

# P-分体の Euler Systems について

横浜市大 市村 文男

この小文では、P-分体の二つの Euler systems, 円単数と Gauss の和, の内、前者に力点を置いて解説します。なお、講演の題目は、Euler system について、岩澤 main conj. の別証明の紹介、でしたが、原稿の題名は内容によりふさわしい上記のものに変えました。

## §1. P-分体の Euler systems の応用対象

以下、 $p$  : 奇素数,  $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$ ,  $F = K^+ = \mathbb{Q}(\cos 2\pi/p)$ ,

$\Delta = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ,  $\Delta$  は自然に  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  と同一視する;

$\Delta = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times : \tau_a \mapsto a$ .  $h_K, h_F$  を  $K, F$  の類数とする。

次の類数公式 (Kummer, Iwasawa) は良く知られている;

$$h_F = [E : C],$$

$$h_K^- = h_K / h_F = p \prod_{\substack{x \in \Delta \\ \text{odd}}} (-\frac{1}{2} B_1(x^{-1})) = [\mathbb{Z}[\Delta]^- : \mathcal{G}^-],$$

但し、 $E, C$  は  $F$  の単数群, 円単数群,

$$B_1(x^{-1}) = \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{p-1} a x^{-1}(a) \quad (\text{Bernoulli 数}),$$

$$\mathbb{Z}[\Delta]^- = (1 - \tau_{-1}) \mathbb{Z}[\Delta],$$

$$\mathbb{S}^- = \mathbb{Z}[\Delta]^- \cap \mathbb{Z}[\Delta] \theta(p), \quad \theta(p) = \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{p-1} a \tau_a^{-1} \text{ (Stickelberger } \bar{\tau}).$$

$$\chi \in \hat{\Delta} \text{ が odd (even) } \Leftrightarrow \chi(\tau_{-1}) = -1 \text{ (+1)}.$$

以下、 $A$  を  $K$  の類群の  $p$ -part とする。一般に  $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ -加群  $M$  に対して、 $M^+ = (1 + \tau_{-1})M$ ,  $M^- = (1 - \tau_{-1})M$ , 又、

$$\chi \in \hat{\Delta} \text{ の時、 } M(\chi) = e_\chi M, \quad e_\chi = \frac{1}{p-1} \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) \tau_a^{-1} \text{ とおく。}$$

類数公式により、次の事が期待される；

$$A^+ \cong_{\hat{\Delta}} (\mathbb{E}/\mathbb{C})(p), \quad A^- \cong_{\hat{\Delta}} (\mathbb{Z}[\Delta]^-/\mathbb{S}^-)(p).$$

この期待について一般的に何もわかっていないが、これよりはるかに弱く次の事は、Mazur-Wiles により一般数体形式の深い理論を用いて証明された；

定理 (Mazur-Wiles, Kolyvagin)  $\chi \in \hat{\Delta}$

$$(1) \quad \chi: \text{even} \Rightarrow \# A(\chi) = \# (\mathbb{E}/\mathbb{C})(p)(\chi),$$

$$(2) \quad \chi: \text{odd} \Rightarrow \# A(\chi) = p^{\text{ord}_p B_{1,\chi^{-1}}}$$

Kolyvagin [1] は、(1), (2) を、円単数、Gauß の和の系を用いて極めて初等的な別証明を与えた。彼は、 $p$  分体の “canonical element” をたくさん作りその素ideal分解を決める事によって類群を理解する仕方を与えたのである。

§ 2 古典的な canonical elements

§ 2-1 円単数  $\zeta_p - 1$

§ 2-2 Gauß 和

$\ell$  を  $\ell \equiv 1 \pmod{p}$  なる素数,  $\tilde{\lambda}$  を  $\ell$  上の  $\mathbb{Q}(\mu_{\ell-1})$  の素 ideal,  
 $\lambda = \tilde{\lambda} \cap \mathbb{Q}(\mu_p)$ ,  $\zeta_\ell$  を固定された 1 の原始  $\ell$  乗根とする。

$w = w_{\tilde{\lambda}} \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$  の Teichmüller character とする;

$$w: (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mu_{\ell-1}, \quad w(a) \equiv a \pmod{\tilde{\lambda}}.$$

Gauß 和  $S(w^{-\frac{\ell-1}{p}}) = \sum_{a=1}^{\ell-1} w^{-\frac{\ell-1}{p}}(a) \zeta_\ell^a$  は,

$\mathbb{Q}(\mu_p, \mu_\ell)$  の元で,  $\Delta$  を  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p, \mu_\ell)/\mathbb{Q}(\mu_\ell))$  と同一視すると,  $\tau_b \in \Delta$  に対して,

$$\begin{aligned} S(w^{-\frac{\ell-1}{p}})^{\tau_b} &\in \mathbb{Q}(\mu_p)^\times \\ (S(w^{-\frac{\ell-1}{p}})^{\tau_b}) &= \lambda^{(\tau_b - b)\theta(p)} \end{aligned}$$

となる。この事から,  $B_{1, \chi^{-1}}$  が  $A(\chi)$  を消す事がわかる。しかし,  $\chi = \text{even}$  の場合は,  $B_{1, \chi^{-1}} = 0$  故何も言っていない。

§ 2-3 Kummer-Thaine の仕事 ([2], [6])

$\chi = \text{even}$  の場合に,  $A(\chi)$  を理解するため, Gauß 和に相当するものを導入する。

$\ell$  は上と同じく  $\ell \equiv 1 \pmod{p}$  なる素数,  $G_\ell = \text{Gal}(F(\mu_\ell)/F)$ ,  
 $\sigma_\ell$  をその固定された生成元,  $N_\ell \in \mathbb{Z}[G_\ell]$  を  $1/\ell$  とする。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_\ell &= (1 - \zeta_p \zeta_\ell) (1 - \zeta_p^{-1} \zeta_\ell) \in F(\mu_\ell)^\times \\ \zeta_1 &= (1 - \zeta_p) (1 - \zeta_p^{-1}) \in F^\times \end{aligned} \right\} \text{ とおく。}$$

最初のポイントは、(円単数の distributive relation より.)

$$N_\ell \xi_\ell = (1 - \xi_p^\ell) / (1 - \xi_p) \times (1 - \xi_p^{-\ell}) / (1 - \xi_p^{-1})$$

となる事です。従って、 $\ell \equiv 1 \pmod{p}$  故、 $N_\ell \xi_\ell = 1$ 。

∴ Satz 90 より、 $\exists a_\ell \in \mathbb{F}(\mu_\ell)^\times$  s.t.  $\xi_\ell = a_\ell^{\sigma_\ell - 1}$ 。そこで

$\kappa_\ell = N_\ell a_\ell \in \mathbb{F}^\times / \mathbb{F}^{\times \ell-1}$  とおきます。

Gauß 和の素 ideal 分解に対応する  $(\kappa_\ell)$  の素 ideal 分解を記述するため、 $\ell$  上の  $\mathbb{F}$  の素 ideal  $\lambda$  を固定し次の様に、 $\Delta^+$ -加群としての同型

$$\varphi_\lambda : (\mathcal{O}_F / \ell \mathcal{O}_F)^\times \longrightarrow \mathbb{Z} / (\ell-1)\mathbb{Z} [\Delta^+], \quad (\Delta^+ = \text{Gal}(\mathbb{F} / \mathbb{Q}))$$

を定義します。

$\sigma \in \Delta^+$  に対して、 $\tilde{\lambda}^\sigma$  を  $\lambda^\sigma$  上の  $\mathbb{F}(\mu_\ell)$  の唯一の素 ideal とする。 $\pi$  を、 $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}'$  で local par.,  $\tilde{\lambda}^\sigma$  ( $\sigma \in \Delta^+, \sigma \neq 1$ ) で単数となる  $\mathbb{F}(\mu_\ell)$  の元とする。この時、 $\mathbb{F}(\mu_\ell) / \mathbb{F}$  で  $\lambda^\sigma$  達は、

totally tamely に分岐する事から

$$u = \pi^{\sigma_\ell - 1} \in \bigoplus_{\sigma} (\mathcal{O}_{\mathbb{F}(\mu_\ell)} / \tilde{\lambda}^\sigma)^\times = (\mathcal{O}_F / \ell \mathcal{O}_F)^\times$$

は、 $(\mathcal{O}_F / \ell \mathcal{O}_F)^\times$  の  $\mathbb{Z} / (\ell-1)\mathbb{Z} [\Delta^+]$  上の生成元となります。

そこで、 $\varphi_\lambda$  を  $u \mapsto 1$  によって定義します。

以上の準備の下で、

$$(\kappa_\ell) \equiv \varphi_\lambda(\xi_\ell) \cdot \lambda \pmod{(\ell-1)\mathbb{I}}, \quad \mathbb{I} = \{\mathbb{F} \text{ の全 ideals } \}$$

が成り立ちます。但し、 $\varphi_\lambda(\xi_\ell)$  は  $\lambda$  に乗法的に作用させる。

証明のポイントは、

$\xi_\ell \equiv 1 \pmod{\ell}$  上の素 ideal, 従って,  $\xi_\ell \equiv \xi_1 \pmod{\ell}$  上の素 ideal

となる事です。実際の事から,

$$\varphi_\lambda(\xi_1) = \varphi_\lambda(\xi_\ell) = \varphi_\lambda(q_\ell^{\sigma_\ell-1})$$

となるが、 $\varphi_\lambda$  の定義から  $\varphi_\lambda(q_\ell^{\sigma_\ell-1})$  の係数は、 $K_\ell$  の  $\lambda^\sigma$  の付値を与える事がわかります。

さて、上の素 ideal 分解で、特に  $\ell \equiv 1 \pmod{h_F}$  の時、 $\varphi_\lambda(\xi_1)$  は  $\lambda$  の類  $\{\lambda\}$  を消す事がわかります。Thaine はこの事と次の  $\sigma$  で述べるキレンマZを用いて、

$X = \text{even}$  の時、 $\#(E/C)(p)(X)$  は  $A(X)$  を消す事を示した。(§3-2, Step I' を参照。)

Gauß 和の素 ideal 分解,  $(K_\ell)$  の素 ideal 分解は、ひとつひとつの ideal 類の annihilator を与えていますが、また類群全体を把握するには不十分です。そこで登場するのが Euler system です。

### §3. $p$ 分体の Euler systems

#### §3-1 円単数の system

$M$ : 任意の  $p$  巾 ( §2-3 の最後の様に  $h_F$  の  $p$ -部分も念頭において下す ),

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_M = \{ \text{square free な自然数 } \prod l_j \mid l_j \equiv 1(p), l_j \equiv 1(M) \}.$$

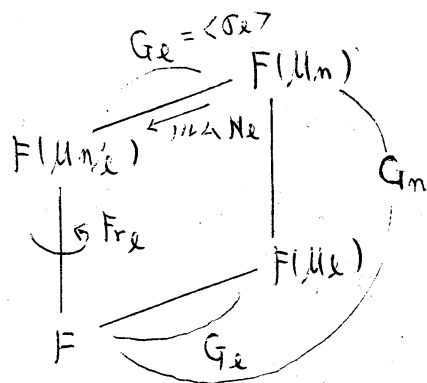
各  $m \in \mathcal{S}$  に対して.

$$\xi_m = (1 - \xi_p \prod_{\ell|m} \xi_\ell) (1 - \xi_p^{-1} \prod_{\ell|m} \xi_\ell) \in F(\mu_m)^\times$$

と置く.

$\{\xi_m; m \in \mathcal{S}\}$  が  $F = \mathbb{Q}(\cos 2\pi/p)$  の "Euler system" です.

この性質を述べる前にいくつか記号を導入する.



$$G_m = \text{Gal}(F(\mu_m)/F),$$

$$G_\ell = \text{Gal}(F(\mu_\ell)/F) \hookrightarrow G_m$$

$$N_\ell = \sum \sigma \in \mathbb{Z}[G_\ell] \ (\subset \mathbb{Z}[G_m])$$

$$\text{Fr}_\ell \in \text{Gal}(F(\mu_{m/\ell})/F):$$

$\ell$  乗 Frobenius

次の基本的な性質を持っています;

$$\text{ES 1. } m \neq 1 \Rightarrow \xi_m: \text{global unit}$$

$$\text{ES 2. } \ell | n \Rightarrow N_\ell \xi_m = \xi_{m/\ell}^{\text{Fr}_\ell - 1}$$

$$\text{ES 3. } \ell | n \Rightarrow \xi_m \equiv \xi_{m/\ell} \pmod{\ell \text{ の } \ell \text{ 素 ideal}}.$$

最後の二つの性質は、§2-3 で強調したものです.

$\xi_m$  から  $F$  の元を作るために次の作用素を導入します;

$$D_\ell = \sum_{j=1}^{\ell-2} j \cdot \sigma_\ell^j \in \mathbb{Z}[G_\ell] \subset \mathbb{Z}[G_m]$$

$$D_m = \prod_{\ell|m} D_\ell \in \mathbb{Z}[G_m], \quad (\sigma_\ell \text{ は } G_\ell \text{ の固定した生成元}).$$

作用素  $D_\ell$  は、次の式をみます.

$$(*) \quad (\sigma_\ell - 1) D_\ell = (\ell - 1) - N_\ell$$

この事から、 $K_\ell \equiv D_\ell \xi_\ell \pmod{F(\mu_\ell)^{\times \ell-1}}$  がわかります。

つまり、 $D_\ell$  は、§2-3 で述べた、 $\xi_\ell$  から  $K_\ell$  を作るためのやや煩わしい操作を一挙にやってしまう役割を持っています。

(\*) と、性質 ES2 を用いて、

$$\text{補題} \quad D_m \xi_m \in (F(\mu_m)^{\times} / F(\mu_m)^{\times M})^{G_m}$$

が容易に示されます。ところが、 $F(\mu_m)$  が 1 の  $p$  乗根を含まない事から、自然な写像  $F^{\times} / F^{\times M} \rightarrow (F(\mu_m)^{\times} / F(\mu_m)^{\times M})^{G_m}$  が同型になります。従って、各  $m \in \mathcal{S}$  に対して、

$$K_m \equiv D_m \xi_m \pmod{F(\mu_m)^{\times M}}$$

となる  $K_m \in F^{\times} / F^{\times M}$  が一意的に定まります。

§2-3 で述べた Kummer-Thaine の仕事の一般化として、

Kolyvagin は次を示しました：

$$\text{キーレニマ 1 (Kolyvagin)} \quad m \in \mathcal{S}$$

$$(K_m) \equiv \sum_{\ell | m} \varphi_{\lambda_\ell}(K_{m/\ell}) \lambda_\ell \pmod{MI},$$

但し、 $\lambda_\ell$  は  $\ell$  上の  $F$  の (ひとつの) 素ideal。

証明は §2-3 と基本的に同じで、ES1~3 をうまく用いて示されます。キーレニマ 1 は、ideal 類の間の関係式を与えているわけですが、この関係式が十分たくしある事を保証するのが、

キーレスズ (Thaine, Rubin)

$\mathfrak{L} \in \Lambda^+ (= F \text{ の類群の } p\text{-part}),$

$W \subset F^\times / F^{\times M}$ , 有限生成  $\Delta^+$ -部分加群

$\psi: W \rightarrow \mathbb{Z}/M[\Delta^+]$ , Galois equiv. hom

が与えられた時、

$\exists^\infty$  素 ideal  $\lambda \in \mathfrak{L}$  s.t.

$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{L} = \lambda \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{S} \quad (\mathfrak{L} \equiv 1 (M)) \\ \exists \alpha = \alpha_\lambda \in \mathbb{Z}/M[\Delta^+] : \alpha \psi_\lambda|_W \equiv \psi \pmod{M} \end{array} \right.$

証明は Chebotarev の密度定理を巧妙に用いて示されますが、Euler system とは直接には関係ないので解説は略します。

### §3-2 応用 (手品)

ここでは §1 に述べた定理 (I) を証明します。以下、 $\chi$  は even char. とし、 $\Delta$ -module  $M$  の元  $m$  に対して、 $e_\chi \cdot m$  を単に  $m^\chi$  と略記します。定理 (I) を示すには、類数公式 (§1) により、各  $\chi$  に対して、

$$\star \quad \# A(\chi) \mid \# (E/C)(p)(\chi)$$

を示せば十分です。

$\chi = 1$  の時は、 $\mathbb{Q}$  の類数 = 1,  $\mathbb{Q}$  の単数 =  $\pm 1$  故、 $\star$  の両辺とも 1 となります。従って、以下、 $\chi \neq 1$  とします。

簡単のため、 $A(X) = \langle \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \rangle$  と仮定し、又、 $\#(E/C)(p)(X)$  を  $\gamma_X$  と略記します。

### Step 1°

先ずキーレニマスを用います。  $W = (E/E^M)(X)$  とする。

$X \neq 1$  より、 $(C/C^M)(X)$  は  $\mathbb{Z}/M[\Delta](X) (\cong \mathbb{Z}/M)$  上 free, cyclic で  $\xi_1^X$  がその生成元になっています。定義から  $\kappa_1 = \xi_1$  とする。  $\psi$  として

$$\psi: W = (E/E^M)(X) \xrightarrow{\gamma_X \text{ 乗}} (C/C^M)(X) \xrightarrow[\kappa_1^X]{\simeq} \mathbb{Z}/M[\Delta](X) \xrightarrow[\downarrow 1]{\simeq}$$

をとります。キーレニマスより、

$$\exists \text{ 素ideal } \lambda_1 \in \mathcal{L}_1, \exists d \in \mathbb{Z}/M[\Delta]$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_1 \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{S}, \\ d\psi_{\lambda_1}|_W \equiv \psi \pmod{M} \end{cases}$$

$$\text{従って、} d\psi_{\lambda_1}(\kappa_1^X) \equiv \gamma_X \pmod{M}.$$

一方キーレニマス 1 より、

$$(**) \quad (\kappa_{\lambda_1}^X) \equiv \psi_{\lambda_1}(\kappa_1^X) \lambda_1 \pmod{M\mathbb{I}}.$$

$\#A(X) \mid M$  故、 $\psi_{\lambda_1}(\kappa_1^X)$  が従ってその倍数である  $\gamma_X$  が  $\{\lambda_1\} = \mathcal{L}_1$  を消す。

(注) 今の議論に依り、一般に  $\#(E/C)(p)(X)$  が  $A(X)$  を消す (Thaine) が示される。

## Step 2° 無駄の排除

$t$  を  $\kappa_{\ell_1}^x \in F^{xt}/F^{xM}$  なる最大の  $p$  中 ( $1M$ ) とする。

(\*) で、 $r_x | M$ ,  $\varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^x)$  は  $r_x$  の“約数” 故、 $t | r_x$ 。

(\*) より

$$(\kappa_{\ell_1}^x)^{1/t} \equiv \frac{1}{t} \varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^x) \lambda_1 \pmod{\#A(x) \frac{r_x}{t}}$$

∴  $\frac{1}{t} \varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^x)$ , 従って  $\frac{1}{t} \alpha \varphi_{\lambda_1}(\kappa_1^x) = \frac{r_x}{t}$  が  $\{\lambda_1\} = \mathcal{L}_1$  を消す。

## Step 3°

$W, \psi$  を

$$\psi: W = \kappa_{\ell_1}^x F^{xM}/F^{xM} \ni \kappa_{\ell_1}^x \rightarrow t \in \mathbb{Z}/M[\Delta](x)$$

で定める。キ-レニマ 2 より

$$\exists \text{ 素ideal } \lambda_2 \in \mathcal{L}_2 \quad \exists \beta \in \mathbb{Z}/M[\Delta]$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_2 \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{S} \\ \beta \varphi_{\lambda_2}|_W \equiv \psi \pmod{M} \end{cases}$$

$$\therefore \beta \varphi_{\lambda_2}(\kappa_{\ell_1}^x) \equiv t \pmod{M}$$

キ-レニマ 1 より

$$(\kappa_{\ell_1 \ell_2}^x) \equiv \varphi_{\lambda_2}(\kappa_{\ell_1}^x) \lambda_2 + \varphi_{\lambda_1}(\kappa_{\ell_2}^x) \lambda_1 \pmod{MI}$$

∴  $\varphi_{\lambda_2}(\kappa_{\ell_1}^x)$  が, 従って  $t$  が,  $\{\lambda_2\} = \mathcal{L}_2 (\in A(x)/\langle \mathcal{L}_1 \rangle)$  を消す。以上の事から

$\#A(x) = (\mathcal{L}_1 \text{ の exponent}) \times (\mathcal{L}_2 \in A(x)/\langle \mathcal{L}_1 \rangle \text{ の exponent})$  は、

$r_x/t \times t = r_x$  の約数となる。これで ☆ が示された。

## §3-3 Gauß和の system

以前と同じく、 $M: P$  の任意の中、

$\mathcal{S} = \{ \text{square free な自然数 } \prod l_j \mid l_j \equiv 1 \pmod{M} \}$  とする。

$m \in \mathcal{S}$  に対して、 $r \equiv 1 \pmod{pm}$  なる素数をとる。

$\tilde{\gamma}$  を  $r$  上の  $\mathbb{Q}(\mu_{r-1})$  の素ideal,  $\gamma = \tilde{\gamma} \cap K(\mu_m)$  とする。

$\omega = \omega_{\tilde{\gamma}} : (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mu_{r-1}$  を Teichmüller char. とし、

$$g(m, \tilde{\gamma}, \zeta_r) = g(\omega^{-\frac{r-1}{p^n}}) = \sum_{a=1}^{r-1} \omega^{-\frac{r-1}{p^n}}(a) \zeta_r^a \in K(\mu_m, \mu_r)$$

と置く。但し、 $\zeta_r$  は固定された1の原始  $r$  乗根。

$\Delta = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  を  $\text{Gal}(K(\mu_m, \mu_r)/\mathbb{Q})$  の部分群とみます。

$\Delta$  の生成元  $\delta$  をひとつ固定し、各  $m \in \mathcal{S}$  に対して、

$$\begin{cases} \zeta^\delta = \zeta^{b_m} & \forall \zeta \in \mu_{pm} \\ b_m \equiv b_1 \pmod{pM} \end{cases}$$

で  $b_m \in \mathbb{Z}$  を定める。この時、

$$\alpha(m, \gamma) = g(m, \tilde{\gamma}, \zeta_r)^{\delta - b_m}$$

は、 $K(\mu_m)^\times$  の元で、 $m, \gamma$  により決まります。

$\{ \alpha(m, \gamma) \mid m \in \mathcal{S}, \gamma = K(\mu_m) \text{ の素ideal で } r = \gamma \cap \mathbb{Q} \equiv 1 \pmod{pm} \}$  が Gauß和の "Euler system" です。

さて、円単数と Gauß和は非常に良く似た性質を持っています；

① distributive relation

$$\prod_{\xi \in I} (1 - \xi x) = 1 - x^l$$

② 合同条件

$$\xi_k \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f} \text{ 上の素イデアル}}$$

③  $1 - \xi_m$  : global unit  
( $m \neq$  素数中)

①'

$$\chi, \psi : (\mathbb{Z}/r)^{\times} \rightarrow \mu_{r-1}, \quad m \mid r-1$$

$$\prod_{\chi^m=1} S(\chi\psi) = S(\psi^m) \times \text{簡単な項}$$

②'

$$0 \leq k \leq r-2, \quad \pi = \xi_{r-1}$$

$$S(\omega^{-k}) / \pi^k = -\frac{1}{k!} \pmod{\tilde{\mathfrak{f}}}$$

③'

$$(|S(\chi)| = \sqrt{r} \text{ 従って、})$$

 $S(\chi)$  は  $r$  の外で単数。

§2-3, §3-1, 2 の議論は性質①, ②, ③に基づいています。  
system  $\{d(m, \delta)\}$  に対して、①', ②', ③' を用いて同じ様な  
議論をする事に依って、定理(2) が証明されます。

## §3-4 円分体の岩澤 Main Conjecture

$A_m$  を  $(\mathbb{Q}(\mu_{p^m}))$  の類群の  $p$ -part,  $A_{\infty} = \varprojlim_{m \text{ norm}} A_m$  とする。  
これは自然に  $\Delta$ -加群とみられます。

$\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^{\infty}})/\mathbb{Q}(\mu_p))$  は、自然に  $1+p\mathbb{Z}_p$  と同一視されますが、 $\gamma = 1+p$  をその生成元として固定します。 $\mathbb{Z}_p$  上の  $\Gamma$  の  
完備群環  $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^m})/\mathbb{Q}(\mu_p))]$   
は  $\gamma \mapsto 1+t$  によって巾級数環  $\mathbb{Z}_p[[t]]$  と同型になる事  
が知られています。以後、両者を同一視します。

さて、 $A_\infty$  は  $\Lambda$ -加群とみなせますが、類数の有限性により、 $\Lambda$  上有限生成 torsion となります。一般に、有限生成な torsion  $\Lambda$ -加群  $M$  に対して次が知られています：

$$\exists q_j \in \Lambda, \exists \Lambda\text{-hom } f: M \rightarrow \bigoplus_j \Lambda/(q_j)$$

s.t.  $\ker f, \operatorname{coker} f$  は位数有限,

更に、 $\operatorname{char}(M) = (\prod q_j)$  は、 $M$  のみに依存する。

以下、 $X' \in \hat{\Delta}$  を odd char.,  $X = w_p \cdot X'^{-1}$  を対応する even char. とします。但し、 $w_p$  は  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  の Teichmüller char.。以上の記号の下で、岩澤 Main Conj. (= Mazur-Wiles の定理) は、次の様に述べられます：

$$\underline{\text{Main Conj.}(X')}$$

$$\operatorname{char}(A_\infty(X')) = (L_p(\Delta, X)),$$

但し、 $L_p(\Delta, X)$  は  $X$  で定まる  $p$ -進  $L$ -関数。

$E_m, C_m$  を  $\mathbb{Q}(\mu_{p^m})$  の単数群、円単数群とします。 $U_m$  を  $\mathbb{Q}(\mu_{p^m}) \otimes \mathbb{Q}_p$  の主単数群とし、 $E_m, C_m$  を  $\mathbb{Q}(\mu_{p^m}) \otimes \mathbb{Q}_p$  へ埋め込み

$$E_m = \overline{U_m \cap E_m}, \quad C_m = \overline{U_m \cap C_m}$$

と置く。

$E = \varprojlim E_m, C = \varprojlim C_m$  を  $\Lambda$  についての射影極限とします。この時、 $E/C$  は、 $\Lambda$ -加群及び  $\Lambda$ -加群とみなせるが、 $\Lambda$  上有限生成 torsion な事が知られています。

Main Conj. ( $X'$ ) は、次の主張と同値な事が知られています。

Main Conj. ( $X$ )

$$\text{char } A_{\infty}(X) = \text{char } ((\mathcal{E}/\mathcal{O})(X))$$

K. Rubin [3] は、§3-1, 2 に相当する議論をすべての  $(\mathbb{Q}(\mu_p))^+ (m \geq 1)$  で積み重ねて、Main Conj. ( $X$ ) の極めて初等的な別証明を与えています。

なお、Main Conj. ( $X'$ ) の, Gauß の和の system を用いた別証明もすでにできているのかも知れません。

(注1) 以上の文章は、K. Rubin [3], [4] にもとづくものです。

(注2) §2-2 で、 $X=1$ ,  $w_p$  の場合の記述に不正確な点があります。正確な statement は、Washington の本の Chap. 6 をごらん下さい。

(注3) 円単数と、虚2次体上のアーベル拡大の精円単数は非常に良く似ています。Rubin [5] は、虚2次体長を準同型環にもつ精円曲線  $E$  の  $\mathfrak{g}$  ( $\mathfrak{g}$  は素ideal,  $E$  は  $\mathfrak{g}$  で good red.) の分点を、 $\mathfrak{g}$  につけ加えてできる  $\mathbb{Z}_p$  or  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$  拡大に対する岩澤 main conj. を精円単数の system を用いて証明しました。

## 参考文献

- [1] V. A. Kolyvagin : Euler system (7°17°)=ト)
- [2] E. Kummer : Über eine besondere Art, aus complexen Einheiten gebildeter Ausdrücke, Grelle 50 (1855)
- [3] K. Rubin : The Main Conjecture, S. Lang の本 "Cyclotomic Fields" (G.T.M. 1989) の appendix
- [4] K. Rubin : Kolyvagin's system of Gauss sums
- [5] K. Rubin : The one variable main conjecture for elliptic curves with complex multiplications  
( [4], [5] : 7°17°)=ト)
- [6] F. Thaine : On the ideal class groups of real abelian number fields, Ann. of Math., 128 (1988)