

ある種の方程式に關する特異コーシー問題について

京都工織短大 洪田雄策

都立大大学院 中村 玄

1. 序. 複素領域における線形偏微分方程式の特異コーシー問題を考える。

特性根の重複度が一定の場合, 分岐した初期条件に關するコーシー問題は Hamada - Leray - Wagschal [4] によつて論ぜられた。

最近, Nakamura [7] は特性根の重複度が一定でない場合について, Grönwall - Ludwig [3] の方法を変数係数の作用素に適用し, 対角化可能な 1 階方程式系について特異コーシー問題を論じた。即ち, 作用素の特性多様体の幾つかの成分が交わり, その交わりが involutive であるという条件の下で解の特異性の伝播を論じた。

ここでは, 単独方程式に關して, その主要部が上の条件を満たし, 低階に Levi 条件を課さずに取り扱う。解の特異性に關する幾何学は Leray [6], Garding - Kotake - Leray [5] の研究と

密接に関連している。

我々の方法は Nakamura [7] と同様である。次節において仮定と結果を詳しく述べる。

2. 仮定と結果

$\mathbb{C}^{n+1}$ の原点の近傍 X (X の点を $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ とかく) 上で正則な係数をもつ m 階の微分作用素 $a(t, x, D_t, D_x)$ を考える。

$$a(t, x, D_t, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(t, x) D_t^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

ここで $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|\alpha| = \sum_{i=0}^n \alpha_i$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($1 \leq i \leq n$).

(t, x) の covector を $(\lambda, \xi) = (\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n)$ とかく。作用素 a の特性多項式を $\hbar(t, x, \lambda, \xi)$ とする。又しばしば $t = x_0$, $\lambda = \xi_0$ ともかく。

さて初期平面 S ; $t=0$ に関する特異コーシー問題

$$(1) \begin{cases} a(t, x, D_t, D_x) u(t, x) = 0, \\ D_t^\ell u(0, x) = w_\ell(x) \quad (0 \leq \ell \leq m-1) \end{cases}$$

を考える。ここで $w_\ell(x)$ は T ; $t = x_1 = 0$ 上で極をもつとする。

この問題を論ずる為に、作用素 a に次の条件を課す。

$$\text{仮定 (A)} \quad \hbar(t, x, \lambda, \xi) = (\lambda - \lambda^+(t, x, \xi))(\lambda - \lambda^-(t, x, \xi)) \prod_{i=1}^{m-2} (\lambda - \lambda_i(t, x, \xi))$$

1) $\mathbb{N}$ は nonnegative integers 全体を表わす。

とするとき, $\lambda^\pm, \lambda_i (1 \leq i \leq m-2)$ は次の条件を満たす。

(i) $\lambda_i(t, x, \varepsilon) (1 \leq i \leq m-2), \lambda^\pm(t, x, \varepsilon)$ は $(t, x, \varepsilon) = (0, 0; 1, 0, \dots, 0)$

の近傍で正則である。

(ii) $\lambda^+(0, 0; 1, 0, \dots, 0) = \lambda^-(0, 0; 1, 0, \dots, 0)$, 且 $\lambda_i(0, 0; 1, 0, \dots, 0) (1 \leq i \leq m-2)$

, $\lambda^+(0, 0; 1, 0, \dots, 0)$ は相異なる。

(iii) Poisson bracket $\{\lambda - \lambda^+(t, x, \varepsilon), \lambda - \lambda^-(t, x, \varepsilon)\}$ は $(t, x, \varepsilon) = (0, 0; 1, 0, \dots, 0)$

の近傍で 0。

このとき, 特性根 $\lambda_i (1 \leq i \leq m-2), \lambda^\pm$ に対応して, Γ を通る m 個の特性面 $K_i (1 \leq i \leq m-2), K^\pm$

$$K_i: \varphi_i(t, x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m-2,$$

$$K^\pm: \varphi^\pm(t, x) = 0$$

が存在する。ここで $\varphi_i (1 \leq i \leq m-2), \varphi^\pm$ は Hamilton-Jacobi の方程式

$$(2) \begin{cases} D_t \varphi_i = \lambda_i(t, x, \text{grad } \varphi_i), & \varphi_i(0, x) = x_i, \quad 1 \leq i \leq m-2 \\ D_t \varphi^\pm = \lambda^\pm(t, x, \text{grad } \varphi^\pm), & \varphi^\pm(0, x) = x_i \end{cases}$$

の解によって与えられる。

次に, $\Phi(t, x, \tau)$ を

$$(3) \begin{cases} \Phi_t = \lambda^-(t, x, \Phi_x), \\ \Phi(\tau, x, \tau) = \varphi^+(\tau, x) \end{cases}$$

の解とする。

我々は更に、次の仮定を設ける。

仮定(B) $\varpi(0,0,\tau) \neq 0$.

このとき Weierstrass の予備定理により、

$$\varpi(t,x,\tau) = p(t,x,\tau)P(t,x,\tau)$$

とかける。ここで $p(t,x,\tau)$ は原点の近傍で正則で $p(0,0,0) \neq 0$, $P(t,x,\tau)$ は τ についての特殊擬多項式。

$\varpi(0,x,0) = x_1$ 故, $P(t,x,\tau)$ は τ について既約である。その判別式を $\Delta(t,x)$ とする。面 K_0 を

$$K_0 = \{(t,x); \Delta(t,x) = 0\}$$

によって定義する。 K_0 は n 次元特性面 (より詳しくは $\varepsilon_0 - \lambda^\pm(t,x,\varepsilon)$ に依りて特性) で, K^+ に接し, 一般には regular でない。又, 明らかに $K_0 = \{(t,x); \exists \tau; \varpi(t,x,\tau) = \varpi_\tau(t,x,\tau) = 0\}$ である。 $K = \bigcup_{i=0}^{m-2} K_i \cup K^+ \cup K^-$ と書こう。

このとき, 次の定理が成り立つ。

定理 仮定(A), (B)の下に, $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点の近傍 $V \subset X$ が存在して, コーシー問題(1)は $V-K$ の単連結被覆領域上で唯一つの正則解 $u(t,x)$ をもつ。更に, $u(t,x)$ は

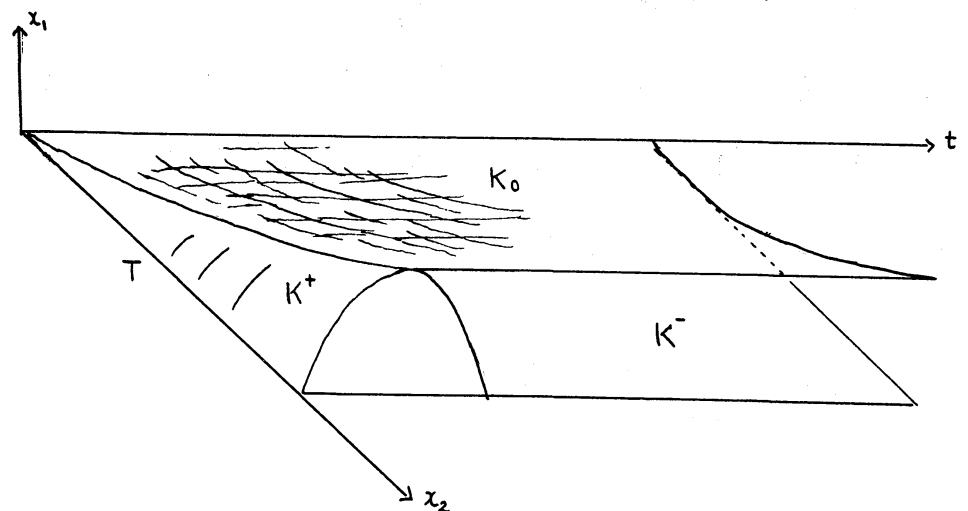
$$(4) \quad u(t,x) = \sum_{\lambda=1}^{m-2} \left\{ \frac{F_\lambda(t,x)}{[g_\lambda(t,x)]^{\lambda_1}} + G_\lambda(t,x) \log g_\lambda(t,x) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{F^+(t, x)}{[\varphi^+(t, x)]^{p^+}} + G^+(t, x) \log \varphi^+(t, x) + \int_0^t \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k(t, x, \tau)}{[\Phi(t, x, \tau)]^k} \right. \\
& \left. + G(t, x, \tau) \log \Phi(t, x, \tau) \right] d\tau + H(t, x)
\end{aligned}$$

によって与えられる。但し、 $F_i, G_i, F^+, G^+, F_k, G$ は夫々原点の近傍で正則、 p_i, p^+ は正の整数である。

注意 解の表示式(4)は仮定(A)のみから得られる。仮定(B)より、解の特異性が K 上にあることが分る。

例 $\hat{h} = D_t^2 + 2x_2 D_t D_1 + D_t D_2$. このとき、 $\lambda^+ = -2x_2 \xi_1 - \xi_2$, $\lambda^- = 0$,
 $\Phi = x_1 - 2x_2 \tau + \tau^2$, $K^+ : \varphi^+ = x_1 - 2x_2 t + t^2 = 0$, $K^- : \varphi^- = x_1 = 0$,
 $K_0 : x_1 - x_2^2 = 0$.



2. 定理の証明の概略

証明は古典的な方法でなされる。

先づ Garding-Kotake-Leray [5], Granoff-Ludwig [3], Varllant [9], Nakamura [7]等による漸近展開の方法で形式解を構成し, 次にその収束を, Wagschal [8], De Paris [2], Hamada-Leray-Wagschal [4]等による優函数の方法で示す。解の特異性の幾何学的考察は Garding-Kotake-Leray [5]の研究と密接に関連している。

さて, コーシー問題(1)を解くわけであるが, 重畳の原理により, $w_l(x) = \frac{w_l'(x)}{x_l^p}$ ($0 \leq l \leq m-1$) の場合を考えれば十分である。

$$H(t, x, \lambda, \varepsilon) = h(t, x, \lambda, \varepsilon) + g(t, x, \lambda, \varepsilon),$$

$$g(t, x, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n h_i^{(i)}(t, x, \lambda, \varepsilon)$$

(以下 $\frac{\partial^p}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}} \frac{\partial^q}{\partial \varepsilon_{j_1} \cdots \partial \varepsilon_{j_q}} h(x_0, x, \varepsilon_0, \varepsilon) = h_{i_1, \dots, i_p}^{(j_1, \dots, j_q)}(x_0, x, \varepsilon_0, \varepsilon)$ と略記する。)

とおき, 作用素 a を

$$a(t, x, D_t, D_x) = H(t, x, D_t, D_x) - b(t, x, D_t, D_x)$$

とおく。但し, $\text{order } b \leq m-1$ である。

$u^{(k)}$ を逐次コーシー問題

$$(5) \begin{cases} H u^{(0)} = 0, \\ D_t^l u^{(0)}(0, x) = \frac{w_l'(x)}{x_l^p} \quad (0 \leq l \leq m-1) \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} H u^{(k)} = h u^{(k-1)}, \\ u^{(k)} = O(t^m) \end{cases}, \quad k \geq 1$$

の解とする。 $u = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}$ は (1) の π 形式解である。

各 $u^{(k)}$ を

$$(7) \quad u^{(k)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{m-2} f_j(\varphi_{\lambda}) U_{j,\lambda}^{(k)} + f_j(\varphi^+) V_j^{(k)} + \int_0^t f_j(\varpi) W_j^{(k)}(t-\tau, x, \tau) d\tau \right\}$$

の π 形で求める。

ここで $f_j(s)$ ($j \in \mathbb{Z}$) は $\frac{df_j}{ds} = f_{j-1}$, $f_0(s) = (-1)^{p-1} (p-1)! \frac{1}{s^p}$ である。

。

(7) が (5), (6) を充す様に $U_{j,\lambda}^{(k)}$, $V_j^{(k)}$, $W_j^{(k)}$ を決めればよい。それには、主として

$$(8) \quad H(t, x, D_t, D_x) \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} [f_j(\varphi^+) V_j^{(k)} + \int_0^t f_j(\varpi) W_j^{(k)}(t-\tau, x, \tau) d\tau] \right\}$$

の計算が問題となるが、その為の計算公式を幾つか準備する。

以下 $\sum_{j=-\infty}^{\infty}$, suffix k を省略し, $W_j^{(k)}(t-\tau, x, \tau)$ を $W(t, x, \tau)$ とかく。

。

先づ仮定 (A) (iii) より, (3) で決められた ϖ は次の関係式を充す。

補題 1.

$$\varpi_t + \varpi_x = \lambda^+(t, x, \varpi_x),$$

$$\varpi(t, x, 0) = \varphi^+(t, x)$$

この補題は重要である。

これを用いて

補題 2.

$$C(h, \Phi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n h^{(i,j)}(t, x, \Phi_t, \Phi_x) \Phi_{i,j}, \quad \Phi_{i,j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}$$

とすると,

$$(9) \quad C(h, \Phi) + g(t, x, \Phi_t, \Phi_x) \equiv 0 \pmod{\Phi_t},$$

$$(10) \quad C(h, \varphi^\pm) + g(t, x, \varphi_t^\pm, \varphi_x^\pm) \equiv 0 \pmod{(\varphi_t^\pm - \lambda^\mp(t, x, \varphi_x^\pm))}$$

又次の Leibniz の公式をしばしば使用する。

公式 1. m 階の斉次微分作用素 $H(x, D)$ に対して,

$$H(x, D) f(\varphi(x)) u(x) = f^{(m)}(\varphi) H(x, \varphi_x) u + f^{(m-1)}(\varphi) (H_\xi(x, \varphi_x) \cdot D + \frac{1}{2} \sum_{i,j} H^{(i,j)}(x, \varphi_x) \varphi_{ij}) u + \sum_{d=2}^m f^{(m-d)}(\varphi) L_d u.$$

ここで L_d は, H と φ のみに関係する d 階の微分作用素。

公式 2. $P(t, x, D_t, D_x)$ を m 階の微分作用素とする。このとき

$$P(t, x, D_t, D_x) \int_0^t F(t, x, \tau) d\tau = M(t, x, D_t, D_\tau, D_x) F(t, x, \tau) \Big|_{\tau=t} + \int_0^t P(t, x, D_t, D_x) F(t, x, \tau) d\tau.$$

但し,

$$M(t, x, \lambda, \mu, \xi) = \frac{P(t, x, \lambda + \mu, \xi) - P(t, x, \lambda, \xi)}{\mu}.$$

以下簡単の為に次の記号を導入する。

函数列 $\{U_j\}$, 整数 p, q ($0 \leq p \leq q$) に対して

$$\mathcal{O}(p, q; U_j) = \sum_{d=0}^{q-p} L_{p+d} U_{j-d}.$$

ここで L_d は d 階の微分作用素。

これらを用いて, (8) を計算する。結果を述べると,

$$\begin{aligned} (11) \quad & H(t, x, D_t, D_x) \left\{ f_j(\varphi^+) V_j + \int_0^t f_j(\Phi) W_j(t, x, \tau) d\tau \right\} \\ &= [f_{j-m+1}(\varphi^+) \{L_1^+ V_j + \mathcal{O}(2, m; V_{j-1})\}] + [f_{j-m+2}(\varphi^+) \{N_1^+ W_j \\ &+ \mathcal{O}(2, m-1; W_{j-1})\}] \Big|_{\tau=t} + f_{j-m+2}(\varphi^-) N_1^- W_j \Big|_{\tau=0} + \int_0^t f_{j-m+2}(\Phi) \{K_2 W_j \\ &+ \mathcal{O}(3, m; W_{j-1})\} d\tau]. \end{aligned}$$

ここで,

$$L_1^+ = q(t, x, \varphi_t^+, \varphi_x^+) (\varphi_t^+ - \lambda^-(t, x, \varphi_x^+)) (D_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda^+}{\partial \xi_i}(t, x, \varphi_x^+) D_i + C^+(t, x)),$$

$$q(t, x, \lambda, \xi) = \prod_{i=1}^{m-2} (\lambda - \lambda_i(t, x, \xi)),$$

$$N_1^+ = q(t, x, \Phi_t + \overline{\Phi}_t, \overline{\Phi}_x) (D_t + D_\tau - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda^+}{\partial \xi_i}(t, x, \overline{\Phi}_x) D_i + b^+(t, x, \tau)),$$

$$N_1^- = q(t, x, \overline{\Phi}_t, \overline{\Phi}_x) (D_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda^-}{\partial \xi_i}(t, x, \overline{\Phi}_x) D_i + b^-(t, x, \tau)),$$

$$K_2 = q(t, x, \overline{\Phi}_t, \overline{\Phi}_x) (D_t + D_\tau) D_t + R_2,$$

R_2 は $D_t^2, D_t D_\tau, D_\tau^2$ を含まない 2 階の微分作用素。

たとえば, $H(t, x, D_t, D_x) f_j(\varphi^+) V_j$ の計算について述べよう。

公式 1 より,

$$H(t, x, D_t, D_x) f_j(\varphi^+) V_j = f_{j-m+1}(\varphi^+) [L_1^+ V_j + O(2, m; V_{j-1})],$$

$$L_1^+ = h^{(0)}(t, x, \varphi_t^+, \varphi_x^+) D_t + \sum_{i=1}^n h^{(i)}(t, x, \varphi_t^+, \varphi_x^+) D_i + c(h, \varphi^+) + g(t, x, \varphi_t^+, \varphi_x^+).$$

容易に分かる様に,

$$h^{(0)}(t, x, \varphi_t^+, \varphi_x^+) = g(t, x, \varphi_t^+, \varphi_x^+) (\varphi_t^+ - \lambda^-(t, x, \varphi_x^+)),$$

$$h^{(i)}(t, x, \varphi_t^+, \varphi_x^+) = g(t, x, \varphi_t^+, \varphi_x^+) (\varphi_t^+ - \lambda^-(t, x, \varphi_x^+)) \left(-\frac{\partial \lambda^+}{\partial \xi_i}(t, x, \varphi_x^+) \right) \quad (1 \leq i \leq n)$$

従って補題 2 より,

$$L_1^+ = g(t, x, \varphi_t^+, \varphi_x^+) (\varphi_t^+ - \lambda^-(t, x, \varphi_x^+)) \left(D_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda^+}{\partial \xi_i}(t, x, \varphi_x^+) D_i + C^+(t, x) \right).$$

(11) 式を (5), (6) 式に適用すると次の漸化式を得る。即ち,

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} L_1^\lambda U_{j,\lambda}^{(R)} = O(2, m; U_{j-1,\lambda}^{(R)}) + O(0, m-1; U_{j,\lambda}^{(R-1)}) \quad (1 \leq \lambda \leq m-2), \\ L_1^+ V_j^{(R)} = 0, \\ (N_1^+ W_j^{(R)})(0, x, \tau) \Big|_{\tau=t} = (O(2, m-1; W_{j-1}^{(R)}) + O(0, m-2; W_j^{(R-1)}))(0, x, \tau) \Big|_{\tau=t} \\ \quad + O(2, m; V_j^{(R)}) + O(0, m-1; V_{j+1}^{(R-1)}), \\ (N_1^- W_j^{(R)})(t, x, 0) = O(2, m-1; W_{j-1}^{(R)})(t, x, 0), \\ K_2 W_j^{(R)} = O(3, m; W_{j-1}^{(R)}) + O(0, m-1; W_{j+1}^{(R-1)}) \end{array} \right.$$

$$\therefore \text{て} \quad L_1^\lambda = R^{(0)}(t, x, D_t g_\lambda, \text{grad } g_\lambda) D_t + \sum_{i=1}^n R^{(i)}(t, x, D_t g_\lambda, \text{grad } g_\lambda) D_i + C(R, g_\lambda) + g(t, x, D_t g_\lambda, \text{grad } g_\lambda).$$

(5), (6) 式の初期条件についても上と類似した計算を行うと、次の漸化式を得る。即ち、

$$(13) \quad \begin{cases} U_{0,\lambda}^{(0)}(0, x), V_0^{(0)}(0, x), W_{-1}^{(0)}(0, x, 0) = \sum_{l=0}^{m-1} \Delta_l(x) w_l'(x), \\ U_{j,\lambda}^{(k)}(0, x), V_j^{(k)}(0, x), W_{j-1}^{(k)}(0, x, 0) = \sum_{\lambda=1}^{m-2} O(1, m-1; U_{j,\lambda}^{(k)}) + O(1, m-1; V_{j-1}^{(k)}) \\ \quad + O(1, m-2; W_{j-2}^{(k)}). \end{cases}$$

ここで $\Delta_l(x)$ ($0 \leq l \leq m-1$) は原点の近傍で正則な函数。

(12), (13) 式をよく眺めると、 $U_{j,\lambda}^{(k)}, V_j^{(k)}, W_{j-1}^{(k)}$ が (12), (13) 式により次々と決まり、

$$\begin{cases} U_{j,\lambda}^{(k)}, V_{j,\lambda}^{(k)} = 0 \quad (j < 0), \\ W_j^{(k)} = 0 \quad (j < -k-1), \\ W_j^{(k)} = O(t\tau)^{j-1} \quad (-k-1 \leq j \leq -1) \end{cases}$$

である事も分る。従ってコーシー問題 (i) の形式解が構成出来た事になる。

3. K_0 の幾何学的性質

この節で K_0 の幾何学的性質についての概要及び仮定 (B) に対する注意を簡単に述べる。

これらの幾何学は Garding-Kotake-Leray [5] の結果に密接に関連している。

以下、証明なしに得られた主な結果を述べる。

先づ

$$\pi^\pm = \{ (t, x, \xi_0, \xi) \in \mathbb{C}^{n+1} \times (\mathbb{C}^{n+1} - 0); \xi_0 - \lambda^\pm(t, x, \xi) = 0, (t, x, \xi) \text{ は } (0, 0; 1, 0, \dots, 0) \text{ の近傍を動く} \}$$

$$\pi_{(t, x)}^\pm = \{ (\xi_0, \xi) \in \mathbb{C}^{n+1} - 0; (t, x, \xi_0, \xi) \in \pi^\pm \}$$

とおく。

仮定 (A) の (iii) は、 $\pi^+ \cap \pi^-$ が (t, x, ξ_0, ξ) -space で involutive なる事を意味する。

さて、 $\lambda^\pm$ に対応する bicharacteristic strip (簡単に $\lambda^\pm$ -bicharacteristic strip という) は Hamilton system

$$(14)^\pm \begin{cases} \frac{dt}{d\sigma} = 1, & \frac{d\xi_0}{d\sigma} = \lambda_t^\pm, \\ \frac{dx_i}{d\sigma} = -\frac{\partial \lambda^\pm}{\partial \xi_i}, & \frac{d\xi_i}{d\sigma} = \frac{\partial \lambda^\pm}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

の解で与えられる。

その (t, x) -space への projection は $\lambda^\pm$ -bicharacteristic curve である。

。

仮定 (A) の (iii) より、

命題 1. $\varepsilon_0 - \lambda^+(t, x, \varepsilon)$ (resp. $\varepsilon_0 - \lambda^-(t, x, \varepsilon)$) は, λ^- (resp. λ^+) -
bicharacteristic strip に沿って constant である。

この事実により, K_0 の幾何学的性質を解析する事が出来る。

先づ

$$\Omega = \{(t, y) \in T; t=0, y=(0, y'), y'=(y_2, \dots, y_n), \\ \lambda^+(0, 0, y'; 1, 0, \dots, 0) = \lambda^-(0, 0, y'; 1, 0, \dots, 0)\}$$

とおく。更に $\tilde{\Omega}$ を Ω における $\lambda^\pm$ に属する characteristic elements:

$$\tilde{\Omega} = \{(t, y, \varepsilon_0, \varepsilon); (t, y) \in \Omega, \varepsilon_0 = \lambda^+(0, 0, y'; 1, 0, \dots, 0), \\ \varepsilon = (1, 0, \dots, 0)\}$$

とおく。又,

$$\Lambda^\pm = \{(t, x) \in K^\pm; \lambda^+(t, x, \varphi_x^+(t, x)) = \lambda^-(t, x, \varphi_x^+(t, x))\}$$

$$\tilde{\Lambda}^\pm = \{(t, x, \varepsilon_0, \varepsilon); (t, x) \in \Lambda^\pm, \varepsilon_0 = \varphi_t^\pm(t, x), \varepsilon = \varphi_x^\pm(t, x)\}$$

とおく。即ち $\Lambda^\pm$ は $K^\pm$ の subvariety で, そこに $K^\pm$ は λ^+ , λ^- の両方に属して特性である。

$$\tilde{\Omega}, \tilde{\Lambda}^\pm \subset \pi^+ \cap \pi^- \text{ である。}$$

さて仮定 (B) が成立つとする。そのとき,

命題 2.

- 1°. $K_0 = \{(t, x) ; \exists \tau, \overline{\Phi}(t, x, \tau) = \overline{\Phi}_\tau(t, x, \tau) = 0\}$.
- 2°. $K^\pm \supsetneq \Lambda^\pm$ (resp.), $\Gamma \supsetneq \Omega$, $\dim \Lambda^\pm = n-1$, $\dim \Omega = n-2$.
- 3°. $K_0 \neq K^\pm$
- 4°. K_0 は $\tilde{\Lambda}^+$ (resp. $\tilde{\Lambda}^-$) から出る λ^- (resp. λ^+) -bicharacteristic curve によって生成される。
- 5°. K_0 は $\Lambda^\pm$ 上で $K^\pm$ に接する。 K^+ , K^- , K_0 は Ω 上で互いに接する。
- 6°. K_0 は $\lambda^\pm$ に離して特性である。

一般に K_0 は regular な面ではない。

命題 3. 仮定 (B) が充たれたとする。そのとき, Hamilton field $H_{\varepsilon_0-\lambda^+}$, $H_{\varepsilon_0-\lambda^-}$ の $\tilde{\Omega}$ を通る integral manifold を $\tilde{K}_0$ とすると, K_0 は $\tilde{K}_0$ の (t, x) -space への projection である。

次に K_0 が regular である為の条件を述べる。

命題 4

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda^+-\lambda^-)}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial(\lambda^+-\lambda^-)}{\partial x_i} \Big|_{(0,0;1,0,\dots,0)} \neq 0$$

とする。このとき, K_0 は原点の近傍で regular である。

この条件についての幾何学的意味も与えられるが、ここでは省略する。

最後に仮定(B)が充されない簡単な判定条件及び注意を述べる。

命題5.

1°. $\pi_{(0,0)}^+ = \pi_{(0,0)}^-$ のとき, 仮定(B)は成立しない。

2°. $T = \perp$ のとき, (B)は成立しない。この場合, $K^+ = K^-$ 。

更に, 特異コーシー問題(1)の解の特異性は $\bigcup_{i=1}^n K_i \cup K^+$ に限る。

例. $(\frac{\partial}{\partial t})^2 - (\lambda_1 a(x))^2 (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})$ 。コーシー問題(1)の解の特異性は $\lambda_1 = 0$ 上に限る。

以上の結果の証明及びより精しい結果は, Y. Hamada - G. Nakamura [10] に述べられる予定である。

References

- [1] J.M.Bony et P.Schapira, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Inst. Fourier. 26, 1 (1976), p.81-140.
- [2] J.-Cl.De Paris, Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable, J. Math. pures et appl., 51, 1972, p.465-488.
- [3] B.Granoff and D.Ludwig, Propagation of singularities along characteristics with non uniform multiplicities, J. Math. Anal. Appl., 21, 1968, p.556-574.
- [4] Y. Hamada, J.Leray et C.Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle. a paraître.
- [5] L.Gårding, T.Kotake et J.Leray, Uniformization et développement asymptotiques de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes, Bull. Soc. Math. France, 92, 1964, p.263-361.
- [6] J.Leray, Problème de Cauchy 1, Bull. Soc. Math. France, 85, 1957, p.389-429.
- [7] G. Nakamura, The singularities of solutions of the Cauchy problems for systems whose characteristic roots are non uniform multiple. to appear.
- [8] C.Wagschal, Problème de Cauchy analytique à données meromorphes, J. Math. pures et appl., 51, 1972, p.375-397.
- [9] J.Vaillant, Solutions asymptotiques d'un système à caractéristiques de multiplicité variable, J. Math. pures et appl., 53, 1974, p.71-98.

- [10] Y.Hamada and G.Nakamura, On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non uniform multiple characteristic, to appear.