

複素解析的葉層構造の特異点

北大 理(教養) 諏訪 立雄

ここでは余次元 1 の局所葉層構造に限って、その開折理論についてのみを、詳細および一般の場合については [10] - [14] を参照せよ。

1. 局所葉層構造

以後複素アファイン空間 $\mathbb{C}^n = \{z_1, \dots, z_n\}$ の原点 0 の近傍で考えることとし、 $n\mathbb{Q}$ (又は単に $\mathbb{Q}$) で変数 $z_1, \dots, z_n$ の収束中級数環 Σ , $n\Omega^p$ (又は単に Ω^p) で正則 p 形式の 0 における芽のなる $\mathbb{Q}$ -加群を表わす。 Ω^1 は単に Ω とかく。

定義 ($\mathbb{C}^n$ の 0 での) 余次元 1 の局所 (複素解析的) 葉層構造とは Ω の階数 1 の部分 $\mathbb{Q}$ -加群 F を種分可能なもの、つまり $\omega \in F$ の生成元と可2と $d\omega \wedge \omega = 0$ が成り立つものをいう。

$F=(\omega)$ が葉層構造のとき, 集合 $\{z \mid \omega(z)=0\}$ (の 0 での芽) $\in S(F)$ とかき F の特異点集合という. $S(F)$ の余次元が 1 のときは $\omega=f\omega'$, $f(0)=0$ とかけるので, 以後 $\text{codim } S(F) \geq 2$ と仮定する (このとき F は reduced であるという).

定義. F が Haefliger 葉層構造であるとは, F が完全 1 形式 df で生成されること.

以下で分るように, $F=(df)$ の開折理論は 関数芽 f の *right-morphisms* に関する開折理論と本質的に同値である.

2. 葉層構造の開折.

定義. $F=(\omega)$ の開折 (unfolding) とは, $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m = \{(z, t)\}$ の原点 0 での余次元 1 の局所葉層構造 $F=(\tilde{\omega})$ で, $\tilde{\omega}|_{t=0} = \omega$ となるものという. $\mathbb{C}^m$ を F の parameter 空間という.

$F=(\tilde{\omega})$ であつて F' とよばれる $\mathbb{C}^m = \{t\}$ であつて $\mathbb{C}^2 = \{s\}$ を parameter 空間とすると $F=(\omega)$ の開折とすると, F'

か子からのみきもとしてあるとは、次の条件を満たす写像芽
 $\Phi: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0)$ および $\varphi: (\mathbb{C}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$
 が存在すること:

(1) 図式

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{C}^l, 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{C}^m, 0) \end{array}$$

は可換、ただし上の写像は射影である。

(2) $\Phi|_{s=0} = \text{id}$.

(3) $\mathcal{F}'$ は $\Phi^* \omega$ で生成される。

F の開折芽が versal であるとは、 F 任意の開折芽
 からのみきもとしてあることと定義する。

$F = (\omega) \in \mathbb{C}^n$ の 0 での局所葉層構造とし、 $\Omega_F = \Omega/F$ とおく。
 F の開折理論では群 $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ が重要な役割を果たす。
 我々の場合、 $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dz_i$, $f_i \in \mathcal{O}$ と表わしてあると

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\Omega_F, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/(f_1, \dots, f_n)$$

と書ける。ここで $(f_1, \dots, f_n)$ は $f_1, \dots, f_n$ で生成された
 ideal である。 $\mathcal{O}$ の元 h に対応する $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_n)$ の元を
 $[h]$ で表わしてある。 $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ が複素ベクトル空間とし

で有限次元であるためには $S(F) \neq 0$ であることが必要十分である. $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ext}_0^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ と Bott residue [1] の関係については [13] を参照せよ.

さて, F の開折子 $= (\tilde{\omega})$ に対し, 無限小開折写像

$$\rho: T_{\mathbb{C}^m, 0} \rightarrow \text{Ext}_0^1(\Omega_F, \mathcal{O})$$

が定義される. ここで $T_{\mathbb{C}^m, 0}$ は F の parameter 空間 $\mathbb{C}^m$ の 0 における正則接空間である. ρ は $\mathbb{C}$ -線型写像で, 接ベクトル $\frac{\partial}{\partial t_k}$ に対し, $h_k = \langle \tilde{\omega}, \frac{\partial}{\partial t_k} \rangle|_{t=0}$ ($\tilde{\omega}$ の dt_k の係数) の $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_n)$ での類 $[h_k]$ と対応させるものである. ここでは次のような問題を考えてみる.

- (1) $\text{Ext}_0^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ のどの元が F の開折からくるか?
 - (2) $\text{Ext}_0^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ のどの元が F の一次開折からくるか?
- 一般に (1) は容易である. 次節で (2) を考える.

3. 一次(無限小)開折.

$n+1 \Omega \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} = \{(z, t)\}$ 上の正則 1 形式 ω の原点での芽のなす $n+1 \mathcal{O}$ -加群とす.

定義 葉層構造 $F=(\omega)$ の一次(無限小)開折とは $n+1 \Omega$ の階数 1 の部分 $n+1 \mathcal{O}$ -加群 $\rho^{-1}(\tilde{\omega})$ で次をみたすものをいふ:

$$(1) \tilde{\omega}|_{t=0} = \omega,$$

$$(2) \quad d\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \equiv 0 \pmod{t^2, tdt}.$$

ただし, $\tilde{\omega}$ は $\mathcal{F}^{(1)}$ の生成元である。

F の 2 つの 1 次開折の間の同値関係は自然に定義される。

$\mathcal{U}(F)$ は F の 1 次開折の同値類全体の集合を表わすことにする。 $\mathcal{F}^{(1)} = (\tilde{\omega})$ が $F = (\omega)$ の 1 次開折のとき,

$$\tilde{\omega} \equiv \omega + \omega^{(1)}t + \ell dt \pmod{t^2, tdt}$$

$\omega^{(1)} \in {}_n\Omega$, $\ell \in {}_n\mathcal{O}$ と書け, $\mathcal{F}^{(1)}$ は $\text{Ext}_\mathcal{O}^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ の元 $[\ell]$ に対応させることができる。さらに $\mathcal{F}^{(1)}$ と $\mathcal{F}^{(1)'}$ が F の 2 つの 1 次開折とるとき, $\mathcal{F}^{(1)}$ と $\mathcal{F}^{(1)'}$ が同値であるためには, 対応する $\text{Ext}_\mathcal{O}^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ の元が一致することが必要十分であることが容易に確かめられる。従って $\mathcal{U}(F)$ は $\text{Ext}_\mathcal{O}^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ の部分集合と考えることができる。

命題. $\mathcal{U}(F) = \{[\ell] \in \text{Ext}_\mathcal{O}^1(\Omega_F, \mathcal{O}) \mid \ell d\omega = \tau \wedge \omega, \tau \in \Omega\}.$

上の命題は又次のように表わすこともできる。

$$\mathcal{Z}^2 = \{\tau \in \Omega^2 \mid \tau \wedge \omega = 0\}, \quad \mathcal{B}^2 = \{\tau \in \Omega^2 \mid \tau = \tau \wedge \omega\},$$

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{Z}^2 / \mathcal{B}^2 \quad \text{と書く, } \mathcal{Z}^2 \text{ の元 } \tau \text{ に対応する } \mathcal{H}^2 \text{ の元を } [\tau]$$

と書く。

$$\mathcal{U}(F) = \{[\ell] \in \text{Ext}_\mathcal{O}^1(\Omega_F, \mathcal{O}) \mid [\ell d\omega] = 0 \text{ in } \mathcal{H}^2\}.$$

4. Malgrange の定理.

まず特には F が Haefliger の場合を考慮しよう。このときは F の生成元として完全形式 $d\mathbf{f}$ が与えられるので、

$$\mathcal{U}(F) = \text{Ext}_0^1(\Omega_F, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/(\mathbf{d}\mathbf{f})$$

となる。ただし $(\mathbf{d}\mathbf{f})$ は $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z_n}$ で生成された ideal である。さらに $\mathcal{U}(F)$ の任意の元 $[h]$ には対応する F の開折が存在する。つまり $\mathbf{f} = (\tilde{\omega})$, $\tilde{\omega} = d(\mathbf{f} + h\mathbf{t}) = d\mathbf{f} + dh \cdot \mathbf{t} + h d\mathbf{f}$ を考慮すればよい。

次に $H^2 = 0$ の場合にも $\mathcal{U}(F) = \text{Ext}_0^1(\Omega_F, \mathcal{O})$ となるが、この条件に代えては $\text{codim } \mathcal{F}(F) \geq 3$ ならまた成り立つ ([9])。実際、次の定理が成り立つ。

定理 (Malgrange [4]). $\text{codim } \mathcal{F}(F) \geq 3$ なら F は Haefliger 葉層構造。

証明には、 $F = (\omega)$ の開折 $\mathbf{f} = (\tilde{\omega})$ で

$$\tilde{\omega} = \sum_{p \geq 0} \omega^{(p)} \mathbf{t}^p + d\mathbf{t}, \quad \omega^{(0)} = \omega$$

の形が ω にも成り立つ。 $H^2 = 0$ から、 $d\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$ を形式的に与える $\omega^{(p)}$, $p \geq 1$, の存在が分る。この級数の収束性には Malgrange の privileged neighborhood の定理 ([4]) が用いられる。このようにして与えた $\tilde{\omega}$ は特異点を持たないので Frobenius の定理により正則な積分因子で原点で 0 にならな

ものを正持つか, これを $t=0$ に制限すれば ω の積分因子が
出来ることがある。

5. 普遍性定理.

$F=(\omega)$ を局所葉層構造とする。

定義. F の開折 $\tilde{F}$ が infinitesimally versal であるとは, $\tilde{F}$ の
無限小開折写像の像が $\mathcal{U}(F)$ と一致すること。

定理 (普遍性定理). F を余次元 1 の (reduced な) 局所葉層
構造とし, $\tilde{F}$ を F の開折とする。このとき, $\tilde{F}$ が infinitesimally
versal ならば versal である。

証明は, (I) F の任意の開折 $\tilde{F}$ を $\tilde{F}$ から ω もとめる写像の形
式的な級数としての構成, および (II) (I) の級数の収束性の
証明, から成る。(I) は複雑で, 積分可能条件とうまく使う必
要がある。(II) には, Kodaira-Spencer [3] の方法と
Malgrange [4] の方法を用いる。

以下, 上の定理の直接的結果をいくつか記すが, まずはこ
うな定義をのべる。

定義. $F=(\omega)$ の開折 $\tilde{F}$ が自明であるとは, submersion の

芽 $\Phi: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ が存在し, γ は $\Phi^* \omega$ で生成されること. ただし $\mathbb{C}^m$ は γ の parameter 空間である.

定義. F の開折 γ が universal であるとは versal から無限小開折写像が 1 対 1 であること.

命題. γ が F の universal を開折するとは, γ の任意の開折は自明.

普遍性定理の系.

I. $\cup(F) = 0$ ならば F は自分自身の universal を開折. 従って F の任意の開折は自明.

II (Cerveau - Neto [2]). $\omega = z_1 \cdots z_n \sum_{i=1}^n a_i \frac{dz_i}{z_i}$,
 $a_i \neq a_j \neq 0$, とすると $F = (\omega)$ の任意の開折は自明
 (実際 $\cup(F) = 0$).

III (Mattei - Moussu [7]). F が Haefliger ならば F の任意の開折も Haefliger.

IV (Mather [6]). $\tilde{f}$ が関数芽 f の infinitesimally right-versal を開折する $\tilde{f}$ は right-morphism に関して versal を f の開折 ([15] を参照).

例1. $\mathbb{C}^2 = \{(x, y)\}$ 上の1形式

$$\omega = (2xy + y^2)dx - (x^2 + 2xy)dy$$

を考へ $F = (\omega)$ とする. このとき, $\text{Ext}_\mathbb{C}^1(\Omega_F, \mathcal{O}) = \mathbb{C}^4$ で,

$[1], [x], [y]$ および $[xy]$ を基底にとれる. さらに $\cup(F)$

$= \mathbb{C}^2$ で $[x-y]$ と $[xy]$ を基底にとれることは容易に分

る. $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega})$,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} = & (2xy + y^2 - yt - 3s)dx - (x^2 + 2xy + xt - 3s)dy \\ & + 3(xy - s)dt + (x - y + t)ds \end{aligned}$$

とすると これは $F = (\omega)$ の infinitesimally versal を開折であ

る. 従って普遍性定理により F の universal を開折であること

が分かる. $\mathbb{C}^4 = \{(x, y, t, s)\}$ の座標を次のように変換する:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad t' = t + x - y, \quad s' = s - xy.$$

とすると $\tilde{\omega} = t'ds' - 3s'dt'$ となる. これは $\tilde{F}$ の

leaves (積分多様体) は $(x - y + t)^3 = \mathbb{C}(xy - s)$ である

ことが分かる.

例2. $\mathbb{C}^2 = \{(x, y)\}$ 上の1形式

$$\omega = ydx + (x + x^2y)dy$$

を考へ $F = (\omega)$ とする. このとき $\cup(F) = \text{Ext}_\mathbb{C}^1(\Omega_F, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$

で, $[1]$ が基底になるが ω は正則な積分因子をもたない ([8]

p61, 問3) ので $[1]$ に対応する開折は存在しない.

References

- [1] P. Baum and R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Differential Geometry 7 (1972) 279-342.
- [2] D. Cerveau et A.L. Neto, Formes intégrables tangentes à des actions commutatives, Université de Dijon, 1979.
- [3] K. Kodaira and D.C. Spencer, A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces, Acta Math. 100 (1958) 281-294.
- [4] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 1. Codimension un, Publ. Math. I.H.E.S. 46 (1976) 163-173.
- [5] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 2. Le cas général, Invent. Math. 39 (1977) 67-89.
- [6] J. Mather, unpublished notes on right equivalence.
- [7] J.F. Mattei et R. Moussu, Holonomie et intégrales premières, Université de Dijon, 1979.
- [8] 大島利雄, 小松彦三郎, '1 階偏微分方程式', 岩波講座 基礎数学 岩波書店, 1977.
- [9] K. Saito, On a generalization of de Rham lemma, Ann. Inst. Fourier 26 (1976) 165-170.
- [10] T. Suwa, Unfoldings of complex analytic foliations with singularities, preprint.
- [11] T. Suwa, A theorem of versality for unfoldings of complex analytic foliation singularities, Invent. Math. 65 (1981) 29-48.
- [12] T. Suwa, Kupka-Reeb phenomena and universal unfoldings of certain foliation singularities, preprint.

- [13] T. Suwa, Residues of complex analytic foliation singularities and the Riemann-Roch theorem for embeddings, preprint.
- [14] T. Suwa, Singularities of complex analytic foliations, preprint.
- [15] G. Wasserman, Stability of Unfoldings, Lecture Notes in Mathematics 393, Springer-Verlag, Berlin, 1974.