

作用素代数の K -理論概論

北大理 鈴木治夫 (Haruo Suzuki)

作用素代数の K -理論は, 一般的に Banach algebra 上で展開される。Banach algebra A に対し $K_0(A)$, $K_1(A)$ および連結準同形写像が導入され, Bott periodicity および周期 6 項完全列が示される。([B] 参照。)

A が可換の場合, 外積および対称積ベキ作用素が $K_0(A)$ において定義され, さらに suspension isomorphism と Bott periodicity により, 可換 Banach K -理論全体に拡大される。 $\Delta(A)$ を A の maximal ideal space とし, $K^0(\Delta(A))$ を $\Delta(A)$ の幾何学的 K -理論とすると, 自然同形写像 $K_0(A) \cong K^0(\Delta(A))$ がある (例えば [T] 参照) から, これは幾何学的 K -理論における作用素 (例えば [A] 参照) の代数的定式化と見做される。可換代数に対する純代数的 K -理論の作用素は scheme の枠組の中で [S] によって展開されている。

この報告においては、或る非可換 C^* -algebras の K -理論に対する作用素の導入を試みる。実際、一部の AF -algebras に対してはその構成が可能である。

§1, §2では、Banach algebras の K -理論を解説し C^* -algebras の K -理論を導き、§3において K -理論の作用素を述べる。

§1. Banach algebras の K -理論

A を Banach algebra とする。まず、 A の K -理論、 $K_0(A)$ および $K_1(A)$ を手短かに定義する。 $M_n(A)$ を A 上の $n \times n$ 行列全体の集合とし、異なる n に対する同一視、

$$M_m(A) \equiv \begin{bmatrix} M_m(A) & 0 \\ 0 & 0_m \end{bmatrix} \subset M_{m+m}(A)$$

の下で、

$$M(A) = \bigcup_n M_n(A) = \varinjlim_n M_n(A)$$

とおく。 $P_n(A)$ を $M_n(A)$ のべき等元全体の集合とする。

A が単位的である (1 をもつ) とし、 $GL_n(A)$ を $M_n(A)$ の可逆元全体の集合とする。異なる n に対する同一視、

$$GL_n(A) \equiv \begin{bmatrix} GL_n(A) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \subset GL_{m+n}(A)$$

の下で,

$$GL(A) = \bigcup_n GL_n(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$$

と置く。

$e, f \in \bigcup_n P_n(A)$ とし, $u \in GL_n(A)$ が存在して $ueu^{-1} = f$ となるとき $e \sim f$ と定める。この関係 " $\sim$ " は $\bigcup_n P_n(A)$ における同値関係となる。同値類全体の集合 $P(A) = (\bigcup_n P_n(A))/\sim$ は直和に関して可換半群となる。 $K_0(A)$ は $P(A)$ の Grothendieck 群と定義される。

$GL_n(A)$ の単位行列 I_n の孤立連結成分 $GL_n^0(A)$ は不変部分群で, $GL_n(A)/GL_n^0(A)$ は群となる。 $K_1(A) = \varinjlim_n (GL_n(A)/GL_n^0(A))$ と定められる。 $GL_n(A)$ における孤立連結性は初等行列の積によって得られるから, $K_1(A)$ は可換群となる。したがって $K_1(A)$ は algebra A の Whitehead group ([M]参照) である。

$p, q \in P_n(A)$ で $pq = qp = 0$ ならば,

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$$

と取る。 $\mu: P(A) \rightarrow K_0(A)$ を標準準同形写像とし、 $\mu(p) = [p]$ 等とかくことにする。 $K_0(A)$ の任意の元は $[p] - [q]$ $p, q \in P(A)$ の形に表わされ、

$$\begin{aligned} [p] - [q] &= [p] - [q] + [q + I_n - q] - [I_n] \\ &= [p \oplus (I_n - q)] - [I_n]. \end{aligned}$$

或る $r \in P(A)$ に對して $p \oplus r \sim q \oplus r$ と取るならば、

$$\begin{aligned} p \oplus I_n &\sim p \oplus r \oplus (I_n - r) \\ &\sim q \oplus r \oplus (I_n - r) \\ &\sim q \oplus I_n \end{aligned}$$

であるから、 $K_0(A)$ において $[p] = [q]$ と取るための必要十分条件は $p \oplus I_n \sim q \oplus I_n$ 。

この関係式から、自然数 n に $[I_n]$ を対応させることによって得られる準同形写像 $\mathbb{Z} \rightarrow K_0(A)$ は単射となる。 とくに $A = \mathbb{C}$ の場合は全射となり、したがって

$$K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}.$$

また $GL_n(\mathbb{C})$ の任意の元は初等行列の積によって I_n に変形されるので

$$K_1(\mathbb{C}) = 0.$$

A が必ずしも単位的でない場合、 A^+ を A に単位元 1 を添加して得られる Banach algebra とする。 すなわち $A^+ = \{(x, \lambda) \mid x \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$ で、和、積およびノルムは

$$(x, \lambda) + (y, \mu) = (x+y, \lambda+\mu),$$

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu),$$

$$\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$$

によって与えられる。 A は A^+ の両側イデアルで $A^+/A \cong \mathbb{C}$ 。

$\varphi: A^+ \rightarrow \mathbb{C}$ を剰余写像とし, $\varphi^* \in K_i$ ($i=0,1$) に関する誘導準同形写像とすると, $K_i(A) = \text{Ker}(\varphi^*: K_i(A^+) \rightarrow K_i(\mathbb{C}))$ と定義する。 A が単位元的である場合は A の単位元 1_A によって A^+ は $A \oplus \mathbb{C}$ と直和分解し, $K_i(A^+) = K_i(A) \oplus K_i(\mathbb{C})$ となるので $\text{Ker}(\varphi^*: K_i(A^+) \rightarrow K_i(\mathbb{C})) = K_i(A)$ 。

A が C^* -algebra であるとき, $M_n(A)$ の射影元全体の集合を $P_n(A)$ とかく。 さらに A は単位元的であるとする。 任意の $e \in P_n(A)$ に対し, $z = 1 + (e - e^*)(e^* - e)$ は 0 をスペクトルに持たないから逆元 $\tau = z^{-1}$ がある。 直接計算により,

$$ze = ee^*e = ez,$$

$$e\tau = \tau e, \quad \tau e^* = e^* \tau,$$

が確かめられる。 $p = ee^*\tau$ とおくと

$$p^* = \tau ee^* = ee^*\tau = p,$$

$$p^2 = ee^*\tau ee^*\tau = \tau ee^*ee^*\tau = \tau ze e^* \tau = p$$

と成り, また

$$ep = p,$$

$$pe = ee^*\tau e = ee^*e\tau = ez\tau = e,$$

$$(1-p+e)(1-e+p)=1,$$

$$(1-p+e)e(1-e+p)=e(1-e+p)=p.$$

ゆえに $p \sim e$.

したがって, $P(A) = (\bigcup_n P_n(A)) / \sim$ とおくと, 包含写像は同形写像 $P(A) \cong P(A)$ を引き起こす. このことから単位的 C^* -algebra A に対して, $K_0(A)$ は $V(A)$ の Grothendieck 群とある. 任意の $a \in GL_n(A)$ は一意的に

$$a = u \cdot h$$

と "極分解" する. ここで u はユニタリ元, $h = (\alpha^* \alpha)^{\frac{1}{2}}$.

h は正元で, functional calculus の方法により $GL_n(A)$ の中で I_n にホモトープとあることがいえる. $GL_n(A)$ のユニタリ元全体の部分群を $U_n(A)$ とし, $U_n(A)$ における I_n の弧状連結成分を $U_n^0(A)$ とすれば, 同形写像 $U_n(A)/U_n^0(A) \cong GL_n(A)/GL_n^0(A)$ が得られ, $K_1(A) = \varinjlim_n (U_n(A)/U_n^0(A))$. ([N] の解説参照.)

§2. $K_i(A)$ の性質

A は Banach algebra, $J \subset A$ を閉両側イデアルとする.

このとき, 連結準同形写像 $\delta^*: K_1(A/J) \rightarrow K_0(J)$ が次のように定義される. はじめ, A が単位的であるとする. $u \in$

$GL_n(A/J)$ に対し $w \in GL_{2n}(A)$ を $u \oplus u' \in GL_{2n}^0(A/J)$ のリフトとする。(存在は例えば [T, 4.8 Proposition] 参照。)

$(u \oplus u')|_n(u \oplus u')^{-1} = |_n$ であるから, $w|_n w' \in M_{2n}(J^+)$ で, その $M_{2n}(J)$ を法とする像は $|_n$. ゆえに $[w|_n w'] - [|_n] \in K_0(J)$.

こゝで $\delta^*([u]) = [w|_n w'] - [|_n]$ と定める。

$\delta^*([u])$ は w, u のとり方によらない。 w' が $u \oplus u'$ の別のリフトならば, $z = w'w^{-1}$ とおくと $z \in GL_{2n}(J^+)$ で,

$$\begin{aligned} [w'|_n w'^{-1}] - [|_n] &= [zw|_n w^{-1}z] - [|_n] \\ &= [w|_n w^{-1}] - [|_n] . \end{aligned}$$

$[u'] = [u]$ ならば, $v = u' u^{-1} \in GL_n^0(A/J)$ とおく。 $a \in GL_n(A)$

を v のリフトとし, $b \in GL_n(A)$ を $u v^{-1} u^{-1}$ のリフトとする。

$$\begin{aligned} u' \oplus u'^{-1} &= uv \oplus v^{-1} u^{-1} \\ &= (u \oplus u')(v \oplus u v^{-1} u^{-1}) \end{aligned}$$

はリフト $w(a \oplus b)$ をもち, $(a \oplus b)|_n(a \oplus b)^{-1} = |_n$.

とくに A と I をヒルベルト空間上の有界作用素全体の C^* -algebra $B(\mathcal{H})$ をとり, $J = K(\mathcal{H})$ をコンパクト作用素全体, u を Galkin algebra A/J のユニタリ元とするとき, u が A の partial isometry v にリフトされるならば, $\delta^*([u]) = [1 - vv^*] - [1 - v^*v] \in K_0(K) = \mathbb{Z}$ となって u の Fredholm index を与える。この意味で δ^* は index map とよばれる。

Banach algebra A が必ずしも単位的でない場合, $A^+/J =$

$(A/J)^+$ であるから $K_1(A/J) = K_1((A/J)^+) = K_1(A^+/J)$ となり, $\delta^*: K_1(A^+/J) \rightarrow K_0(J)$ はそのまま $K_1(A/J) \rightarrow K_0(J)$ を与える。短完全列 $0 \rightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \rightarrow 0$ に対し直接計算により, 完全列

$$K_1(J) \xrightarrow{j_*} K_1(A) \xrightarrow{\pi_*} K_1(A/J) \xrightarrow{\delta^*} K_0(J) \xrightarrow{j_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/J)$$

が得られる。(詳細は例えば [B, §5, §8] 参照。)

Banach algebra A の suspension は,

$$SA = \{f: [0, 1] \rightarrow A \mid \text{連続}, f(0)=f(1)=0\}$$

で, pointwise algebra operations と supnorm により, これは Banach algebra となる。 A の cone は,

$$CA = \{f: [0, 1] \rightarrow A \mid \text{連続}, f(0)=0\}$$

で, これもまた同様に Banach algebra となる。準同形写像

$\lambda: CA \rightarrow A$ を $\lambda(f) = f(1)$ によって定めると短完全列

$0 \rightarrow SA \rightarrow CA \xrightarrow{\lambda} A \rightarrow 0$ が得られる。 $K_i(A)$ $i=0, 1$ の定義における同値関係は弧状連結性によっておきかえられるから $K_i(CA) = 0$ 。したがって K_i に関する上記完全列から,

$$\alpha (= \delta^*): K_1(A) \cong K_0(SA).$$

$\Omega A = C(S^1, A) = \{f: [0, 1] \rightarrow A \mid \text{連続}, f(0)=f(1)\}$ は pointwise operations と supnorm により Banach algebra となり, 準同形写像 $\eta: \Omega A \rightarrow A$ を $\eta(f) = f(1)$ によって定めると分解短完全列 $0 \rightarrow SA \rightarrow \Omega A \xrightarrow{\eta} A \rightarrow 0$ が得られる。したがって分解短完全列

$$0 \rightarrow K_1(SA) \rightarrow K_1(\Omega A) \xrightarrow{\eta^*} K_1(A) \rightarrow 0$$

が対応し, $K_1(SA) = \text{Ker } \eta^*$ となる。 A が単位的であるとき $GL_n(\Omega A) = C(S^1, GL_n(A))$ の元を ループ とよぶ。 $K_1(SA)$ は基点 1 をもつ $GL(A)$ のループのホモトピー同値類とみることができる。

A が必ずしも単位的でない場合, $e \in P(A^+)$ とし, $f_e = ze + (1_n - e) \in GL_n(\Omega(A^+))$ ($z = e^{2\pi i t}$) と定め, これを ループ とよぶ。 $e_1, e_2 \in P_n(A)$ に対し $e_1 \equiv e_2 \pmod{M_n(A)}$ ならば $f = f_{e_1} \cdot f_{e_2}^{-1} \in GL_n(\Omega(A^+))$, $f(1) = 1_n$ 。 $e_1 \sim_{\text{h}} e_2$ (弧状連結) ならば, $GL_n(\Omega(A^+))$ において $f_{e_1} \sim_{\text{h}} f_{e_2}$, $f(1) = 1_n$ する。 反ち基点 1 に関し, ループとしてホモトープ。 f のホモトピー類を $[f]$ とかくと, Bott map $\beta: K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$ が $\beta([e] - [1_n]) = [f_e f_{1_n}^{-1}]$ によって定められる。 このとき

$$\beta: K_0(A) \xrightarrow{\cong} K_1(SA).$$

この同形写像は次の 4 段階に分けて示される: i) ループを Stone-Weierstrass 定理により Laurant 多項式で近似し, ii) 多項式ループのホモトピーを多項式近似する。 ついで iii) 多項式ループを $[A]$ によって線形ループに引きもどし, iv) holomorphic functional calculus によって線形ループのループに引きもどす。

Bott periodicity とよばれるものは結合同形写像

$$\alpha \cdot \beta : K_0(A) \xrightarrow{\cong} K_0(S^2 A),$$

$$\beta \cdot \alpha : K_1(A) \xrightarrow{\cong} K_1(S^2 A)$$

のことである。 $0 \rightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \rightarrow 0$ が完全列ならば、6 項周期完全列

$$K_0(J) \xrightarrow{i^*} K_0(A) \xrightarrow{\pi^*} K_0(A/J)$$

$$\delta^* \uparrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \delta^*$$

$$K_1(A/J) \xleftarrow{\pi^*} K_1(A) \xleftarrow{i^*} K_1(J)$$

が得られる。 ここで $\delta^* : K_0(A/J) \rightarrow K_1(J)$ は結合写像。

$$K_0(A/J) \xrightarrow{\beta} K_1(S(A/J)) \xrightarrow{\delta^*} K_0(SJ) \xrightarrow{\alpha^{-1}} K_1(J).$$

§ 3. $K_0(A)$ における作用素

A が単位的可換 Banach algebra の場合から始める。 A の元の順序のついた n 個の組の複素ベクトル空間 $\otimes A$ においてノルムを

$$\|(a_1, \dots, a_n)\| = \|a_1\| + \dots + \|a_n\|$$

によって定義して得られる Banach 空間を $V^n(A)$ とかく。

$M_n(A)$ は $V^n(A)$ 上の作用素のノルムによって Banach algebra

となる。 $e_n \in M_n(A)$ とするとき、 e_n の i 次テンソル積、

$\otimes e_n : \otimes V^n(A) \rightarrow \otimes V^n(A)$ は n 等作用素であり、その同値

類を $\otimes^i \{e_n\} = \{\otimes^i e_n\}$ とかく。

e_n の i 次交代積 $\wedge^i e_n : \wedge^i V^n(A) \rightarrow \wedge^i V^n(A)$ ($i \leq n$) は $P_n(A)$ の元で, その同値類 $\wedge^i \{e_n\} = \{\wedge^i e_n\}$ が一意的に定まる。同様に i 次対称積 $\vee^i e_n$ は $P_{m+i-1}(A)$ の元で, その同値類 $\vee^i \{e_n\} = \{\vee^i e_n\}$ も一意的に定まる。

$f: A \rightarrow B$ が単位的可換 Banach algebras の準同形写像であるとき, 写像 $f_n: M_n(A) \rightarrow M_n(B)$, $(a_{ij}) \mapsto (f(a_{ij}))$ したがって写像 $f_n^*: P_n(A)/\sim \rightarrow P_n(B)/\sim$ が引き起こされ, $\wedge^i, \vee^i$ に関して自然である。すなわち, $\wedge^i f_n^* = f_n^*(\wedge^i)$, $\vee^i f_n^* = f_n^*(\vee^i)$ 。

写像のテンソル積を " $\cdot$ " で表わすとき, $e, d \in P(A)$ に対して,

- a) $\wedge^0 \{e\} = 1$,
- b) $\wedge^1 \{e\} = \{e\}$,
- c) $\wedge^i (\{e\} \otimes \{d\}) = \sum_{j=0}^i \wedge^j \{e\} \cdot \wedge^{i-j} \{d\}$ 。

標準準同形写像 $\mu: P(A) \rightarrow K_0(A)$ により, $K_0(A)$ における作用素 $\wedge^i$, $i = 0, 1, \dots$ が定まり, $x, y \in K_0(A)$ に対し

- A) $\wedge^0 x = 1$,
- B) $\wedge^1 x = x$,
- C) $\wedge^i (x+y) = \sum_{j=0}^i \wedge^j x \cdot \wedge^{i-j} y$ 。

$\wedge^i$ の自然性から, $\wedge^i: K_0(A) \rightarrow K_0(A)$ は functorial, すなわち図式,

$$K_0(A) \xrightarrow{f^*} K_0(B)$$

$$\wedge^i \downarrow \quad \quad \downarrow \wedge^i$$

$$K_0(A) \xrightarrow{f^*} K_0(B)$$

が可換。 A が必ずしも単位的でない場合、剰余写像 φ :

$$A^+ \rightarrow A^+/A \cong \mathbb{C} \text{ に対し}$$

$$K_0(A^+) \xrightarrow{\varphi^*} K_0(\mathbb{C})$$

$$\wedge^i \downarrow \quad \quad \downarrow \wedge^i$$

$$K_0(A^+) \xrightarrow{\varphi^*} K_0(\mathbb{C})$$

が可換と見る。ゆえに $x \in K_0(A) = \text{Ker } \varphi^*$ ならば、 $\wedge^i x \in K_0(A) = \text{Ker } \varphi^*$ 。

同様の方法により、可換 Banach algebra A に対し自然な対称積 $\times$ 作用素 O^i , $i=0, 1, \dots$ が一意的に定まり、 $x, y \in K_0(A)$ とするとき、

$$A) \quad O^0 x = 1,$$

$$B) \quad O^1 x = x,$$

$$C) \quad O^i(x+y) = \sum_{j=0}^i O^j x \cdot O^{i-j} y.$$

次に A が非可換の場合に移る。有限次元 C^* -algebra は $\vec{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{N}^r$, $\mathbb{N}$ は自然数全体とすると、行列代数の直和

$$M(\vec{p}) = M_{p_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{p_r}(\mathbb{C})$$

の形である。 $M(\vec{q})$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_s)$ を別の有限次元 C^* -

algebra, $\psi: M(\vec{q}) \rightarrow M(\vec{p})$ を準同形写像とすると, ψ はユ=タリ同値を除き

$$\begin{aligned} a_1 \oplus \cdots \oplus a_s &\mapsto (\overbrace{a_1 \oplus \cdots \oplus a_1}^{m_{11}} \oplus \overbrace{a_2 \oplus \cdots \oplus a_2}^{m_{12}} \oplus \cdots \oplus \overbrace{a_s \oplus \cdots \oplus a_s}^{m_{1s}} \oplus 0_{h_1}) \\ &\quad \oplus (\overbrace{a_1 \oplus \cdots \oplus a_1}^{m_{21}} \oplus \cdots \oplus \overbrace{a_s \oplus \cdots \oplus a_s}^{m_{2s}} \oplus 0_{h_2}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \oplus (\overbrace{a_1 \oplus \cdots \oplus a_1}^{m_{r1}} \oplus \cdots \oplus \overbrace{a_s \oplus \cdots \oplus a_s}^{m_{rs}} \oplus 0_{h_r}), \end{aligned}$$

$$a_j \in M(q_j) = M_{q_j}(\mathbb{C}) \quad j=1, \dots, s$$

と表わされる。(E) 参照。) (たがって $\psi = \psi_{(m_{ij})}$ とかくことができる。

$\iota: \mathbb{C}^r \rightarrow M(\vec{p})$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_r)$ を自然な包含写像とすると, 同形写像 $\iota^*: K_0(\mathbb{C}^r) \cong K_0(M(\vec{p}))$ が引き起こされる。ゆえに任意の $x \in K_0(M(\vec{p}))$ に対し ι を外積ベキ, 対称積ベキ作用素が

$$\wedge^i x = \iota^*(\wedge^i(\iota^* \iota x)),$$

$$\odot^i x = \iota^*(\odot^i(\iota^* \iota x))$$

によって定義される。

準同形写像 $\psi = \psi_{(m_{ij})}: M(\vec{q}) \rightarrow M(\vec{p})$ と $1 \leq i < j$ に (m_{ij}) の各行が 1 を高々一つ含み他は 0 となるものだけを考えることにすれば, $\psi^* = (m_{ij}): K_0(M(\vec{q})) = \mathbb{Z}^s \rightarrow K_0(M(\vec{p})) = \mathbb{Z}^r$ は $\wedge^i, \odot^i$ を保存する。このような ψ^* を保存形とよぶことにする。保存形準同形写像の結合は再び保存形となる。

有限次元 C^* -algebras $M(\vec{p}(n))$, $\vec{p}(n) = (p_1(n), \dots, p_{r_n}(n))$
 および保存形準同形写像 $\psi_n: M(\vec{p}(n)) \rightarrow M(\vec{p}(n+1))$ の列

$$(M(\vec{p}(n)), \psi_n): M(\vec{p}(1)) \xrightarrow{\psi_1} M(\vec{p}(2)) \xrightarrow{\psi_2} \dots$$

を考える。これは帰納的系を定め、その極限 $A = \varinjlim_n M(\vec{p}(n))$
 は AF-algebra とよばれるものになる。作用素 Λ'' , O'' は
 係に関して自然であるから、 $K_0(A) = \varinjlim_{\psi_n^*} K(M(\vec{p}(n)))$ におけ
 る $\mathbb{Z}$ -外積 Λ'' , 対称積 O'' が、それぞれ Λ_n'' , O_n'' を
 $K_0(M(\vec{p}(n)))$ の作用素として、

$$\Lambda'' = \varinjlim_{\psi_n^*} \Lambda_n'',$$

$$O'' = \varinjlim_{\psi_n^*} O_n''$$

によって定められる。これらはそれぞれ基本関係式 A),
 B), C) および A'), B'), C') をみたす。

参考文献

- [A] M. F. Atiyah, K-Theory, Benjamin, New York, 1967.
- [B] B. Blackadar, K-Theory for Operator Algebras, Preprints.
- [E] E. Effros, Dimensions and C^* -Algebras, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. no. 46, Amer. Math. Soc., Providence, 1981.

- [M] J. Milnor, Introduction to Algebraic K-Theory, Ann. of Math. Studies 72, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971.
- [N] 中神祥臣, C^* 環とK理論, 京都大学数理解析研究所講究録 488 (1983), 1 - 26.
- [S] C. Soulé, Opérations en K-Théorie algébriques, Canad. J. Math. 37 (1985), 488 - 550.
- [T] J. Taylor, Banach algebras and topology, Algebras in Analysis, ed. J. H. Williamson, Academic Press, New York, 1975, 118 - 186.