

Percolation Problem in an Inhomogeneous
Bethe Lattice大阪大学・工学部 宮 島 佐 介
庄 司 一 郎

Homogeneous Bethe lattice (HBL) における percolation problem は, Essam-Fisher により generating function が求められているので, 必要な量は計算できる状況にあるが, inhomogeneous Bethe lattice (IHBL) については余り議論されていないと思う。IHBL の作り方はいろいろ考えられるが, とりあえず次に述べる IHBL で critical percolation probability P_c を求めてみよう。

まず, ベーテ格子になるべき無限個の格子点が存在し, 我々はそこにボンドをある確率で置く。HBL では, どこでも, 一様な確率 p でボンドが置かれるが, ここでは, IHBL として一つの格子点の周りのボンドの占有率は一様でなく, $p_1, p_2, \dots, p_z$ であると考え。その状態は各格子点で同じである。ここで p_i は格子点から i -方向に向って出るボンドの占有率である。

この模型の応用は特に考えていないけれど HBL が果樹園の病気の伝染の問題に適用されると言われているが, この問題で考えると, 一方向から風が吹くとなると, 順風の方へは伝染し易く, 送風の方へは伝染し難いと考えられ, IHBL で考えることが必要になってくる。

応用はともかくとして, 上述の模型で p_c を求めてみる。 Q_i は任意の格子点で考えて i -方向には無限のクラスターが出来ていない確率とすると

$$Q_i = 1 - p_i + p_i \prod_{j \neq i} Q_j \quad (1)$$

が成立つ。少し変形すると

$$Q_i^2 - (1 - p_i) Q_i - p_i Q = 0 \quad (2)$$

ただし $Q = \prod_j Q_j$ 。
従って

$$Q_i = \frac{1}{2} \{ (1-p_i) + \sqrt{(1-p_i)^2 + 4 p_i Q} \} \quad (3)$$

$$\therefore Q = \prod_i \frac{1}{2} \{ (1-p_i) + \sqrt{(1-p_i)^2 + 4 p_i Q} \}$$

p_c は Q が $Q=1$ なる重根をもつ条件により与えられるので,

$$\sum_{i=1}^z \frac{p_i}{1+p_i} = 1 \quad *(4)$$

ここで $z=3$ に限り

$$p_1 : p_2 : p_3 = 1 : a : b$$

としたとき, p_{1c} は図1の様に得られる。

又, クラスターの大きさ s が p_c の近傍で HBL と同様に

$$s \sim (p-p_c)^{-1} \quad (5) \quad p_c$$

なる形で発散することを,
 s を p の巾級数で求め
 ratio method を用い
 て調べた。

*) この解法は石井氏により
 指適されたので著者はその
 後の計算で(4)は次の行列式
 であらわされることを確か
 めた。これはもつと簡単な
 導き方があることを暗示し
 ている。

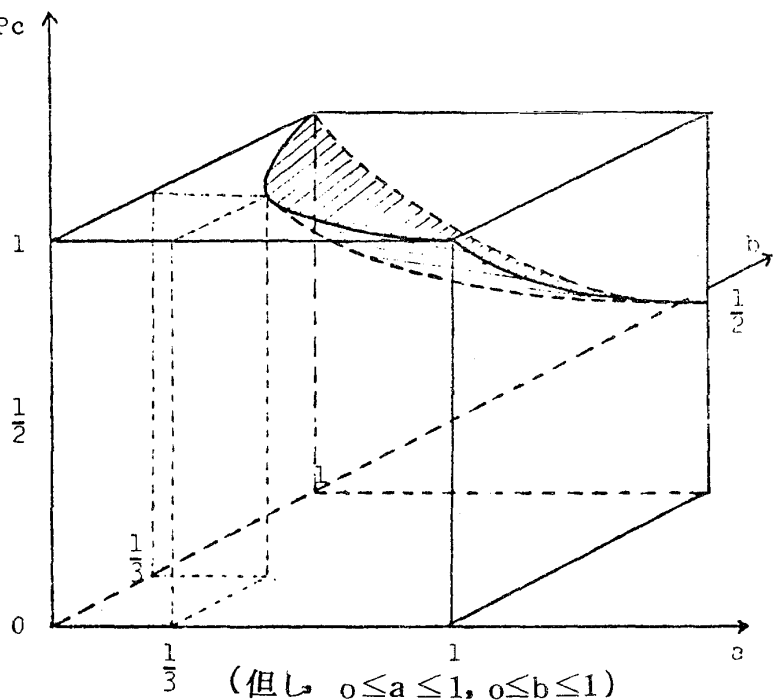


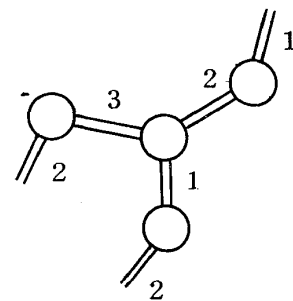
図1 臨界濃度

$$\begin{vmatrix}
 1 & -p_2 & -p_3 & \cdots & -p_z \\
 -p_1 & 1 & & & -p_z \\
 -p_1 & -p_2 & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 -p_1 & -p_2 & & & 1
 \end{vmatrix} = 0$$

枝分れ高分子の相変化

阪大工 庄 司 一 郎

模型的に考えて、抗原には f 個の違った「穴」があいていると考え、これに f 種類の抗体の各々が結合できると考える。抗体は棒状で両端が抗原の「穴」にはさまれることができる。これらが相結合して右図のように「分子」を作ると考える。この「分子」が「巨大分子」になりうるためには抗原、抗体の数の割合がどのようにあればよいかなどを考える。これらは「木」のような形をしていると考えるので、いわゆる「ペーテ格子」上に配布されていると考えられる。抗原の数 N 、各抗体の数 N_k ($k=1, 2, \dots, f$)、それに分子数 M を一定とする条件のもとにエントロピー極大の原理より最確分布



第1図 木 ($n=3$, $\ell_1=\ell_2=\ell_3=1$, $i_1=1, i_2=2, i_3=0$)