

解説

音・振動の減衰理論と応用例*

宇津野秀夫 (京都大学工学研究科機械理工学専攻)**

43.55.Ev

1. はじめに

音響学における減衰は吸音を意味する。本稿では始めに 1 自由度系の粘性減衰の基本事項を整理し、次にヒステリシス減衰と速度 2 乗形減衰を説明する。続いて連続体の減衰を表現する複素弾性係数と複素密度を定義し、複素波数や複素伝搬速度の概念を説明する。最後に吸音材の吸音機構を減衰の立場から記述する。

2. 1 自由度系の粘性減衰振動の基本事項 [1]

初めて減衰に接すると分野によって使われる指標が異なることに戸惑う。機械分野は減衰比 ζ 、金属材料分野は対数減衰率 Δ や比減衰容量 ϕ 、高分子材料分野は損失係数 η や損失正接 $\tan \delta$ 、電気分野は Q 値がよく用いられる。 $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ と仮定できる場合は $\eta = \tan \delta \approx 2\zeta \approx \Delta/\pi \approx \phi/2\pi = 1/Q$ と換算できる。ここではその根拠を示す。

2.1 自由振動

質量 M [kg] の物体が、ばね定数 K [N/m] のばねと減衰係数 C [Ns/m] の粘性減衰要素を介して壁に連結されている。外力が働かない場合の運動方程式は次式となる。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

初期変位 x_0 を与えた自由振動は次式で表される。

$$x(t) = x_0 e^{-\zeta\omega_n t} \{\cos(\omega_d t) + \zeta \sin(\omega_d t)\} \quad (2)$$

ここで非減衰の固有円振動数は $\omega_n = \sqrt{K/M}$ 、減衰比は $\zeta = C/(2\sqrt{MK})$ 、自由振動の減衰固有円振動数は $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 、減衰固有周期は $T_d = 2\pi/\omega_d$ である。減衰自由振動波形が第 i 番

目の最大値を示す時刻を t_i 、その最大値を $x(t_i)$ 、第 $i+1$ 番目の最大値の時刻を $t_{i+1} = t_i + T_d$ 、その最大値を $x(t_{i+1})$ とする。1 周期離れた隣接する最大値の比の自然対数をとると対数減衰率 Δ が次式で定義される。

$$\Delta = \ln \frac{x(t_i)}{x(t_{i+1})} = \zeta\omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3)$$

2.2 強制振動

加振力 $F_0 \cos \omega t$ が働いた場合の運動方程式は次式となる。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t \quad (4)$$

この運動方程式を解くと変位は次式で表される。

$$x = A_1 \cos(\omega t - \delta_1) \quad (5)$$

$$A_1 = \frac{F_0}{\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + C^2\omega^2}} \quad (6)$$

$$\delta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{C\omega}{K - M\omega^2} \right) \quad (7)$$

式 (6) で $\omega \rightarrow 0$ とした静的な変位を $A_{st} = F_0/K$ とする。振幅 A_1 を加振円振動数 ω で微分すると振幅が最大となる円振動数 $\omega = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$ が求まり、振幅の最大値 A_{max} と A_{st} との比は次式で表される。

$$Q = \frac{A_{max}}{A_{st}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (8)$$

この値は Q 値 (又は Q 係数) と呼ばれ、共振時の変位振幅が同じ大きさの荷重を静的に加えた場合の変位の何倍になるかを表す。1 自由度系ではばね定数 K が明確なため、変位を力で除したコンプライアンスの周波数応答関数を測定できれば、その最大値から式 (8) を用いて減衰比を算出できる。しかし多自由度系の場合、各次数のばね定数を定め難いため、式 (8) ではなく測定した周波数応答関数の最大値の半値 (ハーフパワー) 幅から減衰比を算出する方法が一般的である。式 (6) と

* Damping theory of sound and vibration and its application.

** Hideo Utsuno (Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University, Kyoto, 606-8501)
e-mail: utsuno@me.kyoto-u.ac.jp

$A_{\max}/\sqrt{2}$ を等値すると ω^2 に関する次の方程式が得られる。

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2(1-2\zeta^2)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1 - 8\zeta^2 + 8\zeta^4 = 0 \quad (9)$$

二つの根を $(\omega_H/\omega_n)^2$, $(\omega_L/\omega_n)^2$ とすると根と係数の関係から、根の和 $2(1-2\zeta^2)$ と根の積 $1-8\zeta^2+8\zeta^4$ が得られ、根の差と減衰比の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\omega_H - \omega_L}{\omega_n} &= \sqrt{\frac{\omega_H^2 + \omega_L^2}{\omega_n^2} - 2\frac{\omega_H \omega_L}{\omega_n \omega_n}} \\ &\approx \sqrt{2(1-2\zeta^2) - 2(1-4\zeta^2)} = 2\zeta \end{aligned} \quad (10)$$

2.3 強制振動とエネルギー

運動方程式 (4) に速度 $\dot{x}$ を乗じて時間で積分する。

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} (M\dot{x}^2 + Kx^2) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} C\dot{x}^2 dt \\ = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}F_0 \cos \omega t) dt \end{aligned} \quad (11)$$

積分区間を加振円振動数の 1 周期 $T = 2\pi/\omega$ とすると、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和である定積分項はゼロとなる。減衰容量 W は 1 周期中に消散されるエネルギーで、式 (11) に式 (5) を代入して次式となる。

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T C\dot{x}^2 dt = \int_0^T (\dot{x}F_0 \cos \omega t) dt \\ &= \pi C\omega A_1^2 \end{aligned} \quad (12)$$

減衰容量は次式で表すこともできる。

$$W = \oint F_D dx = \oint C\dot{x} dx \quad (13)$$

すなわち横軸に変位 x , 縦軸に減衰力 F_D をとり面積積分すると減衰容量が求まる。式 (5) を用いて $F_D(t)$ を $x(t)$ で表す。

$$\begin{aligned} F_D(t) &= -C\omega A_1 \sin(\omega t - \delta_1) \\ &= \pm C\omega \sqrt{A_1^2 - x(t)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

式 (14) を変形すると次の楕円の式が導かれる。

$$\left(\frac{F_D(t)}{C\omega A_1}\right)^2 + \left(\frac{x(t)}{A_1}\right)^2 = 1 \quad (15)$$

楕円の面積は $\pi C\omega A_1^2$ で式 (12) と同じ値となる。減衰容量は振幅の 2 乗に比例するため、ポテンシャルエネルギーの最大値で除した比減衰容量 (又は固有減衰容量) ϕ が減衰の指標に用いられる。

$$\phi = \frac{W}{U_{\max}} = \frac{\pi C\omega A_1^2}{KA_1^2/2} = \frac{2\pi C\omega}{K} \quad (16)$$

減衰固有円振動数 ω_d の比減衰容量は次式となる。

$$\phi = \frac{2\pi C\omega_d}{K} = 4\pi\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \quad (17)$$

3. 粘性減衰以外の減衰機構 [1]

一般に振動は粘性減衰を対象に記述される。しかし実際は粘性以外の減衰機構によるものも多い。そこで粘性以外の減衰機構を説明し、等価減衰係数 C_{eq} の求め方を示す。

3.1 ヒステリシス減衰

機械部品などの材料に交差的に変化する力を加え、変位 x と力 F の関係を求める。図-1 に示すように、対象が弾性体の場合は傾き K の直線 $F_S = Kx$ を描くが、ゴムのように減衰がある材料の場合には F は閉曲線を描く。この閉曲線から弾性項を減じると x 軸と y 軸を長軸と短軸とする楕円になる。粘性減衰の場合、楕円の面積は円振動数に比例するが、加振円振動数を変化させても一定の面積の閉曲線を描く場合がある。このような減衰をヒステリシス減衰と呼び、材料の内部減衰を表す。ばねとヒステリシス減衰を併せ持つ 1 自由度系の強制振動の運動方程式は次式で表される。

$$M\ddot{x} + K(1 + j\eta)x = F_0 \cos \omega t \quad (18)$$

式 (18) はバネ定数が複素数となる複素ばねを意味するが、粘性減衰力のように変位に対して 90 度位相が進んだ項を表すために虚数項が導入されている。ここで η は損失係数と呼ばれる。式 (18) を解くと変位は次式で表される。

$$x = A_2 \cos(\omega t - \delta_2) \quad (19)$$

$$A_2 = \frac{F_0}{\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + K^2\eta^2}} \quad (20)$$

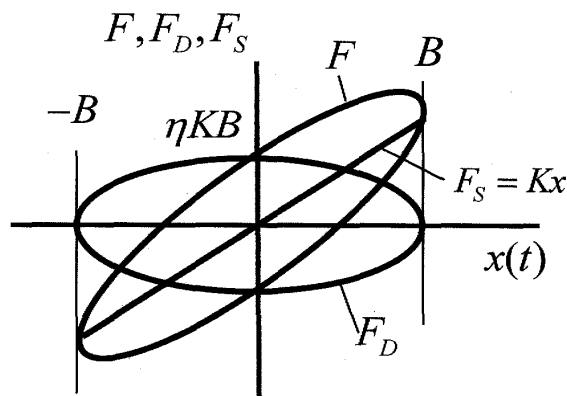


図-1 ヒステリシス減衰

$$\delta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{K\eta}{K - M\omega^2} \right) \quad (21)$$

固有円振動数は η に無関係で常に $\omega_n = \sqrt{K/M}$ となる。 Q 値は式 (20) より $Q = 1/\eta$ となる。

減衰力項は変位より 90 度位相が進んでおり $F_D = K\eta A_2 \cos(\omega t - \delta_2 + \pi/2)$ とすると式 (13) ~ (15) を参考にヒステリシス減衰の減衰容量は $W = \pi K\eta A_2^2$, 比減衰容量は $\phi = 2\pi\eta$ となる。この値を式 (17) と等値すると減衰比 ζ と η の関係が導かれる。復元力項は形式的に $Kx + K\eta\dot{x}/\omega$ と変形できる。等価粘性減衰係数を $C_{eq} = K\eta/\omega$ とおいても、減衰比 ζ と η の関係が導かれる。

$$\zeta = \frac{C_{eq}}{2\sqrt{MK}} = \frac{K\eta}{2\omega_d\sqrt{MK}} = \frac{\eta}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (22)$$

3.2 速度 2 乗形減衰

この減衰は断面積が急縮小したのち急拡大するオリフィス部などを流体が通過する場合の渦によるエネルギー消散を表す。速度 2 乗形の減衰の係数を C_2 とすると運動方程式は次式となる。

$$M\ddot{x} + C_2 |\dot{x}| \dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t \quad (23)$$

変位を $x = A_3 \cos(\omega t - \delta_3)$ とすると減衰力項は $F_D = -C_2(A_3\omega)^2 |\sin(\omega t - \delta_3)| \sin(\omega t - \delta_3)$ となり、減衰容量は次式で表される。

$$\begin{aligned} W &= \oint F_D dx = 4C_2 \int_0^{A_3} \{A_3\omega \sin(\omega t - \delta_3)\}^2 dx \\ &= 4C_2 \int_0^{A_3} \omega^2 (A_3^2 - x^2) dx = \frac{8}{3} C_2 \omega^2 A_3^3 \end{aligned} \quad (24)$$

この減衰容量を式 (12) と等値すると、等価粘性減衰係数が得られる。

$$C_{eq} = \frac{8}{3\pi} C_2 \omega A_3 = \frac{8}{3\pi} C_2 |\dot{x}| \quad (25)$$

3.3 クーロン摩擦減衰

クーロン摩擦を有する 1 自由度系の運動方程式は次式となる。

$$M\ddot{x} + Kx = -\mu_d N \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (26)$$

となる。ここで μ_d は動摩擦係数、 N は垂直抗力である。詳細は文献 [1] に譲るが、自由振動波形の包絡線は直線となり、隣接する極大値の差は $4\mu_d N/K$ となる。減衰力 F_D は変位に関係せず一定値であり、変位を $x = A_4 \cos(\omega t - \delta_4)$ とすると減衰容量は長方形の面積で $W = 4A_4\mu_d N$ となり、等価粘性係数は $C_{eq} = 4\mu_d N/(\pi A_4\omega)$ とな

る。なお弾性材料を溶接やボルトで締結すると、締結部付近の材料は接触した状態になる。交番的なせん断力が締結部に作用すると、接触面にマイクロなすべりが生じクーロン摩擦が発生する。

4. 連続体における減衰指標

前節では減衰を集中定数で表現した。一般に機械振動では低次の共振が問題となり、振動モードから類推される波長に対して、防振ゴムや緩衝装置の寸法は十分小さく集中定数で表現可能であった。しかし音響問題では、高周波数まで対象になり、波長に対して制振材料や吸音材料の寸法を無視できなくなり、分布定数系として表現する必要がある。ここでは複素弾性係数と複素密度の概念を説明し、複素伝搬速度と複素波数に物理的な解釈を加える。最後に制振鋼板梁の解析事例を紹介する。

4.1 複素弾性係数

弾性係数には縦弾性係数（ヤング率）と横弾性係数（せん断弾性係数）があり、どちらも試験片に加えた変位とその時に生じる力を測定して算定される。材料にヒステリシス減衰がある場合、交番的に変化する変位を加え、その時の反力を測定して複素弾性係数を算定する。断面積 A 、長さ L の試験片の一端を固定し他端を力変換器を介して強制変位加振する。加えた変位を $x = X_0 \exp(j\omega t)$ 、測定された圧縮引張りの力を $F = F_0 \exp\{j(\omega t + \delta)\}$ とすると複素縦弾性係数 $\tilde{E}$ に関して次式が成立する。

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \frac{F_0}{X_0} \frac{L}{A} \exp(j\delta) = \frac{F_0}{X_0} \frac{L}{A} (\cos \delta + j \sin \delta) \\ &= E' + jE'' = E'(1 + j\eta) \end{aligned} \quad (27)$$

力と変位の位相差 δ の正接は損失係数に等しい。すなわち $\eta = \tan \delta$ である。変位に対して、力の位相は進んでおり複素弾性係数の損失係数は常に正となる。

4.2 流体の複素密度

流体も内部減衰が大きい場合は複素体積弾性率を用いる。しかし空気の場合は、JIS Z8738（屋外の音の伝搬における空気吸収による減衰）に示されるように内部減衰は極めて小さい。一方空気が固体壁に接している場合、壁面に沿って運動する空気は粘性境界層を生じ、エネルギーを消散する。ここでは細管における Hagen-Poiseuille 流れ

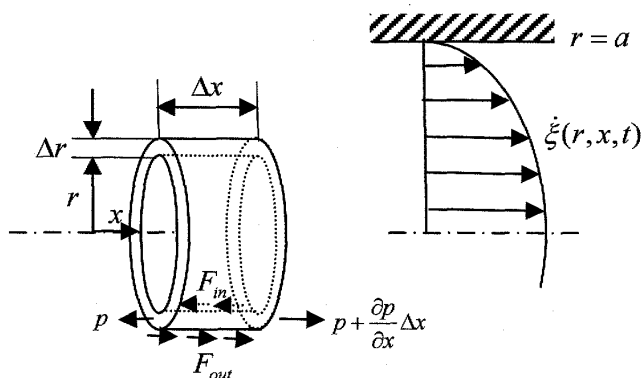


図-2 円管内の Hagen-Poiseuille 流れ

を前提に、粘性力項を空気の密度に含めた形で表現する複素密度の概念 [2] が導かれることを示す。

図-2 に示すように半径 a の細管内において、軸方向の速度変位を $\xi(r, x, t)$ 、空気の粘性係数を μ 、密度を ρ 、圧力勾配を $\phi(r, x, t) = -\partial p / \partial x$ とする。半径 r の微小円筒体積 $2\pi r \Delta r \Delta x$ に働く慣性力は $j\omega \rho \xi 2\pi r \Delta r \Delta x$ 、円筒内面に働く力 F_{in} はせん断力と面積の積で $F_{in} = (\mu \partial \xi / \partial r) 2\pi r \Delta x$ 、円筒外面に働く力は $F_{out} = F_{in} + (\partial F_{in} / \partial r) \Delta r$ 、円筒内外面に働く力の合力は $\partial / \partial r (2\pi r \mu \partial \xi / \partial r) \Delta r \Delta x$ となり、円筒端面に働く圧力増分 $2\pi r \Delta r (\partial p / \partial x) \Delta x$ との和が慣性力に等しくなる。 $k_s^2 = -j\omega \rho / \mu$ とすると、次の運動方程式を得る。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k_s^2 \right) \xi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (28)$$

境界条件 $r = a$ で $\xi = 0$ を満たす一般解 ξ を求め、管断面の平均粒子速度 $\bar{\xi}$ を計算すると次式を得る。ただし $J_0(x)$ 、 $J_1(x)$ はそれぞれ 0 次、1 次のベッセル関数である。

$$\xi = -\frac{1}{\mu k_s^2} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \frac{J_0(k_s r)}{J_0(k_s a)} \right) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi r \xi dr \\ &= \frac{-1}{\mu k_s^2} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \frac{2}{k_s a} \frac{J_1(k_s a)}{J_0(k_s a)} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

圧力勾配と平均粒子速度の比は次式となり、右辺の分数部は後述する式 (50), (51) を用いると複素数の密度 $\tilde{\rho}$ を表すことが分かる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p / \partial x}{\bar{\xi}} &= j\omega \frac{\rho}{1 - \frac{2}{k_s a} \frac{J_1(k_s a)}{J_0(k_s a)}} \\ &= j\omega (\rho' - j\rho'') = j\omega \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (31)$$

波長に比べて半径が小さい場合、 $k_s a \ll 1$ と仮定してベッセル関数を展開すると複素密度は次式で近似される。

$$\tilde{\rho} = \frac{4\rho}{3} - j \frac{8\mu}{\omega a^2} \quad (32)$$

虚数部は Hagen-Poiseuille 流れの粘性力項 $(8\mu/a^2)\xi$ を加速度で表記するために $j\omega$ で除したものである。粘性力項を密度に含めると複素密度の虚数部は常に負になることが分かる。

4.3 複素伝搬速度と複素波数

一様な媒質を対象とする波動方程式において弾性係数や密度が複素数になると、伝搬速度も複素数となる。最初に細管内を伝わる音波の場合を示す。空気の体積弾性率を K 、複素密度を $\rho' - j\rho''$ とすると、複素伝搬速度 $\tilde{c} = c' + jc''$ は次式で表され、虚数部は常に正となる。

$$\tilde{c} = c' + jc'' = \sqrt{\frac{K}{\rho' - j\rho''}} = \sqrt{\frac{K(\rho' + j\rho'')}{\rho'^2 + \rho''^2}} \quad (33)$$

複素波数 $\tilde{k} = k' - jk''$ と複素伝搬速度 $\tilde{c} = c' + jc''$ 、複素波長 $\tilde{\lambda} = \lambda' + j\lambda''$ には次の関係がある。

$$\begin{aligned} k' - jk'' &= \frac{\omega}{c' + jc''} = \frac{(c' - jc'')\omega}{c'^2 + c''^2} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda' + j\lambda''} = \frac{2\pi(\lambda' - j\lambda'')}{\lambda'^2 + \lambda''^2} \end{aligned} \quad (34)$$

ここで ω は円振動数で、強制振動の場合は実数、自由振動の場合は後述するが複素数となる。

制振はりの複素縦弾性係数を $E' + jE''$ 、密度を ρ 、断面 2 次モーメントを I 、断面積を A とすると、曲げ波の複素伝搬速度 $\tilde{c}$ は次式で表される。

$$\tilde{c} = c' + jc'' = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 (E' + jE'') I}{\rho A}} \quad (35)$$

ただし式 (35) の ω は式 (34) と同じ定義である。

4.4 自由振動

ここで仮に両端閉で長さ L の細管内の空気の粒子速度、もしくは両端単純支持の長さ L の制振はりの曲げ波の自由振動を考える。どちらの場合も n 次の複素固有関数 $\tilde{X}_n(x)$ は正弦関数で表される。

$$\tilde{X}_n(x) = A_n \sin \{ (k' - jk'')x \} \quad (36)$$

境界条件を満たす振動数方程式は次式となるが、右辺が実数であるため減衰固有円振動数は複素数となるが、次の関係を満たす必要がある。

$$(k' - jk'')L = \frac{\omega'_n + j\omega''_n}{c' + jc''}L = n\pi \quad (37)$$

$$\eta_0 = \frac{c''}{c'} = \frac{\omega''_n}{\omega'_n} \quad (38)$$

$$k'_n L = \frac{\omega'_n}{c'}L = \frac{2\pi}{\lambda'_n} = n\pi \quad (39)$$

波数 k'_n と波長 λ'_n , 固有関数は実数となり, 音速も見掛け上は実数で $c = c'$ なる。

減衰自由振動を考える。固有円振動数 ω'_n で, 実数となる固有関数 $\tilde{X}_n(x)$ の振動モードに一致する振幅と位相差の分布加振力で対象連続体を加振する。時刻 $t = 0$ でちょうど変位が最大になった状態で全点の加振を停止すると, 振動モードは実数である $\tilde{X}_n(x)$ を保ったまま次式で自由振動する。

$$\begin{aligned} & \exp\{j(\omega'_n + j\omega''_n)t\} \tilde{X}_n(x) \\ &= \exp\{j\omega'_n t\} \exp\{-\omega''_n t\} \tilde{X}_n(x) \end{aligned} \quad (40)$$

周期は $T_n = 2\pi/\omega'_n$, 減衰自由振動における 1 周期の対数減衰率は次式となる。

$$\begin{aligned} \ln \frac{\exp(-\omega''_n t)}{\exp\{-\omega''_n(t + T_n)\}} &= \omega''_n T_n = \eta_0 \omega'_n T_n \\ &= 2\pi\eta_0 \end{aligned} \quad (41)$$

細管内の空気の複素密度を $\tilde{\rho} = \rho'(1 - j\eta_\rho)$ とすると, 式 (38) の損失係数との関係は $2\eta_0 = \eta_\rho$ となり, 制振はりの複素縦弾性係数を $E'(1 + j\eta_E)$ とすると式 (35) より極座標表示の偏角の定義から $\eta_0 = 2\eta_0/4 + \eta_E/4$ の関係が導かれ, $2\eta_0 = \eta_E$ となる。

4.5 強制振動

同じ設定で強制振動を考える。この場合, 加振円振動数 ω は必ず実数で, 式 (34) より波数, 伝搬速度, 波長は常に複素数となり, 複素波数, 複素伝搬速度, 複素波長のそれぞれの損失係数は等しくなる。

$$\eta_0 = \frac{k''}{k'} = \frac{c''}{c'} = \frac{\lambda''_n}{\lambda'_n} \quad (42)$$

一般に円振動数 ω で加振された進行波は $\exp\{j(\omega t - kx)\}$ で表される。減衰のある連続体を円振動数 ω で 1 点で加振した場合の進行波は次式で表される。

$$\begin{aligned} & \exp\{j\omega t - j(k' - jk'')x\} \\ &= \exp\{j(\omega t - k'x)\} \exp(-k''x) \end{aligned} \quad (43)$$

式 (43) の右辺前半部の $\exp(-jk'x)$ は波数 k' の波の伝搬を表し, 後半部の $\exp(-k''x)$ は距離によ

る振幅の減衰 (距離減衰) を表している。進行波では, 波の伝搬に伴い振幅は次第に減少するため, 複素波数の虚数部は必ず負の値となる。また, 式 (34), (43) より, 1 次元空間で進行波だけが観測される場合, 見掛け上の音速は $c = (c'^2 + c''^2)/c'$, 波長は $\lambda = (\lambda'^2 + \lambda''^2)/\lambda'$ となる。1 波長伝搬時の振幅の対数減衰率 Δ は次式となる。

$$\begin{aligned} \Delta &= \ln \frac{\exp(-k''x)}{\exp\{-k''(x + \lambda)\}} = \eta_0 k' \lambda \\ &= 2\pi\eta_0 \end{aligned} \quad (44)$$

進行波の 1 波長当たりの対数減衰率と自由振動の 1 周期当たりの対数減衰率はともに $2\pi\eta_0$ となる。

複素密度や複素弾性率の損失係数を用いると, 対数減衰率は $\pi\eta_\rho$, $\pi\eta_E$ となる。1 自由度系の粘性減衰の対数減衰率の式 (3) は $\zeta \ll 1$ で $\Delta \approx 2\pi\zeta$, ヒステリシス減衰の損失係数の式 (22) は $\eta \approx 2\zeta$ で, 最終的に $\Delta \approx \pi\eta$ となる。これより複素密度や複素弾性率の損失係数が複素ばねの損失係数に対応する。

4.6 複素固有モードとモード解析

有限要素解析の分野では, 減衰行列を質量行列と剛性行列の線形和 $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ と仮定する Rayleigh 減衰が用いられる。この形の減衰は固有関数の直交性が保証され, モード解析理論が適用できることが知られている。一様な減衰材料だけで構成されている場合, 複素密度と複素弾性率は Rayleigh 減衰の形式を満たしている。逆に Rayleigh 減衰は, 速度に比例する粘性力項を質量行列で, ヒステリシス減衰を剛性行列で表現していると言える。Rayleigh 減衰の適用根拠を示唆しているとも考えられる。

前節では両端閉止音響管と両端単純支持はりを対象に議論したが, Rayleigh 減衰の仮定を満たせば任意境界条件の波動現象に対して成立する。一般に任意の粒子速度 $u(x, t)$ は境界条件を満たす複素固有関数 $\tilde{X}_n(x)$ と時間の関数 $T_n(t)$ を用いて次式で表される。

$$u = \sum \tilde{X}_n(x) T_n(t) \quad (45)$$

細管内の音波の粒子速度に関する波動方程式に式 (45) を代入して変形すると次式を得る。

$$(\rho' - j\rho'') \sum \{\ddot{T}_n + \tilde{\omega}_n^2 T_n\} \tilde{X}_n = 0 \quad (46)$$

$\tilde{X}_m(x)$ を乗じ, 固有関数の直交性を利用して次式を得る。

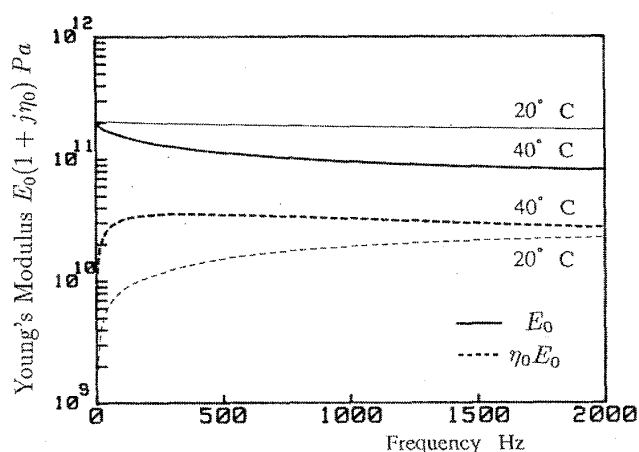


図-3 制振鋼板はりの複素弾性係数 [4]

$$\ddot{T}_m + (\omega'_m + j\omega''_m)^2 T_m = 0 \quad (47)$$

この式はモード質量が1で、モード剛性の損失係数が $2\eta_0 (= 2\omega''_m/\omega'_m)$ となる複素ばねの1自由度の振動系に帰着される。制振はりの曲げ振動も同様に式 (47) が導かれる。波動方程式の係数である複素密度や複素弾性率の損失係数が複素ばねの損失係数に等しくなる根拠と言える。

非減衰の場合、固有モードは進行波と境界部での反射波が重なって形成され、固有値も固有関数も当然実数で表される。一様な減衰媒質では固有値が複素数、固有関数は実数となることを示した。ただし注意が必要で、減衰媒質を1点で加振すると距離減衰のため固有モードが励起されない。高次モードほど距離減衰により反射波が小さくなり、固有関数から外れた振動形態となる。加振が停止すると自由振動を生じるが、初期変位が固有関数と異なるため、厳密な意味での対数減衰率は得られない。このため高減衰材料に対して実験モード解析を行う場合は加振方法に注意を要する。

4.7 制振鋼板はりの解析例

2枚の鋼板の間に高分子材料を挟んだ構造の制振鋼板は、高分子材料のせん断変形を利用して曲げ振動を効果的に減衰する材料である。Ross-Kerwin-Ungar [3] は両端単純支持の制振鋼板はりを前提に、等価な複素曲げ剛性 $(E' + jE'')I$ を導出している。上下の鋼板厚を $t = 1.2 \text{ mm}$ 、高分子材料の厚さ $50 \mu\text{m}$ とし、複素横弾性係数を代入して算出した複素弾性係数を図-3に示す。両端自由の制振鋼板はりの中央を $F_0 \exp(j\omega t)$ で加振し、駆動点の速度変位 $|\dot{w}(0)|$ を求め、駆動点モビリティ $|\dot{w}(0)/F_0|$ の形式で計算値と実験値を図-4に

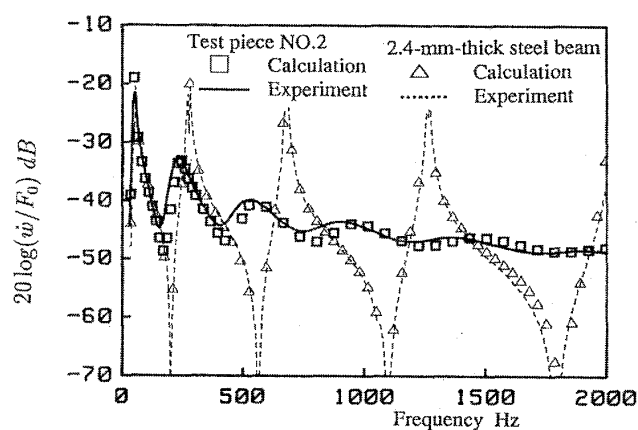


図-4 両端自由中央加振支持はりの駆動点モビリティ [4]

比較 [4] した。同図には同じ板厚の鋼板はりのデータも示してある。同図より複素曲げ剛性を用いて制振鋼板はりの減衰特性が極めてよく予測できていることが分かる。また、同図は制振材料に関して以下の重要な示唆を与えている。駆動点においては、共振時の振幅は減衰の付与で大幅に低減されるが、加振位置が振動の節位置に相当する反共振周波数では、減衰により逆に振幅が増大する。また、高周波数域では応答が一定値に近づいている。これは曲げ波が式 (44) により伝搬距離に応じて振幅が減少し、自由端から反射して戻ってくる反射波の振幅が小さくなり、駆動点では進行波だけが存在する状況に近づいていることを意味している。

5. 減衰の立場から見た吸音

吸音率は減衰を表す指標の一つである。ここでは音響管内の平面波を前提に吸音率に関連する項目を整理し、多孔板の解析事例を示す。次に吸音材の吸音特性測定原理を示し、その結果を用いた3次元吸音音場の解析事例を紹介する。

5.1 吸音率と音響インピーダンス

空気中を伝わる音波の1次元波動方程式とその解は次式で表される。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (48)$$

$$\Phi = \{B_1 \exp(-jkx) + B_2 \exp(jkx)\} \exp(j\omega t) \quad (49)$$

ここで Φ は速度ポテンシャル関数、 B_1 は進行波の振幅、 B_2 は後退波の振幅、 c は音速、 k は波数、 ω は円振動数である。音圧と粒子速度はポテンシャル関数を用いて次式で求められる。

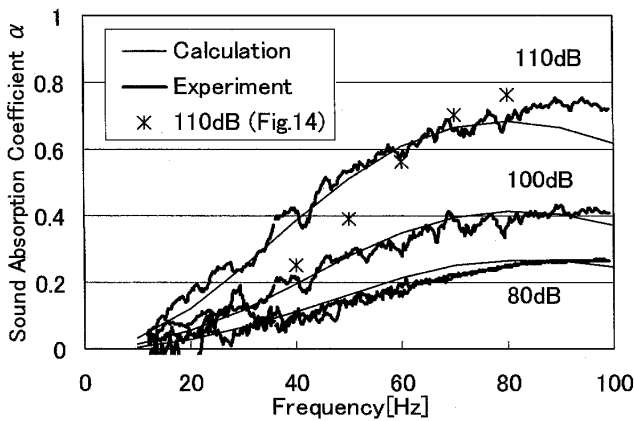


図-5 多孔板の吸音率 [6]

$$p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (50)$$

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (51)$$

音響管内の音圧を表す式 (50) は未知係数 B_1 と B_2 を含んでいる。このため 2 点マイクロホン法 [5] で 2 点の音圧を測定すると未知係数を決定でき、任意点の音圧 $p(x, t)$ と粒子速度 $u(x, t)$ を算出可能となる。垂直入射比音響インピーダンス z は音圧と粒子速度の比として次式で定義される。

$$\frac{p}{u} = z = X + jY \quad (52)$$

垂直入射吸音率は垂直入射比音響インピーダンスから次式を用いて計算できる。

$$\alpha = 1 - \left| \frac{z - \rho c}{z + \rho c} \right|^2 = \frac{4\rho c X}{(X + \rho c)^2 + Y^2} \quad (53)$$

5.2 多孔板の吸音率

孔径 2 mm で開口率 2%, 板厚 0.87 mm, 背後空気層 950 mm の多孔板の吸音率 [6] を 2 点マイクロホン法で測定し図-5 に示す。吸音材側のマイクロホン音圧が 70, 80 dB の場合はほぼ同じ吸音率を示すが、音圧レベルが 100, 110 dB に増大すると吸音率が周波数領域全域で増大する。ちなみに多孔板を取り外した場合の吸音率は 0.03 程度であった。

長さ l の音響管の伝達行列は、波長に比べてが十分短い場合、次式のように変形できる。

$$\begin{bmatrix} \cos kt & j\rho c \sin kt \\ \frac{j}{\rho c} \sin kt & \cos kt \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & j\rho \omega t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Ingard [2] らは、上式の密度を式 (31) の細管の複素密度とし、式 (32) を参考に音響リアクタンスに関する開口端補正を $8d/3\pi$ 、音響抵抗に関する補正を d とし、更に式 (25) を参照して速度 2 乗形の減衰項を付加して、次式で表現した。

$$a_{12} = \left\{ \frac{j\omega \rho t}{1 - \frac{2}{k_s a} \frac{J_1(k_s a)}{J_0(k_s a)}} + j\rho \omega \frac{8d}{3\pi} + d \frac{8\mu}{a^2} \right\} \left(\frac{D}{d} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{8}{3\pi} \xi \rho |u_{rms}| \left(\frac{D}{d} \right)^4 \quad (55)$$

ここで d は細孔の直径、 D は等価直径で開口率を ε とすると $\varepsilon = d^2/D^2$ の関係にある。式 (55) を用いて計算した吸音率は図-5 に示すように吸音率の傾向をよく予測できており、多孔板の吸音率の発生機構が細管内の Hagen-Poiseuille 流れによる粘性とオリフィス部の速度 2 乗形減衰であることが分かる。ちなみに図中の * は帯域雑音に対して式 (55) 中の粒子速度を実効値としなかった場合である。

5.3 吸音材の流れ抵抗

グラスウールなどの一般的な吸音材では形状が不規則なため、実験で流れ抵抗を測定して吸音率との関係を整理している。管路内に設置した厚さ d の多孔質体試験片に微風速 v の空気を流し、試験片前後の圧力差 Δp を測定すると、単位厚さ当たりの流れ抵抗 R_f [$\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^4$] は次式で算出できる。

$$R_f = \Delta p / (dv) \quad (56)$$

複素密度の式 (32) を参考にすると、流れ抵抗を用いて複素密度は次式で表される。

$$\tilde{\rho} = \rho - j \frac{R_f}{\omega} = \rho \left(1 - j \frac{R_f}{\omega \rho} \right) \quad (57)$$

5.4 吸音材料中の波動方程式

吸音材の複素密度を流れ抵抗を用いて表したが、定常流を用いているため吸音材の内部減衰を評価できていない。音圧が交番的に変化すると、粘性力の反作用が働くため吸音材の骨格も微小ではあるが交番的に変位する。骨格同士のクーロン摩擦や骨格材料のヒステリシス減衰によってエネルギーを消散する。この減衰は空気の体積弾性率をヒステリシス減衰 $\tilde{K} = K' + jK''$ と仮定して表現される。波動方程式は、音速と密度の二つの定数を用いて表現するため、複素密度 $\tilde{\rho} = \rho' - j\rho''$ と複

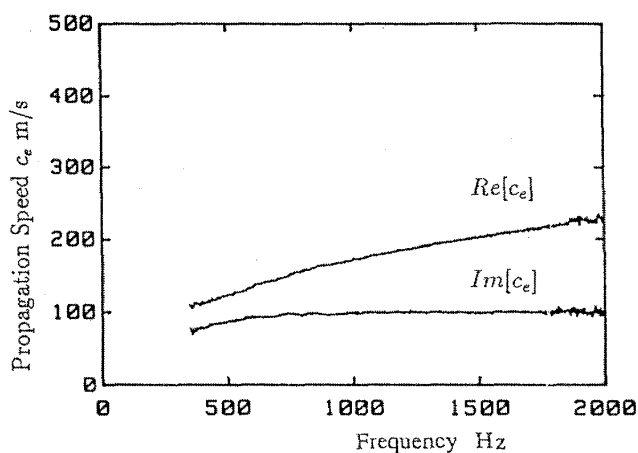


図-6 グラスウール吸音材の複素伝搬速度 [7]

素伝搬速度 $\tilde{c} = \sqrt{\tilde{K}/\tilde{\rho}}$ で一様な吸音材内の波動方程式を表すことができる。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \tilde{c}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (58)$$

厚さ d の吸音材の伝達行列は次式となる。

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega}{\tilde{c}} d & j\tilde{\rho}\tilde{c} \sin \frac{\omega}{\tilde{c}} d \\ \frac{j}{\tilde{\rho}\tilde{c}} \sin \frac{\omega}{\tilde{c}} d & \cos \frac{\omega}{\tilde{c}} d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (59)$$

吸音材前後の音圧と粒子速度 p_1, u_1, p_2, u_2 が求まれば、伝達行列から二つの式が導かれ、二つの未知変数 $\tilde{\rho}, \tilde{c}$ を解くことができる。2点マイクロホン法を吸音材前後で同時に適用してを求める方法や、吸音材後側を深さ L の閉管として前側2点と後側1点の音圧と剛壁の粒子速度条件からを求める方法が提案されている。ここでは、閉管深さを L と L' に変化させて測定した前面のインピーダンス z_1, z_1' から $\tilde{\rho}, \tilde{c}$ を求める [7]。

グラスウール吸音材の複素伝搬速度 $\tilde{c}$ の測定結果を図-6に示す。複素伝搬速度は空気中の音速より低い値を示すが、これは粘性により媒質の密度が増したためと解釈できる。測定した $\tilde{\rho}, \tilde{c}$ を利用して、3次元吸音音場を解析する。剛壁で囲まれた直方体状の閉空間に、直方体状の吸音材を宙に浮かせて保持した音場を、境界要素法で解析した [8]。図-7に加振端の粒子速度と観測点の音圧の比を示す。吸音材を波動が伝搬する一つの領域と考えて、空気と吸音材が混在する吸音音場を多媒質の音場と捉え、剛壁で裏打ちされていない吸音材の解析も可能となる。

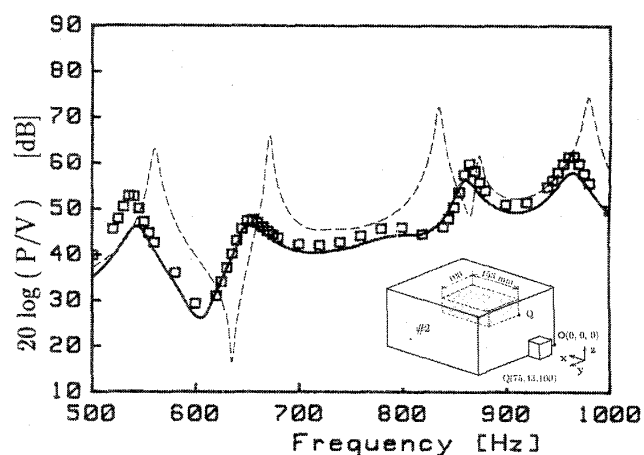


図-7 3次元吸音音場の解析例 [8]

6. ま と め

本稿では始めに1自由度振動系の基本事項を整理し、連続体の減衰を記述する複素弾性係数と複素密度を説明し、複素波数や複素伝搬速度の概念を説明した。減衰の解析事例として、制振鋼板梁と多孔板の吸音率、3次元吸音音場解析を示し、減衰を含む系の解析が実験とよく一致することを紹介した。

文 献

- [1] 日本機械学会編, 振動のダンピング技術 (養賢堂, 東京, 1998).
- [2] K. Ingard, "On the theory and design of acoustic resonators," *J. Acoust. Soc. Am.*, 25, 1037-1061 (1953).
- [3] D. Ross, E.E. Ungar and E.M. Kerwin, Jr., "Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae," in *Structural Damping*, J.E. Ruzicka, Ed. (ASME, New York, 1959), Sect. 3, pp. 49-97.
- [4] 宇津野秀夫, 杉本明男, 木村康正, 田中俊光, "粘弾性三層形制振材料の動特性予測に関する研究 (第1報, RKUモデルを用いた三層ばり振動周波数応答関数の予測)," 機論 (C), 57(540), 2548-2553 (1991).
- [5] A.F. Seybert and D.F. Ross, "Experimental determination of acoustic properties using a two-microphone random-excitation technique," *J. Acoust. Soc. Am.*, 61, 1362-1370 (1977).
- [6] 宇津野秀夫, 坂谷 亨, 山口善三, "伝達行列法による多孔板吸音特性の実験的研究," 音響学会誌, 59, 301-308 (2003).
- [7] H. Utsuno, T. Tanaka, T. Fujikawa and A.F. Seybert, "Transfer function method for measuring characteristic impedance and propagation constant of porous materials," *J. Acoust. Soc. Am.*, 86, 637-643 (1989).
- [8] H. Utsuno, T.W. Wu, A.F. Seybert and T. Tanaka, "Predictions of sound fields in cavities with sound absorbing materials," *AIAA Journal*, 28, 1870-1876 (1990).