

定数係数偏微分方程式系に対する Liouville の定理

都立大 理数 村田 貴

§1. 序

この講演の目的は、整関数に対する古典的な Liouville の定理を定数係数偏微分方程式論の枠の中で見なすことにある。

我々は、次の方程式系

$$P(D)u = \left\{ \sum_{j=1}^N P_{ij}(D)u_j \right\}_{i=1, \dots, M} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad M \geq N$$

—— (1)

を考察する。ここで、 P の実特値多様体

$$V = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n; \text{rank} \{P_{ij}(\xi)\} < N \right\}$$

は $\mathbb{R}^n$ に等しくなるものとする。

V の構造に関しては、次の命題が成り立つ。

命題 0. (H. Whitney [4]). 実特値多様体 V は

$$V = \bigcup_{k=0}^{n-1} V^k, \quad \bigcup_{j=0}^k V^j \text{ は代数多様体.}$$

と分解される。ここで V^0 は有限集合又は空集合であり、 V^k は k -次元の滑らかな多様体又は空集合である。

我々はこの命題を用いて、 V の次元を

$$d = \begin{cases} -1 & , \quad V = \emptyset \\ \max \{ k ; 0 \leq k \leq n-1, V^k \neq \emptyset \} & , \quad V \neq \emptyset \end{cases}$$

と定義する。

定理 1. P の実特値多様体の次元を d とする。
このとき、方程式 (1) の解 $u \in (L_{2,loc}(\mathbb{R}^n))^N$ が条件：

$$\left(\int_{R \leq |x| \leq 2R} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = o(R^{\frac{n-d}{2}}) \quad \text{as } R \rightarrow \infty$$

を満たすならば、 $u \equiv 0$ である。

定理 2. P の実特値多様体の次元を d とする。
このとき、方程式 (1) の解 $u \neq 0$ で、次の条件：

$$\left(\int_{R \leq |x| \leq 2R} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = O(R^{\frac{n-d}{2}}) \quad \text{as } R \rightarrow \infty$$

を満たすものが存在する。

§ 2. 定理の証明の概略

定理は、次の 2 つの命題から容易に導かれる。

命題 1 $f \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$ とする

$$a) \|f\|_R = O(R^{-s}) \Leftrightarrow \hat{f} \in Lip(s, r, \infty; 2)$$

$$b) \|f\|_R = o(R^{-s}) \Leftrightarrow \hat{f} \in Lip(s, r, \infty; 2)$$

$$\text{ここで, } \|f\|_R = \left(\int_{R \leq |x| \leq 2R} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Lip(s, r, \infty; 2) = \{ f \in L_2(\mathbb{R}^n); \sup_{h \in \mathbb{R}^n} |h|^{-s} \|\Delta_h^r f\|_{L_2} < \infty \}$$

$$Lip(s, r, \infty; 2) = \{ f \in L_p; \|\Delta_h^r f\|_{L_2} = o(|h|^s) \}$$

$$0 < s \leq r$$

$s \leq 0$ のときは $s > 0$ の場合の微分と Lip 空間を定義する。

命題 2. $M^k \subset \mathbb{R}^n$ を k 次元の C^∞ -多様体と L -開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ は M^k と交わらない。とする。

$$a) f \in Lip(-\frac{n-k}{2}, 0, \infty; 2) \Rightarrow \text{Supp}(f) \cap U \subset M^k \\ \Rightarrow f = 0 \text{ in } U.$$

b) $\varphi \in C_0^\infty(U)$ とする。このとき

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{M^k} \varphi \, dS, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

で定義される distribution T とすると、

$$T \in Lip(-\frac{n-k}{2}, 0, \infty; 2).$$

定理 1 の証明. u は方程式 (1) を満たしている

から, $\text{Supp}(\hat{u}_j) \subset V$, $j=1, \dots, N$.

従, スカラ関数 u について, 次の命題を示す。

$$\text{Supp}(\hat{u}) \subset V \quad \text{かつ} \quad \|u\|_R = o(R^{\frac{n-d}{2}})$$

$$\Rightarrow u \equiv 0.$$

まず, $\text{Supp}(\hat{u}) \subset \bigcup_{k=0}^{d-1} V^k$ を示そう。

任意の点 $p \in V^d$ に対し, p の近傍 U で $V \cap U \subset V^d$ なるものが存在するから, 命題 0 より,

$$U \cap V^d = \emptyset, \quad \text{Supp}(\hat{u}) \cap U \subset V^d$$

しかる命題 1 より,

$$\hat{u} \in \text{lip}(-\frac{n-d}{2}, 0, \infty; 2).$$

従, 命題 2 より $\hat{u} = 0$ in U .

次に $\text{Supp}(\hat{u}) \subset \bigcup_{k=0}^{d-2} V^k$, その次に $\text{Supp}(\hat{u}) \subset \bigcup_{k=0}^{d-3} V^k$ を示す。以下この操作を続けて, 結局 $\hat{u} = 0$ を得る。 q.e.d.

定理 2 の証明はほぼ明らかであろう。

Reference.

- [1] W. Littman, Decay at infinity to higher

order partial differential equations, Israel
J. Math. 8, 1970, 403-407.

[2] J. Peetre, Estimates for eigenfunctions,
Studia Math. 28, 1967, 169-182.

[3] L. Schwartz, Theorie des Distributions,
Hermann, 1966.

[4] H. Whitney, Elementary structure of real
algebraic variety, Ann. of Math. 66,
1957, 545-556.