

有界な解の初期値の存在領域と

リアプノフ関数

岩手大 教育 日野 義之

次の方程式を考える.

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

ここで $f: I \times R^n \rightarrow R^n$, $I = [0, \infty)$, は連続である. (1) のすべての解が共通にある種の type の有界性をもつときに, それをリアプノフ関数で characterize する: とは Yoshizawa の一連の研究によって良く知られている. ここで (1) の有界な解だけを有するとは限らないときに, 有界な解とそうでない解たちの初期値の存在する領域をリアプノフ関数を用いて調べる:

(1) の (t_0, x_0) を通る解を $x(t, t_0, x_0)$ とし, 最初是有界性に関する定義を述べる.

定義 I. (1) の解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ が

$$(i) \quad \text{有界} \iff \exists \beta(t_0, x_0) > 0 \ni \|x(t)\| < \beta(t_0, x_0) \text{ for all } t \geq t_0,$$

$$(ii) \quad S \subset I \times R^n \text{ に關して equi-bounded} \iff \forall t_0 \in I, \forall K \subset S(t_0), \\ \text{compact, } \exists \beta(t_0, K) > 0 \ni \text{if } x_0 \in K, \text{ then } \|x(t)\| < \beta(t_0, K) \text{ for}$$

all $t \geq t_0$, $\therefore S(t_0)^+$ は S の t_0 における section の内点である.

(iii) $S \subset I \times R^n$ に関し $\text{uniform bounded} \iff \forall T \in I, \forall K \subset \bigcap_{T \leq t < \infty} S(t)^+$,
compact, $\exists \beta(T, K) > 0 \Rightarrow$ if $x_0 \in K, t_0 \geq T$, then $\|x(t)\| < \beta(T, K)$
for all $t \geq t_0$.

注意 1. 定義 1 の (ii) と (iii) により $S \equiv I \times R^n$ とすればそれはそれぞれは夫々通常の *equi-bounded*, *uniform bounded* の定義 ([1], [2] を参照) と一致する.

リアノフ関数 $v(t, x, t_0, x_0)$ とし, $I \times R^n \times I \times R^n$ 上で定義された連続スカラー関数で, x に関し *locally lipschitzian* であるものとする. このとき次のことが良く知られている ([2] を参照), 可なり

$$\begin{aligned} v'_{(1)}(t, x, t_0, x_0) &= \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \{ v(t+h, x+hf(t, x), t_0, x_0) - v(t, x, t_0, x_0) \} \\ &= \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \{ v(t+h, x(t+h), t_0, x_0) - v(t, x, t_0, x_0) \} \\ &= v'(t, x(t), t_0, x_0). \end{aligned}$$

上で与えられたリアノフ関数 $v(t, x, t_0, x_0)$ に対し次の定義を与える.

定義 2.

Property A $\iff v(t_0, x_0, t_0, x_0) = 0$ for every $(t_0, x_0) \in I \times R^n$,

Property B $\iff v'_{(1)}(t, x, t_0, x_0) \leq 0$ on $I \times R^n \times I \times R^n$,

Property C $\iff v(t, x, t_0, x_0)$ は $\|x_0\|$ の関数で $\|x_0\|$ に関し非増加,

Property D $\iff v(t, x, t_0, x_0)$ は t_0 に関し非減少.

定義 3. $I \times R^n$ の部分集合 $\Omega_i, i=1, 2$, を次のように定義する.

$$\Omega_1 = \{ (t_0, x_0) ; \sup_{t > t_0} \inf_x v(t, x, t_0, x_0) > 0 \},$$

$$\Omega_2 = \{ (t_0, x_0) ; \sup_{\substack{\alpha > \|x_0\| \\ \|x\| = \alpha \\ t \geq t_0}} \inf v(t, x, t_0, x_0) > 0 \}.$$

次の定理は良く知られており, それで定理 1 と 2 の証明の際に用いられる.

定理 0. もし (1) の解 $x(t, t_0, x_0) = x(t)$ が, $x(t)$ が存在する限り定数 $\beta, \beta < \infty$, によって strictly bounded なさば, $x(t)$ は任意の t まで延長可能である.

定理 1. $I \times R^n \times I \times R^n$ 上で定義されたリアプノフ関数 $v(t, x, t_0, x_0)$ が存在して Property A と B をもつとする. この時次が成り立つ.

(i) Ω_1 を出発する (1) のすべての解は finite escape time をもつ,

(ii) Ω_2 を出発する (1) のすべての解は有界.

証明. (i) の証明. $x_0 \in \Omega_1(t_0)$ とし $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ は in the future に存在する (1) の解とする, $\therefore \exists \varepsilon > 0, \Omega_1(t_0)$ は Ω_1 の t_0

における section である. このとき, $\exists t^* > t_0 \exists \inf_x v(t^*, x, t_0, x_0) > 0$. 従って

$$(2) \quad v(t^*, x(t^*), t_0, x_0) > 0.$$

一方 Property A と B より

$$v(t^*, x(t^*), t_0, x_0) \leq v(t_0, x_0, t_0, x_0) = 0,$$

: これは (2) に矛盾. 従って (i) が証明された.

(ii) の証明. $x_0 \in \Omega_2(t_0)$ とする. このとき $\exists \beta = \beta(t_0, x_0) > \|x_0\| \exists \inf_{t \geq t_0} v(t, x, t_0, x_0) > 0$ for $\|x\| = \beta$. 従って, $\forall t \geq t_0, \forall x, \|x\| = \beta$, に対して

$$(3) \quad v(t, x, t_0, x_0) > 0.$$

今 $x(t) = x(t, t_0, x_0) \in (1)$ の解とし, かつ $\exists t_1 \geq t_0 \Rightarrow \|x(t_1)\| = \beta$ とする. このとき (3) より

$$(4) \quad v(t_1, x(t_1), t_0, x_0) > 0.$$

一方 Property A と B より

$$v(t_1, x(t_1), t_0, x_0) \leq v(t_0, x_0, t_0, x_0) = 0,$$

: これは (4) に矛盾. 従って定理のより $x(t)$ は有界である.

定理 2. $I \times R^n \times I \times R^n$ 上で定義されたリアプノフ関数

$v(t, x, t_0, x_0)$ が存在して Property A, B そして C をもつ. このとき次が成り立つ.

(i) (1) の解は Ω_2 に関して equi-bounded,

更に Property D を満足すると

(ii) $\Omega_2(t)$ は t に関して非減少でありかつ (i) の解は Ω_2 に関して *uniform bounded*.

証明. (i) の証明. 任意な compact set $K \subset \Omega_2(t_0)$ とする. 更に K 内の $\|x\|$ に関する maximal element のうちの一つを取り出しそれを x^* とする. このとき $\exists \beta = \beta(t_0, x^*) > \|x^*\|$

$\inf_{t \geq t_0} v(t, x, t_0, x^*) > 0$, for $\|x\| = \beta$. 次は任意な $x_0 \in K$ を取り x^* の取り方より $\|x^*\| \geq \|x_0\|$, 故に Property C より

$$\inf_{t \geq t_0} v(t, x, t_0, x_0) \geq \inf_{t \geq t_0} v(t, x, t_0, x^*) > 0$$

for $\|x\| = \beta$. 従って $\beta(t_0, K) \equiv \beta(t_0, x^*)$ とおけば残りの証明は定理 I の (ii) の後半の証明と同じである.

(ii) の証明. $\Omega_2(t)$ が t に関して非減少である: とは次のようにして容易にわかる. すなわち, $t_1 > t_0$, $x_0 \in \Omega_2(t_0)$ とすると, Property D より

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha > \|x_0\|} \inf_{\substack{\|x\| = \alpha \\ t \geq t_1}} v(t, x, t_1, x_0) &\geq \sup_{\alpha > \|x_0\|} \inf_{\substack{\|x\| = \alpha \\ t \geq t_0}} v(t, x, t_1, x_0) \\ &\geq \sup_{\alpha > \|x_0\|} \inf_{\substack{\|x\| = \alpha \\ t \geq t_0}} v(t, x, t_0, x_0) \\ &> 0. \end{aligned}$$

従って $x_0 \in \Omega_2(t_1)$.

任意な $T \in I$, 任意な compact set $K \subset \Omega_2(T)$ を取る. このとき上で述べたことより $K \subset \bigcap_{t \leq T} \Omega_2(t)$, 又 (i) で証明されたよう

に $\exists \beta = \beta(T, K) > \max_{x \in K} \|x\| \ni \inf_{t \geq T} v(t, x, T, x_0) > 0$ for $x_0 \in K, \|x\| =$

β . 又 $\forall t_0 \geq T$ に對し, 再び Property D より

$$\inf_{t \geq t_0} v(t, x, t_0, x_0) \geq \inf_{t \geq T} v(t, x, t_0, x_0) \geq \inf_{t \geq T} v(t, x, T, x_0) > 0$$

for $x_0 \in K, \|x\| = \beta$. 従つて残りの証明は定理 1 の (ii) の後半の証明と同じである.

例. 方程式 (1) において次を仮定する.

$$(5) \quad \|f(t, x)\| \leq \lambda(t) \varphi(\|x\|),$$

ここで $\lambda(t), \varphi(r)$ は夫々連続関数でありかつ $\lambda(t) > 0$ on I ,

$\varphi(r) > 0$ for $r > 0$ として次を満す,

$$(6) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^\infty \frac{1}{\varphi(u)} du > \int_0^\infty \lambda(s) ds,$$

そして

(7) $\varphi(r)$ は r に関して非減少.

(6) より, $\exists x^* \in \mathbb{R}^n \ni \int_{\|x^*\|}^\infty \frac{1}{\varphi(u)} du > \int_0^\infty \lambda(s) ds$. このような x^* を一つ取り fix して次のような $\varphi^*(s)$ を定義する.

$$(8) \quad \varphi^*(s) = \begin{cases} \varphi(s), & s \geq \|x^*\|, \\ \varphi(\|x^*\|), & \|x^*\| > s \geq 0. \end{cases}$$

今

$$v(t, x, t_0, x_0) = \int_{\|x_0\|}^{\|x\|} \frac{1}{\varphi^*(u)} du - \int_{t_0}^t \lambda(s) ds$$

とおく. このとき φ^* の作り方より $v(t, x, t_0, x_0)$ は $I \times R^n, I \times R^n$ 上連続. 又明らかに x に関して *locally Lipschitzian* で Property A, C かつ D をもつ. (7) と (8) より $\varphi(s) \leq \varphi^*(s)$ for all $s \geq 0$ であるから, (5) を用いて

$$\begin{aligned} v'_{(1)}(t, x, t_0, x_0) &\leq \frac{\lambda(t)\varphi(\|x\|)}{\varphi^*(\|x\|)} - \lambda(t) \\ &\leq \lambda(t) \left\{ \frac{\varphi(\|x\|)}{\varphi^*(\|x\|)} - 1 \right\} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

従って Property B をもつ. 一方 (6) より

$$\Omega_2 = \{(t_0, x_0); \int_{\|x_0\|}^{\infty} \frac{1}{\varphi^*(u)} du - \int_{t_0}^{\infty} \lambda(s) ds > 0\} \neq \emptyset.$$

従って定理 2 の (ii) より (1) の解は Ω_2 に関して *uniform bounded* である.

注意 2. 条件 (6) の代り $\int_0^{\infty} \lambda(s) ds < \infty, \int_R^{\infty} \frac{1}{\varphi(u)} du = \infty,$

$R > 0$, ならば (1) の解が通常 α *uniform bounded* であることは良く知られてゐる ([2] を参照).

次にスカラー方程式との比較定理について考える. $I \times \mathbb{R}^n$ 上で定義された通常のリアプノフ関数 $V(t, x)$ に対して次の定義を与える.

定義 4.

Property E $\iff V(t, x) \geq a(\|x\|)$, $a(r)$ は連続, 増加関数で
 $a(r) \rightarrow \infty$ as $r \rightarrow \infty$,

Property F $\iff V(t, x) \geq 0$ on $I \times \mathbb{R}^n$, $V(t, 0) = 0$,

Property G $\iff V(t, x)$ は t に関して非増加.

次の方程式を考える.

$$(9) \quad u' = f(t, u),$$

ここで $f(t, u): I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, は連続. そして

$f(t, 0) = 0$ で (9) の 0-解は *unique* とする. また $u(t, t_0, u_0)$

を初期点 (t_0, u_0) をもつ (9) の解とする. 以後, 取り扱うリアプノフ関数 $v(t, x, t_0, x_0)$ は $I \times \mathbb{R}^1 \times I \times \mathbb{R}^1$ 上で定義されたものとする. 次の定理は良く知られている (例えば [3]).

定理 3. $I \times \mathbb{R}^n$ 上で定義されたリアプノフ関数 $V(t, x)$ が存在して Property F をもち

$$(10) \quad V_{u_0}(t, x) \leq f(t, V(t, x))$$

を満たす. $r(t) = r(t, t_0, u_0)$, $u_0 \geq 0$, と $t \geq t_0$ に対して存在する (9) の最大解とする. もし $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ が, $V(t_0, x_0) \leq u_0$ を満たし $t \geq t_0$ に対して存在する (1) の解ならば, すべての

$t \geq t_0$ に対して

$$V(t, x(t)) \leq r(t)$$

が成り立つ.

上の定理を用いて次を得る.

定理 4. $I \times R' \times I \times R'$ 上で定義されたリアプノフ関数

$v(t, u, t_0, u_0)$ が存在して property A, B と C をもち, $I \times R^n$ 上で定義されたリアプノフ関数 $V(t, x)$ が存在して property E と F をもち, 更に (10) が満たされる. このとき

$$\Omega_3 = \{(t, x_0); \sup_{u > V(t_0, x_0)} \inf_{t \geq t_0} v(t, u, t_0, V(t_0, x_0)) > 0\}$$

と置くと次の成り立つ.

(i) (1) の解は Ω_3 に関して *equi-bounded*,

更に property D と G を仮定すると,

(ii) $\Omega_3(t)$ は t に関して非減少であり, かつ (1) の解は Ω_3 に関して *uniform-bounded*.

証明. (i) の証明. 任意な $t_0 \in I$, 任意な compact set

$K \subset \Omega_3(t_0)^i$ を取る. $x_0 \in K$ とあると明らかに $V(t_0, x_0) \in \Omega_2(t_0)^i$.

$K^* = \{V(t_0, x_0); x_0 \in K\}$ とおくと $V(t, x)$ の連続性と K の

compact 性より, K^* は compact かつ $K^* \subset \Omega_2(t_0)^i$. 従って定理

2 の (i) より $u(t, t_0, V(t_0, x_0))$ と $(t_0, V(t_0, x_0))$ を通る (9) の最大

解とすると, $\exists \beta = \beta(t_0, K^*) > \max_{u \in K^*} \|u\| \geq$

$$(11) \quad u(t, t_0, V(t_0, x_0)) < \beta \quad \text{for all } t \geq t_0.$$

$Q(Y)$ の性質より $\exists L = L(t_0, K) > 0 \Rightarrow Q(L) \geq \beta$. γ 定理より

$$(12) \quad V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq u(t, t_0, V(t_0, x_0)).$$

今 $\exists t_1 > t_0 \Rightarrow \|x(t_1)\| = L$ とする. このとき (11) と (12) と

Property E より

$$Q(L) \leq V(t_1, x(t_1)) \leq u(t_1, t_0, V(t_0, x_0)) < \beta \leq Q(L),$$

$\therefore$ これは矛盾. 従って結論がえられる.

(ii) の証明. 最初に $\Omega_3(t)$ が t に関して非減少であること
を示す. 今 $x_0 \in \Omega_3(t_0)$ とし, $\forall t_1 > t_0$ を取る. Property G より

$$(13) \quad V(t_1, x_0) \leq V(t_0, x_0).$$

Property C と (13) より

$$(14) \quad v(t, u, t_1, V(t_1, x_0)) \geq v(t, u, t_0, V(t_0, x_0)).$$

従って Property D と (14) より

$$\begin{aligned} & \sup_{u > V(t_1, x_0)} \inf_{t \geq t_1} v(t, u, t_1, V(t_1, x_0)) \\ & \geq \sup_{u > V(t_0, x_0)} \inf_{t \geq t_0} v(t, u, t_0, V(t_0, x_0)) \\ & \geq 0. \end{aligned}$$

従って $\Omega_3(t)$ は非減少である.

$\forall T \in I, \forall$ compact set $K \subset \Omega_3(T)^i$ を取ると, 上のことより
 $K \subset \bigcap_{T \leq t < \infty} \Omega_3(t)^i$. $\forall x_0 \in K$ を取ると明らかに $V(t, x_0) \in \Omega_3(t)^i$.
 $t \geq T$. 今 $K^* = \{V(T, x_0), x_0 \in K\}$ とおくと K^* は compact で
 $K^* \subset \bigcap_{T \leq t < \infty} \Omega_3(t)$. 従って定理 2 の (ii) より $\forall t_0 \geq T$ に対しても

$u(t, t_0, V(t_0, x_0)) \neq (t_0, V(t_0, x_0))$ を通る (9) の最大解と可 $\circ$

$$t, \quad \exists \beta = \beta(T, K) \geq \sup_{u \in K^*} \|u\| \geq$$

$$u(t, t_0, V(t_0, x_0)) < \beta \quad \text{for all } t \geq t_0.$$

従って残りの部分は定理 4 の (i) と同じく証明できる。

参考文献

- [1] T. Yoshizawa, Liapunov's function and boundedness of solutions, Funkcialaj Ekvacioj, 2 (1959), 71-103.
- [2] T. Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's second method, Mathematical society of Japan, 1966.
- [3] V. Lakshmikantham and S. Leela, Differential and integral inequalities, Academic Press, 1969.