

Moore graphs について

東大 理 伊藤 達郎

東大 理 坂内 英一

有限 Moore graphs の分類がこの講演の目標であり、これについて以下のような解決を得たので報告します。

1° グラフ G が Moore graph of type (d, k) であるとは、次の条件 1) ~ 4) が成り立つことと定義する。

1) G は undirected graph (i.e., グラフの lines は方向を持たない。)

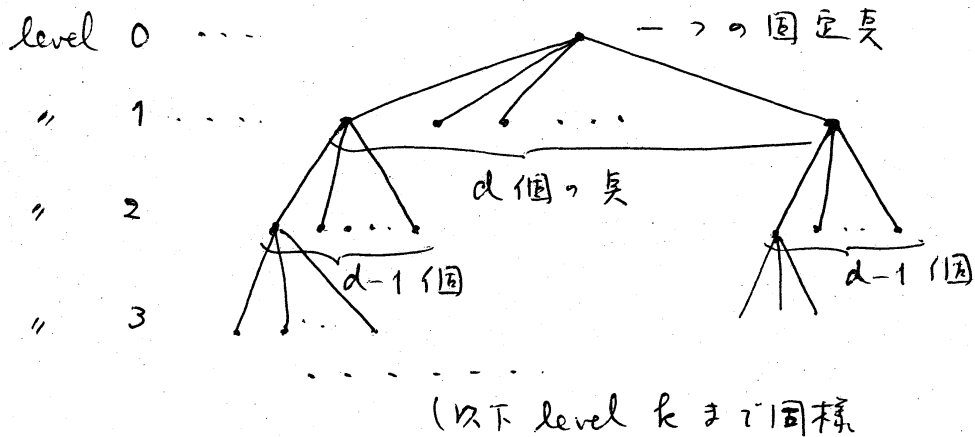
2) G は regular で valence (= degree) が d (i.e., 各頂から出る lines の個数は一定 = d)。

3) G の diameter は k (i.e., G の任意の 2 頂は高々 k 本の lines を通じて結ぶことが出来、更に G の 2 頂 i, j ($k-1$) 本以下の lines では結ばないようなものが存在する。)

4) G は $1 + d \sum_{r=1}^k (d-1)^{r-1}$ ($= n(d, k) = n$ とおく) 個の頂を持つ。

注: $n(d, k)$ は 1), 2), 3) の条件を満たす 点の個数としての可能な最大値である。

注: G が Moore graph であれば、 G の 点 を任意に一つ固定した時、次のように表わされる。



注: valence $d = 2$ の Moore graph は多角形であり、このようなものは任意の diameter k に対して存在する。以下のようなものを trivial な Moore graph と呼ぶ。以下では non-trivial な Moore graph のみを考える。

2° 一般にどのような Moore graph が存在するかは未解決であると思われる。

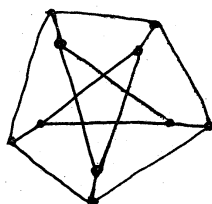
diameter k が 2 と 3 の場合については、A. J. Hoffman and R. R. Singleton: On Moore graphs with diameters 2 and 3, I.B.M. J. Res. Develop. 4 (1960), 497-504. により次の形でほぼ解決されている。

I. $k=2$ の場合.

1) $d > 2, d \neq 3, 7, 57 \Rightarrow (d, 2)$ 型 Moore graph は存在しない.

2) $(3, 2)$ 型 Moore graph は一意的に存在する.

i.e.,



$(3, 2)$ 型 Moore graph
(Peterson graph)

3) $(7, 2)$ 型 Moore graph は一意的に存在する.

4) $(57, 2)$ 型 Moore graph に関しては, 存在一意性は未定.

II. $k=3$ の時.

$d > 2 \Rightarrow (d, 3)$ 型 Moore graph は存在しない.

3° 我々の得た結果は次の通りである.

定理 $k \geq 4$ の non-trivial (i.e., $d > 2$) Moore graph は存在しない.

系 rank $k+1$, subdegree $1, d, d(d-1), \dots, d(d-1)^{k-1}$ なる ~~primitive permutation group~~ primitive permutation group (G, Ω) は, $k \geq 4$ ならば, $|\Omega| = 2k+1$ 文字上に働く. 位

数 $2(2k+1)$ の 2 面体群に限る. ここで $2k+1$ は素数.

定理の証明の概略 基本的な idea は次の 2 論文 (及び

先に引用した Hoffman-Singleton の論文) による.

- W. Feit and G. Higman: The non-existence of certain generalized polygons, J. of Algebra 1 (1964), 114-131.
- D. G. Higman: Intersection matrices for finite permutation groups, J. of Algebra 6 (1967), 22-42.

更に次の事実が我々の証明の基礎になっている.

- グラフの incidence matrix A の固有値の固有空間の次元 (即ち Galois 群の作用による) が固有値の (A における) multiplicity を保つことから, A の minimal polynomial の因数分解 ($\mathbb{Z}[x]$ における) の様子がわかり, このことが Moore graph の存在と矛盾するようになる.

もう少し詳しく証明の steps を述べて述べる. (以下

(d, k) 型 Moore graph の存在を仮定し, A とする incidence matrix とする.)

- 1) A の minimal polynomial は $(x-k)F_k(x)$ である. ここで $F_k(x)$ は $F_0(x)=1$, $F_1(x)=x+1$, $F_{i+1}(x)=x F_i(x) - (d-1)F_{i-1}(x)$ で inductive に定義される k 次多項式である.
- 2) $d-1=s^2$, $s>0$, $x=2s \cos \varphi$ とおくと.

$$F_k(x) = \frac{s^k}{\sin \varphi} \left\{ \sin(k+1)\varphi + \frac{1}{s} \sin k\varphi \right\}$$

3) $\theta_0 = d, \theta_1, \dots, \theta_k$ (これらは全て実の単根) $\in A$ の固有値とすると θ_i の multiplicity $m(\theta_i)$ は

$$\frac{m(\theta_i)}{n} = \frac{-2 \sin \varphi_i \sin k \varphi_i}{\left(1 - \frac{2s}{1+s^2} \cos \varphi_i\right) \left\{ (k+1) \cos(k+1)\varphi_i + \frac{k}{s} \cos k\varphi_i \right\}}$$

であらわれる。ただし $\theta_i = 2s \cos \varphi_i$, $n = n(d, k)$ とおく。(ここで Feit-Higman, Higman の idea を利用する.)

4) d, k 共に十分大の時

$$i) \quad m(\theta_1) < m(\theta_i) \quad \text{for } \forall i = 2, \dots, k-1$$

$$ii) \quad m(\theta_k) < m(\theta_i) \quad \text{for } \forall i = 2, \dots, k-1$$

$$iii) \quad -1 < \theta_1 + \theta_k < 0$$

(このあたりの計算は極く初等的であるが、かなり複雑である.)

が得られる。従って $F_k(x)$ は $(x - \theta_1)(x - \theta_k) \in \mathbb{Z}[x]$ において因数として持たなければならないが、これは矛盾である。

5) d, k のいずれかが小さい時は、4) の方法を少し modify して矛盾が容易に導き出される。

注: ここでの証明は、他の広いクラス of regular graphs (特に群が自己同型群として働いている場合には有効) の

非存在の証明に使えます。今までは、このような証明の際には、固有値の multiplicity が整数になるという事実しか利用していなかったことに比べて、ここでの方法は強力です。

注: ナス (57, 2) 型の Moore graph の存在だけが、依然未解決のままです。

Remark. 1) この原稿は 1972 年春の数学会年会 (応用数学会分科会 abstract) の原稿と全く同じです。

2) なお、全く同じ結果が R. Damerell (University of London) によっても得られていたことがわかりました。(両方の証明は全く独立である。) 両方の証明は、incidence matrix の固有値とその multiplicity に注目する点では同じであるが、いくつかの点では異なる。時間があれば、Damerell の証明法にもふれた予定である。彼の論文は Proc. Cambridge Phil. Soc. に、我々の論文は J. Fac. of Sci. Univ. Tokyo に、いずれも近刊予定である。

3) ナス、時間があれば、T. Ito による ^(strongly regular graphs with) maximal diameter の ~~場合~~ incidence matrix の固有値の multiplicity の簡単な計算法、および Noda-Bannai による Fisher の不等式 (2-design に対する) の intersection matrix の idea を用いた証明についても述べる。