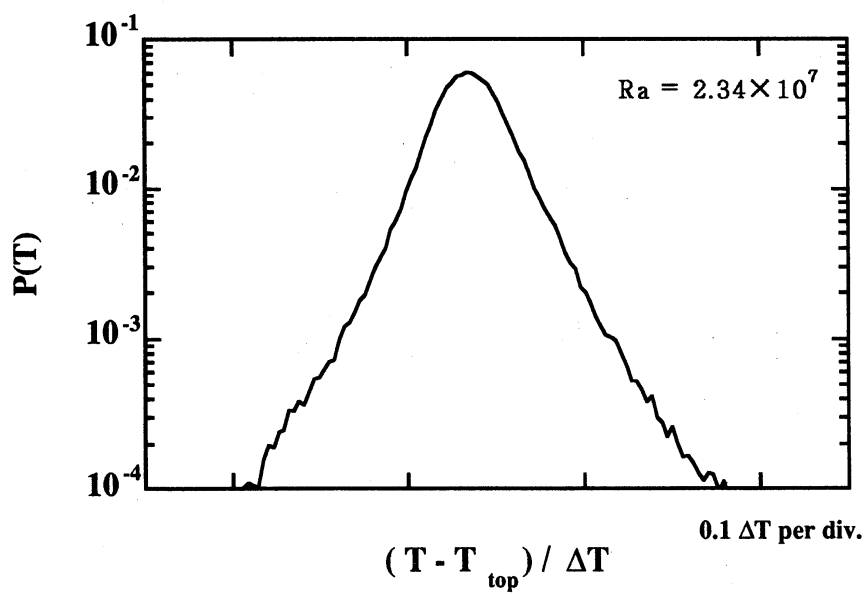


図7 60 Wにおける温度ゆらぎ確率分布 ( $Z = 50.0$  mm)

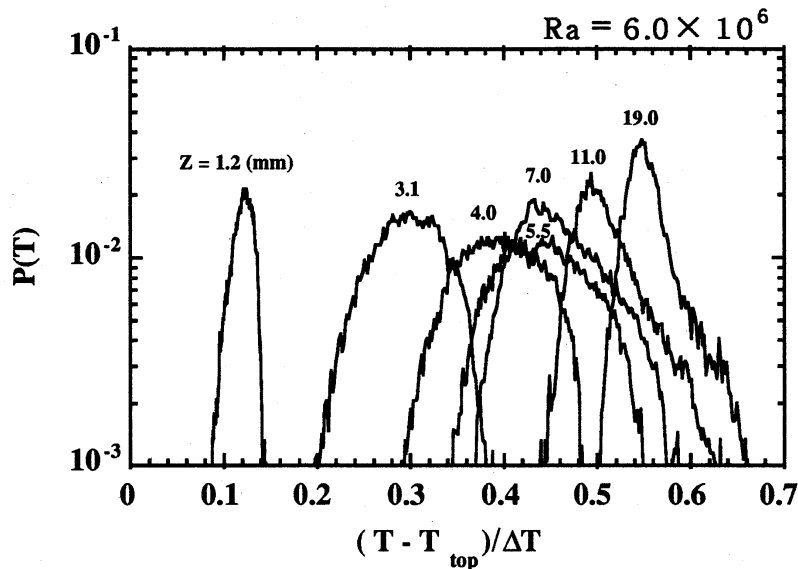


図8 20Wにおける各高さでの温度ゆらぎ確率分布

#### 4.3 2つの境界層の解析結果

本研究で下部プレートに加えた熱量 $Q$ は、 $Q=5, 10, 20, 50, 80, 100$  (Watt) の6つの条件である。各熱量に対して、上部プレートからの距離： $Z$ (mm),  $T_{ave}$ (K)：各位置での平均温度,  $T_{top}$ (K)：上部プレートの平均温度,  $RMS$  (K)：各高さでの温度の標準偏差,  $\Delta T$ ：上部プレートと下部プレートの温度差, および $f_c$  (Hz)：パワースペクトルがノイズレベルまで落ち込む周波数, として、

- 1)  $Z$ と $T_{ave} - T_{top}$ の関係
- 2)  $Z$ と $RMS / \Delta T$ の関係
- 3)  $Z$ と $f_c$ の関係

の関係から熱境界層と速度境界層を決定できる。下部プレートに加える熱量 $Q=100$  (Watt) のときの1)と2)を図9に, 3)を図10に示す。 $Z$ と $T_{ave} - T_{top}$ の関係図においては、セルの中央付近 ( $Z=15\sim 20$ mm)の $T_{ave} - T_{top}$ の平均値と、高さ $Z$ と上部プレート付近の $(T_{ave} - T_{top})$ の測定値を直線でfittingした交点を熱境界層としている。また高さ $Z$ と $RMS / \Delta T$ の関係で、 $RMS / \Delta T$ が最大値になる $Z$ が熱境界層と一致することが知られている。高さ $Z$ と $f_c$ の関係で $f_c$ の最大値を $f_{cmax}$ とする。Tilgner et al. (1993)では $f_{cmax}$ が流速に比例することを水の対流系での実験で確かめており、 $SF_6$ についてこれを当てはめ $f_{cmax}$ となるところで流速最大という仮定でその高さ $Z$ を速度境界層としている[1],[10]。本研究においても、この方法を採用し速度境界層を決定する。

6つ熱量の条件から得られた2つの境界層とRayleigh数の関係を図11に示す。この図で見ると、本研究で行われた実験のRayleigh数の全範囲において速度境界層の方が熱境界層よりも薄く、従って『2つの境界層は逆転している』という結果になった。

1), 2) による熱境界層の厚さはともに、

$$\lambda_T \sim Ra^{-0.20}$$

となり、3) による速度境界層の厚さは、

$$\lambda_v \sim Ra^{-0.12}$$

なるスケーリングになった。しかしRayleigh数の範囲が1桁と小さく、熱境界層の0.20という指数が理論値の $-2/7$ に近いかどうか、また速度境界層の厚さにばらつきがあるため指数の絶対的な値についてははっきり言うことはできない。さらに高い、もしくは低いRayleigh数での2つの境界層の厚さを測る必要がある。

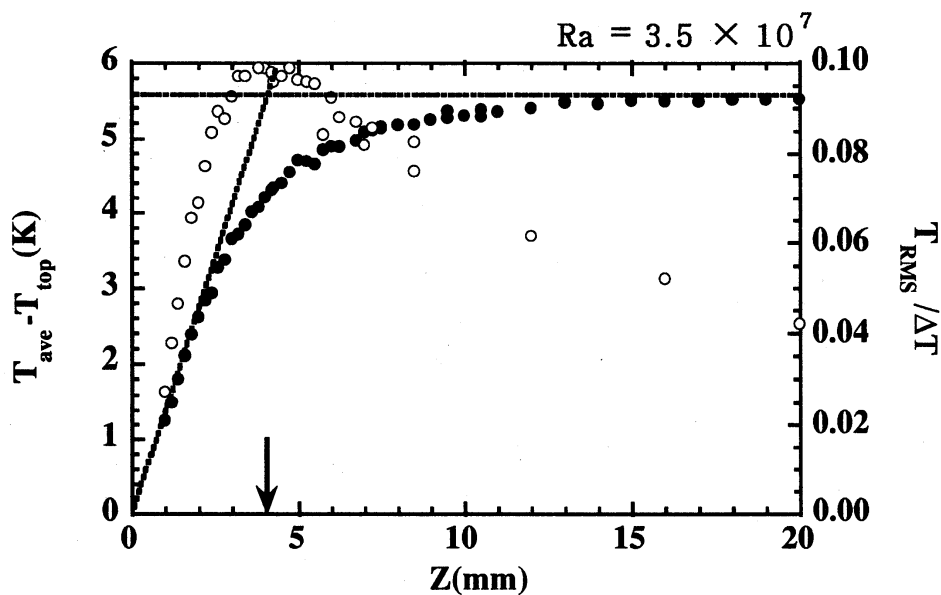


図9 ● :  $Z$  と  $T_{ave} - T_{top}$  の関係, ○ :  $Z$  と  $T_{RMS} / \Delta T$  の関係  
↓ : 熱境界層

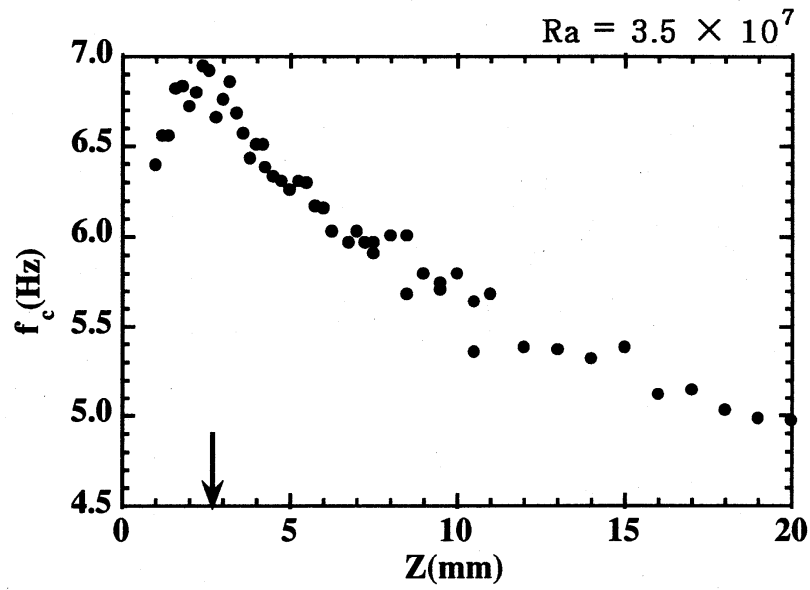


図 10 ● :  $Z$  と  $f_c$  の関係 , ↓ : 速度境界層

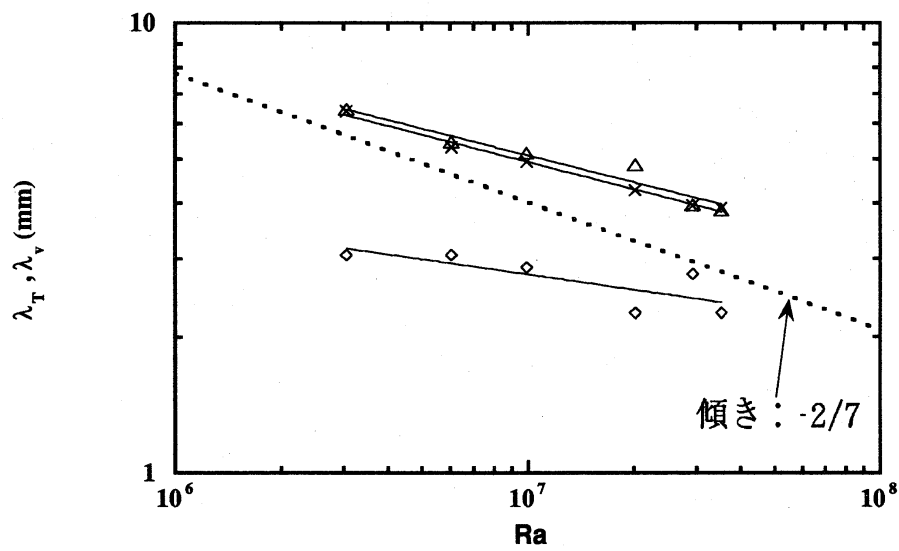


図 11  $\triangle$  : RMSによる熱境界層の厚さ  $\lambda_T \sim Ra^{-0.20}$   
 $\times$  : fittingによる熱境界層の厚さ  $\lambda_T \sim Ra^{-0.20}$   
 $\diamond$  : fcmixによる速度境界層の厚さ  $\lambda_v \sim Ra^{-0.12}$

## 5 考察

水銀乱流において、熱境界層と速度境界層の位置関係の逆転現象が確認された。逆転が起こった場合、境界層付近で熱流が変化しNusselt数のRayleigh数に対するスケーリングが変化すると考えられる。Kraichnan (1962)は、Rayleigh数が無限大に大きくなると境界層は無くなり熱はplumeにより直接下部から上部プレートに運ばれると仮定し次元解析を行った[11]。Hard乱流の次の状態としてKraichnanに従うならば、

$$Nu \sim Ra^{1/2}$$

なるスケーリングが得られ、指数が2/7から1/2へと大きくなることが予想される。水銀乱流では、

$$Nu \sim Ra^{0.27 \pm 0.02}$$

となっており、逆転にもかかわらずスケーリングはHard乱流のスケーリングに近い値を示している。

低温ヘリウムと水銀の実験から得られたスケーリングで唯一の違いは、温度ゆらぎパワースペクトルのfittingから得られるcut off周波数、 $f_h$  (Hz) だけである。

まず低温ヘリウムに関して $f_h$ の物理的な意味を考える。 $\lambda_T$ を熱境界層の厚さ、 $d$ をplumeの特徴的な大きさ、 $U$ をhard乱流中に存在する巨視的流れの速度とすると、

$$f_h \sim \frac{U}{d} \sim \frac{Ra^{0.50}}{Ra^{-0.28}} = Ra^{0.78}$$

となり、

$$\begin{aligned} d &\sim Ra^{-0.28} \\ \lambda_T &\sim \frac{1}{Nu} \sim Ra^{-0.28} \end{aligned}$$

より、 $d \sim \lambda_T$ と考えられる。これは、plumeの特徴的な大きさは熱境界層の厚さと一致している、ということを示している。

次に水銀の $f_h$ の物理的な意味について考える。

$$(1) f_h = Ra^{0.39} \sim \frac{U}{d} \quad \text{と仮定すると、}$$

$$d \sim \frac{U}{f_h} \sim \frac{Ra^{0.50}}{Ra^{0.39}} = Ra^{0.11}$$

となり、 $\lambda_T \neq d$  つまり、熱境界層の厚さ ( $\lambda_T \sim Ra^{-0.28}$ ) と plume の特徴的な大きさは一致しないことになる。

(2)  $\lambda_T = d$  と仮定すると、

$$\lambda_T = \frac{U}{f_h} \sim Ra^{0.11}$$

となり、熱境界層の厚さ  $\lambda_T$  が 4 章の 4.3 で得られたスケーリング ( $\lambda_T \sim Ra^{-0.28}$ ) と異なる値になる。

以上のことから、He ガスでは熱境界層からその厚さくらいの plume が発生し、その形を保持したまま測定点を通過するのに対して、水銀乱流に関しては本研究の Rayleigh 数の範囲において境界層が逆転しているために熱境界層付近が乱流化しており、plume が境界層からはく離すると同時に乱流境界層により混合され対流セルの中央に放出され、もとの形を保っていないことが考えられる。

ただし、水銀は熱伝導がよいために advection 時間に比べ plume の拡散時間が小さいく、たとえ plume が発生していたとしても観測地点ではこの形がはやけて cut off 周波数  $f_h$  が低温ヘリウムと違うスケーリングになった可能性もある。このことは今後 2 つの境界層の厚さをより広範囲の rayleigh 数で測定することにより、解決していく予定である。

## 6 まとめ

本研究では、水銀乱流の熱乱流における局所的な温度ゆらぎの測定を行い、次の結果を得た。

Rayleigh 数を  $3.0 \times 10^6$  から  $3.6 \times 10^7$  まで変化させて 2 つの境界層の厚さを解析した結果、全ての範囲で速度境界層の方が熱境界層よりも薄かった。つまり、水、低温ヘリウム、SF<sub>6</sub> 等の物質の Hard 乱流領域での境界層の位置関係が、水銀乱流では逆転していた。逆転現象が起きている場合、熱流の変化に伴い Nusselt 数のスケーリングに変化が起こることが予測されていたが、低温ヘリウム実験で得られたスケーリングと著しい変化はない。低温ヘリウムと異なるスケーリングは  $f_h$  のみである。 $f_h$  は最も高い周波数で、低温ヘリウムではこれから plume の大きさが熱境界層の厚さに対応しているといえるが、水銀では熱境界層の中にかなりの速度勾配があるために境界層から発生するのは plume より混合された構造であることが考えられる。今後はより広範囲の Rayleigh 数で水銀乱流中の境界層の厚さを測定し、さらに高い乱流状態ではどのようなスケーリング則が得られ、逆に低い乱流状態で非逆転現象や Soft 乱流が存在するのかどうか調べる予定である。

## 参考文献

- [1] A. Belmonte, A. Tilgner, and A. Libchaber, Phys. Rev. Lett. 70, 4067 (1993).
- [2] B. I. Shraiman and E. D. Siggia, Phys. Rev. A 42, 3650 (1990).
- [3] X.Z.Wu, Along a road to developed turbulence: Free thermal convection in low temperature helium gas, Doctoral Thesis, University of Chicago (1991).
- [4] F. Heslot, B. Casting, and A. Libchaber, Phys. Rev. A 36, 5870 (1987).
- [5] M. Sano, X. Z. Wu, and A. Libchaber, Phys. Rev. A 40, 6421 (1989).
- [6] X. Z. Wu, L. Kadanoff, A. Libchaber, and M. Sano, Phys. Rev. Lett. 64, 2140 (1990).
- [7] 竹下徹, 磁場中における水銀の発達乱流に関する研究, 東北大学修士論文 (1994).
- [8] T. Takeshita, T. Segawa, J. A. Glazier and M. Sano, preprint (1995).
- [9] B. Casting, G. Gunaratne, F. Heslot, L. Kadanoff, A. Libchaber, S. Thomae, X. Z. Wu, G. Zaleski, and G. Zanetti, J. Fluid Mech. 204, 1 (1989).
- [10] A. Tilgner, A. Belmonte, and A. Libchaber, Phys. Rev. E 47, 2253 (1993).
- [11] A. Kraichnan, Phys. Fluids 5, 1374 (1962).