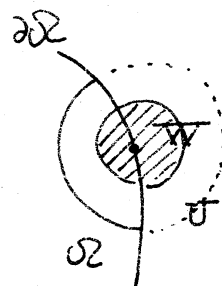


Cauchy-Riemann 多様体上の代数解析 — 偏微分方程式系の正則解の解析接続 —

東大・理 田島慎一

我々は、複素多様体 X 上の偏微分方程式系 m の正則解の解析接続の問題をここで扱います。 Ω が X の open set で境界 $\partial\Omega$ は (実解析的) 実超曲面とします。一つの未知函数 u と一つの偏微分作用素 P に対しては、次の問題を考えていることになります。

$$\begin{cases} u \in \mathcal{O}(\Omega \cap U) \\ Pu = 0 \quad \text{on } \Omega \cap U \end{cases}$$



をみたす u が与えられたとき、 u は P の正則解として (p_0 の近傍で) $\partial\Omega$ を越えて解析接続できるか否か。

Zerner [11] は、境界面が作用素 P に対して非特性的

ならば、上記の解析接続は常に可能であることを示しました。

この結果は、Bony-Schapira [2] によって、佐藤先生の基本定理の別証明に引用されました。又、hyperbolic 方程式の Cauchy 問題が hyperfunction の category では常に解けることの証明においても、複素領域における解析接続の実行が本質的でありました。

一般の方程式系 m の“正則解”の非特性面に対する解析接続については、相原先生の講義録 [3] において（詳しい証明付きで）説明されております。

他方、境界面が方程式に対して特性的な場合は、津野先生が [4] ~ [10] 等において御研究されております。P. Pallu de la Barrière [6] は、単独方程式（非退化な）の正則解の解析接続の問題が、境界面上のある種の楕円方程式系の microfunction 解の消滅の問題と同値であることを示しました。

我々は、P. Pallu de la Barrière の結果を2つの方向で拡張します。

- (1) 一般の線型偏微分方程式系の“正則解”を扱う。
- (2) 実超曲面 M に対する解析接続だけでなく、複素多様体 X の generic な部分多様体 N に対する解析接続を考える。

generic な部分多様体と Cauchy-Riemann 多様体とは同一視できるから、主な結果 (定理 9) を大雑把な言葉で、標語的に表現すれば

偏微分方程式系 m の正則解の解析接続の障碍

II

$C-R$ 多様体上の方程式系 $m_{C-R|Y}$ の microfunction 解

となります。この結果は、相原-河合先生の楕円型方程式系の境界値問題の研究 [5] と密接な関係があります。実際我々の結果は、generic な部分多様体に対する境界値問題と理解すれば、相原-河合先生の御結果を精密化したものと考えられます。

§1. 接続問題の microlocal な解釈

記号: $\mathcal{D}_X$ により X 上の正則函数を係数とする正則な偏微分作用素全体からなる R_X の作る環を表わしましょう。更に

m : coherent $\mathcal{D}_X$ -module。

$\mathcal{O}_X$: X 上の正則函数のなる R_X

$\mathcal{U}$: X の open set。 $j: \mathcal{U} \hookrightarrow X$: 自然なうめ込み。

$$F = X - \Omega. \quad \partial\Omega = N. \quad p_0 \in N.$$

$N_+ : \partial\Omega$ における外向きの余接方向 in $S_N^* X$.

$\pi : (X - N) \sqcup S_N^* X \rightarrow X$ 自然な射影.

方程式系 m の正則解 $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{M}_X}(m, \mathcal{O}_X)$ を γ とおけば

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_F^0(\gamma) \rightarrow \gamma \rightarrow j_* (j^{-1} \gamma) \rightarrow \mathcal{H}_F^1(\gamma) \rightarrow 0 \quad \text{完全}$$

$$0 \rightarrow R^k j_* (j^{-1} \gamma) \rightarrow \mathcal{H}_F^{k+1}(\gamma) \rightarrow 0 \quad \text{完全}$$

を得ます。解析接続の一意性により $\mathcal{H}_F^0(\gamma)|_N = 0$ が成立

するから。 N 上で次を得ます。

$$0 \rightarrow \gamma|_N \rightarrow j_* (j^{-1} \gamma)|_N \rightarrow \mathcal{H}_F^1(\gamma)|_N \rightarrow 0 \quad \text{完全}$$

$$0 \rightarrow R^k j_* (j^{-1} \gamma) \rightarrow \mathcal{H}_F^{k+1}(\gamma) \rightarrow 0 \quad k \geq 1. \quad \text{完全}$$

他方, comonoidal transformation を使えば

$$\pi_* \left\{ \mathcal{H}_{S_N^* X}^k (\pi^{-1} \gamma)^a |_{N_+} \right\} = \mathcal{H}_F^k(\gamma)|_N$$

が成り立つことがわかるので p_0 の近傍における Ω 上の
正則解 $j_* (j^{-1} \gamma)_{p_0}$ が $\partial\Omega$ を越えて γ_{p_0} の section に接続
できる必要充分条件は

$$\mathcal{H}_F^1(\gamma)|_N = \pi_* \left\{ \mathcal{H}_{S_N^* X}^1 (\pi^{-1} \gamma)^a |_{N_+} \right\}$$

が消滅することにはなりません。

方程式系に対しては、正則解 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(m, \mathcal{O}_X)$ のみではなく $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^i(m, \mathcal{O}_X)$ も同時に扱った方がより自然なので、以後方程式系 m の (derived category における) 正則解として $R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(m, \mathcal{O}_X)$ を考えます。 N を複素多様体 X の部分多様体とし、 $\pi \in (X-N) \sqcup S_N^* X$ から X への射影とすれば、一般化した正則解の解析接続の obstruction は

$$R\pi_{S_N^* X}(\pi^! R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(m, \mathcal{O}_X)^a)$$

と理解するのが自然です。(S-K-K, Chap 1, Prop. 1.2.3)

以後、我々は、接方程式系の理論を使って、

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(m, \mathcal{O}_X)|_N$$

$$R\pi_N R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(m, \mathcal{O}_X)$$

$$R\pi_{S_N^* X}(\pi^! R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(m, \mathcal{O}_X)^a)$$

を計算することを目標とします。この際、部分多様体 N が generic という条件が必然的であり、しかも証明結果、応用すべてにわたって重要な役割をはたしていることを、あらかじめ注意しておきたいと思います。

§2. 主定理の紹介.

複素多様体 X を実解析的多様体とみなしたものを $X_{\mathbb{R}}$ とします。 X は $X_{\mathbb{R}}$ 上に Cauchy-Riemann 方程式系 $\bar{\partial}u = 0$ をつけ加えたものと理解できます。このことを方程式系の言葉で表現してみましょう。

複素多様体 X 上の自明な方程式系 $\mathcal{D}_X$ を考えれば、明らかに

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X$$

を得ます。他方、実多様体 $X_{\mathbb{R}}$ の複素化を $X_{\mathbb{C}}$ で表せば、 $X_{\mathbb{R}}$ 上の Cauchy-Riemann 方程式系は $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}$ で表れる) coherent $\mathcal{D}_{X_{\mathbb{C}}}$ -module と理解され、しかも

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{C}}}}(\mathcal{D}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}, B_{X_{\mathbb{R}}}) = \mathcal{O}_X$$

がなりたちます。ここに $B_{X_{\mathbb{R}}}$ は実多様体 $X_{\mathbb{R}}$ 上の超函数のなす $\mathcal{R}$ としました。

今、 $\bar{X}$ により X の複素共役空間を表わすとし、 $X_{\mathbb{R}} \subset X \times \bar{X}$ の対角線集合と同一視すれば、 $X \times \bar{X}$ は $X_{\mathbb{R}}$ の複素化となります。 τ を $X \times \bar{X}$ から X への自然な射影とすれば

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}} = \tau^*(\mathcal{D}_X) = \mathcal{D}_{X \times \bar{X} \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X$$

がなりたちます。そこで

定義 1. Coherent $\mathcal{D}_X$ -module m に対して

$$m_{C-R} \stackrel{\text{def}}{=} \tau^* m = \mathcal{D}_{X \times \bar{X} \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X} m \quad \text{とおく。}$$

命題 2. (相対)

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}} (m_{C-R}, B_{X/R}) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} (m, \mathcal{O}_X).$$

がなりたつので 複素多様体 X 上の方程式系 m の正則解の問題は、方程式系 m_{C-R} を導入することによって、実多様体 $X_{\mathbb{R}}$ 上の超函数解の問題に帰着されるわけです。

まづ、Cauchy-Riemann 系 $\mathcal{D}_{C-R}$ に対して非特性的な部分多様体 N を特徴付けましょう。

$\dim_{\mathbb{C}} X = m$, $\dim_{\mathbb{R}} N = n$ とおきます。複素多様体 X の実部分多様体 N が局所的に、実数値をとる実解析的函数 $f_1, f_2, \dots, f_{2m-n}$ に依って

$$N = \{ f_1 = f_2 = \dots = f_{2m-n} = 0 \}$$

$$df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_{2m-n} \neq 0 \quad \text{on } N$$

が与えられているとき

定義 3. N が X の generic な部分多様体とは、次の条件

がみたされることをいう。

$$\partial f_1 \wedge \partial f_2 \wedge \cdots \wedge \partial f_{2m-m} \neq 0 \quad \text{on } N$$

特に全ての実超曲面は generic です。又、 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^{m-k}$ は $\mathbb{C}^m$ で generic です。逆に、真の複素部分多様体は generic になりません。

部分多様体 N の $X \times \bar{X}$ 内での複素化を Y とすれば、次の定理を得ます。

定理4. Y が Cauchy-Riemann 系 $\mathcal{D}_{C-R}$ に対して (N の近傍で) $S-K-K$ の意味で非特性的な必要系分条件は、 N が X の generic 部分多様体となることである。

系5. m は任意の coherent $\mathcal{D}_X$ -module とする。すると Y は方程式系 m_{C-R} に対して (N の近傍で) $S-K-K$ の意味で非特性的である。

系6. m_{C-R} の Y への接方程式系 $m_{C-R}|_Y$ であらば

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(m_{C-R}|_Y, B_N)[- \text{codim}_X N] \\ = \mathbb{R} \Gamma_N \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(m, \mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N|X} \end{aligned}$$

が成立します。

さて、我々の目的は、系6の結果を microlocal 化することにあるわけですが、その為には、方程式系 $m_{(-R|Y}$ を別の角度から理解しなおすことが大切になります。

G. Tomassini [8] や A. Andreotti - G. A. Fredricks [1] によって示された結果より次を得ます。

命題7. N が X の generic な部分多様体で、 Y は $X \times \bar{X}$ における N の複素化とする。

$\varphi_c \in Y$ の $X \times \bar{X}$ へのうめこみとし、
 $\tau \in X \times \bar{X}$ から X への射影とすれば、
 $\varphi = \tau \circ \varphi_c$ は N に制限すれば、
 N の X へのうめこみと一致し、しかも
 $\varphi: Y \rightarrow X$ は submersion である。

この結果は我々にとって非常に重要で、次の命題が直ちに得られます。

命題8. m を coherent $\mathcal{D}_X$ -module とする。次が成り立つ。(generic 部分多様体 N に対しては)

$$(1) \quad m_{(-R|Y)} = \varphi^* m$$

$$(2) \quad SS(m_{(-R|Y)}) = \varphi^*(SS(m)) = SS(m) \times_X Y$$

$$(3) \quad SS(m_{(-R|Y)}) \cap T_N^* Y = \varphi^*(SS(m) \cap T_N^* X)$$

次の主定理は $\varphi: Y \rightarrow X$ が submersion であることから導かれる。

主定理 9 $m \in$ 複素多様体 X 上の coherent $\mathcal{D}_X$ -module, $N \in X$ の generic 部分多様体. Y は N の $X \times \overline{X}$ における複素化とする. このとき次の quasi-isomorphisms が成立する。

$$(1) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(m_{(-R|Y)}, A_N) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(m, \mathcal{O}_X)|_N$$

$$(2) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(m_{(-R|Y)}, B_N)[-codim_X N] \\ = R\pi_N R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(m, \mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N|X}$$

$$(3) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(m_{(-R|Y)}, C_N)[-codim_X N] \\ = R\pi_{S_N^* X} (\pi_{N|X}^{-1} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(m, \mathcal{O}_X)^{\otimes 2}) \otimes \omega_{N|X}$$

ただし A_N, B_N, C_N はそれぞれ N 上の実解析関数, hyperfunction, 及び $S_N^* Y$ 上の microfunction のための $\mathcal{F}_Y$ を表わします。

§3 主定理の意味

この節では、いくつかの例を述べて、主定理の意味を明らかにしたいと思います。

まず、複素多様体 X が実部分多様体 M の複素化の場合を考えます。すべての coherent $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}|_M = \mathcal{M}$ が成り立つので

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, A_M) = R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_M$$

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, B_M) = R\pi_M R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X}[\dim M]$$

$$R\mathrm{Hom}_{S_M^* X}(\mathcal{M}, C_M) = R\pi_{S_M^* X}(\pi^{-1} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)^2) \otimes \omega_{M|X}[\dim M]$$

を再発見します。実領域 M における“解析”が複素領域 X における、 M に対する解析接続の問題と同等であることを、これらの式は示しています。これは S-K-K の基本的思想の一つにはかたまりません。相原-河合先生も [] で注意されておりますが、ここで $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ とおけば

$$A_M = \mathcal{O}_X|_M$$

$$B_M = R\pi_M(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X}[\dim M]$$

$$C_M = R\pi_{S_M^* X}(\pi^{-1} \mathcal{O}_X)^2 \otimes \omega_{M|X}[\dim M]$$

となり、 A_M, B_M, C_M の定義を再び得るわけですね。

さて今度は、部分多様体 N は一般の generic な部分多様体とし、方程式系 m が自明な場合、つまり $m = \mathcal{O}_X$ のときを考えよう。

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{C-R|Y}, A_N) = \mathcal{O}_X|_N$$

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{C-R|Y}, B_N) = \mathbb{R}\pi_N(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N|X} [+ \mathrm{codim} N]$$

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{C-R|Y}, C_N) = \mathbb{R}\pi_{S_N^*X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)^{\otimes 2} \otimes \omega_{N|X} [+ \mathrm{codim} N]$$

となります。 $\mathcal{O}_{C-R|Y}$ は 接 Cauchy-Riemann 方程式系にはなりません。

上記の結果を方程式系 m に拡張したのが、主定理の意味するところと理解できます。

以上のことより、複素多様体 X の上に方程式系 m が与えられたとき

(1) 実領域 M 上で m の "解" を決定する問題。

や

(2) m の正則解の実起曲面に対する古典的解析接続の問題。

が本質的に同じ type の問題であることが明らかにされたと思います。

実際、代数解析の非常に多くの重要な結果が、複素領域における正則解・解析接続の研究から得られています。逆に考えて、正則解の解析接続という古典的問題を、実領域における解析の助けをかりて研究することも可能です。

証明、応用等については〔7〕を御覧ください。

1. Andreotti, A et G.A. Fredricks : Embeddability of real analytic Cauchy-Riemann manifold; *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 6 (1971) pp. 285-304.
2. Bony, J.M. et P. Schapira : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, *Inventiones Math.*, 17 (1972) pp. 95-105
3. 相原正樹 : Systèmes d'équations micro-différentielles. *Univ. Paris-Nord.* (1978).
4. Kashiwara, M. et T. Kawai : On the boundary value problem for elliptic systems of linear differential operators. I. II. *Proc. Japan. Acad.* 48 (1972), pp. 712-715, *ibid* 49 (1973), pp. 164-168.
5. 相原正樹, 河合隆裕 : 楕円型境界値問題の理論とその応用. *数理科学講究録* 238 (1975) pp. 1-59

6. Pallu de la Barrière, P. : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, J. Math. Pures et Appl. 55 (1976) pp. 21-46.
7. Tajima, S. : Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problèmes du prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. à paraître.
8. Tomassini, G. : Tracce delle Funzioni oloomorfe sulle sotto-varietà analitiche reali d'una varietà complessa. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 20 (1966) pp. 31-43.
9. Tsuno, Y. : On the continuations of holomorphic solutions of characteristic differential equations. J. Math. Soc. Japan. 26 (1974). pp. 523-548.
10. Tsuno, Y. : Holomorphic continuation of solutions of partial differential equations across the multiple characteristic surface. J. Math. Soc. Japan 32 (1980), pp. 285-299.
11. Zerner, M. : Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles. (C. R. Acad. Sci. Paris. 272 (1971), pp. 1646-1648