

# 整係数群環について

阪市大 理 大林忠夫

## § 1. 序

有限群  $G$  の有理整数環  $\mathbb{Z}$  上の群環を  $\mathbb{Z}G$  であらわす。

群環に関するもっとも素朴な次の問題を考えよう。

問題： 二つの有限群  $G, G'$  に対して,

$$\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}G' \text{ (環同型)} \Rightarrow G \cong G' ?$$

いくつかの特殊な場合に、肯定的であることが知られているが、完全な解答にはほど遠い。しかし、否定的な解答は、一つも与えられていない。

群環の同型  $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}G'$  は、任意の体  $K$  における群環の同型  $KG \cong KG'$ , また、ホモロジー、コホモロジー群の同型  $H_n(G, \mathbb{Z}) \cong H_n(G', \mathbb{Z})$ ,  $H^n(G, \mathbb{Z}) \cong H^n(G', \mathbb{Z})$  をいきおとす。したがって、問題の研究に、表現論、ホモロジー理論が利用できる。問題の完全な解答を得ることも興味あるこ

とであるが、また、この問題の研究を通して、有限群の表現論やホモロジー理論などの、構造論への応用を深めてゆくことも重要であろうと思われる。

以下では、表現論、ホモロジー理論の応用という観点から、問題に関する二、三の結果について述べよう。

## §2. 群環の単数

有限群  $G$  の群環  $\mathbb{Z}G$  において、 $G$  の各元は、有限位数の単数という性質をもつ。したがって、 $\mathbb{Z}G$  の単数の研究は、問題の解答への、一つの方法となる。

定理 1 (Higman [3], Cohn-Livingstone [2]).

群環  $\mathbb{Z}G$  の有限位数の中心的な単数は、 $\pm g$  ( $g: G$  の中心的な元) の形のものに限る。

証明は [2] を参照。(  $G$  の既約指標の直交関係を使って、容易になされる。)

この定理から、ただちに、次を得る。

系 1. 群環の同型  $\phi: \mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}G'$  に対し、

- i)  $\mathfrak{z}(G)$  を  $G$  の中心とすると、 $\phi|_{\mathfrak{z}(G)}: \mathfrak{z}(G) \cong \mathfrak{z}(G')$ ,
- ii) とくに、 $G$  がアーベル群なら、 $\phi|_G: G \cong G'$ .

注: 問題を考える場合は, 環同型  $\phi: ZG \cong ZG'$  は, 群環  $ZG, ZG'$  の augmentation map  $\varepsilon: ZG \rightarrow Z$  ( $\varepsilon(\sum_g x_g g) = \sum_g x_g$ ),  $\varepsilon': ZG' \rightarrow Z$  と可換 ( $\varepsilon = \varepsilon' \circ \phi$ ) であると仮定できる. 上の系における同型  $\phi$  も, そのように仮定されている.

非アーベル群においては, 有限位数の単数でも,  $\pm g$  の形でないものが, 実際に存在し, 問題の研究が複雑になる. 次の補題は, そのような単数の形も, ある程度, 制限されることを示している重要なものである.

補題 2. ([2])  $ZG \ni u = \sum x_g g$  を有限位数の単数で,  $g(G) \ni g_0$  なるある  $g_0$  に対して,  $x_{g_0} \neq 0$  ならば,  $u = \pm g_0$ , すなわち,  $x_{g_0} = \pm 1$ ,  $\forall g \neq g_0$  に対して,  $x_g = 0$  である.

証明.  $G$  の正則表現による,  $u$  のトレースを調べることによって得られる ([2], 参照).

この補題を使って, 次の定理が得られる.

定理 3. ([2])  $\varepsilon: ZG \rightarrow Z$  を augmentation map,  $H$  を,  $\varepsilon(u) = 1$  なる  $ZG$  の単数  $u$  からなるある有限群とすると, 一般に,  $(H:1) \leq (G:1)$  で, とくに,  $(H:1) = (G:1) \Leftrightarrow ZH = ZG$ .

証明は [2] 参照.

$\phi: ZG \simeq ZG'$  を環同型,  $N$  を  $G$  の正規部分群とするとき, 群準同型  $G \rightarrow G/N$  から得られる群環の準同型  $\rho_N: ZG \rightarrow Z(G/N)$  に対して,

$$\Phi(N) = \{g' \in G' \mid \rho_N \circ \phi(g') = 1\}$$

によって,  $G'$  の正規部分群  $\Phi(N)$  が定義される. 次の定理は, 非アーベル群の場合の問題の研究においては, 基本的である.

定理4 ([2], Passman [8].)  $\phi: ZG \simeq ZG'$  のとき,

- i)  $\Phi$  は,  $G, G'$  の, おのおの, 正規部分群のつくる lattice の間の同型対応をなす,
- ii) とくに,  $N \subseteq \mathcal{F}(G) \Rightarrow \Phi(N) = \phi(N) \subseteq \mathcal{F}(G')$ , したがって,  $\phi|_N: N \simeq \Phi(N)$ ,
- iii)  $\phi$  は, 環同型  $\bar{\phi}: Z(G/N) \simeq Z(G'/\Phi(N))$  を引きおとし, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} ZG & \xrightarrow{\rho_N} & Z(G/N) \\ \cong \downarrow \phi & & \cong \downarrow \bar{\phi} \\ ZG' & \xrightarrow{\rho_{\Phi(N)}} & Z(G'/\Phi(N)) \end{array}$$

証明. i) は定義から直接得られる. ii) は定理1の系か

ら, iii) は上の定義と定理3から示される. 詳しくは, [2]  
[8] 参照.

この定理, とくに, ii) によって, 中心の性質によって,  
特徴づけられる群の場合を扱うことができる.

定理5 ([2], [8].)  $ZG \cong ZG'$  のとき,  $G, G'$  の昇(降)  
中心列の長さは等しく, おのおのの商群は同型である. とく  
に,  $G$  が 級  $n$  の巾零群なら,  $G'$  もそうである.

注:  $C_1, \dots, C_t$  を  $G$  の共役類,  $c_i = \sum_{g \in C_i} g \in ZG$  を共役和  
とすると,  $\{c_1, \dots, c_t\}$  は  $ZG$  の中心の  $\mathbb{Z}$ -基底をなす.  
Passman [8] は,  $\{c_i\}$  が  $ZG$  の環論的性質によって決まる  
という Glauberman の結果に基づいて, 具体的に  $\{c_i\}$  を計  
算することによって,  $G$  が, 級2の巾零群, または, 位数  $p^5$   
以下の  $p$ -群なら, 問題は肯定的であることを示している.  
これらに関しては, [8], または, 大林[6] 参照.

### § 3. 拡大群の群環

$\Pi$  を有限群,  $A$  を  $\Pi$ -加群とする.  $\Pi$  の群環  $Z\Pi$  は,  
augmentation  $\varepsilon: Z\Pi \rightarrow \mathbb{Z}$  によって, 係数遊離環となるが,  
 $\Pi$ -加群  $A$  は,  $\Pi$  の作用を線型的に  $Z\Pi$  へ拡張した作用と,

$\varepsilon$  を通して得られる  $Z\pi$  の作用により,  $Z\pi$ -両側加群とも見なせる. そして, 群  $\pi$  の  $A$  に関する 2-コサイクル  $\alpha: \pi \times \pi \rightarrow A$  と, 係数遊離環  $Z\pi$  の  $A$  に関する 2-コサイクル  $\alpha^*: Z\pi \times Z\pi \rightarrow A$  は, 対応  $\alpha \rightarrow \alpha^* \left( \alpha^*(\sum r_i \sigma, \sum r'_i \tau) = \sum r_i r'_i \alpha(\sigma, \tau) \right)$ ,  $\alpha^* \rightarrow \alpha \left( \alpha(\sigma, \tau) = \alpha^*(\sigma, \tau) \right)$  によって同一視される. この同一視によって,  $H^2(\pi, A) = H^2(Z\pi, A)$  と考える. したがって,  $A$  を核とする  $\pi$  の群拡大

$$E_G: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} \pi \rightarrow 1 \quad (1)$$

の同値類の集合  $\text{Ext}(\pi, A)$  と,  $A$  を核とする係数遊離環  $Z\pi$  の環拡大

$$E_A: 0 \rightarrow A \xrightarrow{i^*} \Lambda \xrightarrow{f^*} Z\pi \rightarrow 0 \quad (2)$$

の同値類の集合  $\text{Ext}(Z\pi, A)$  とが一対一に対応する.  $E_G$  から  $E_A$ , また, その逆の具体的な構成の仕方は, たとえば, Cartan-Eilenberg [1] で与えられている. 必要上, ここで復習しておく.

$E_G \Rightarrow E_A$  の構成: 群拡大 (1) が与えられたとき,  $A$  と  $i(A)$  を同一視して,  $A$  を  $G$  の部分群とみなすと, 環の完全系列  $0 \rightarrow I(A)ZG \xrightarrow{i} ZG \xrightarrow{f} Z\pi \rightarrow 0$  (ここで,  $I(A) = \text{kernel}\{\varepsilon: ZA \rightarrow Z \text{ augmentation map}\}$ , augmentation イデアル

である) が得られる.  $ZG$  の両側イデアル  $I(A)I(G) = I(A)ZG \cdot I(G)$  は  $I(A)ZG$  に含まれるから, 次の完全系列が得られる.

$$0 \rightarrow I(A)ZG/I(A)I(G) \xrightarrow{i^*} ZG/I(A)I(G) \xrightarrow{f^*} Z\pi \rightarrow 0 \quad (3)$$

ここで, 写像  $a \bmod [A, A] \rightarrow (a-1) \bmod I(A)I(G)$  は, 乗法群から加法群への同型  $A/[A, A] \cong I(A)ZG/I(A)I(G)$  を与える. したがって,  $I(A)ZG/I(A)I(G)$  は, 加法群  $A$  ( $A$ : アーベル群より  $[A, A] = 1$ ) と同一視され, そのとき,  $i^*$  は,  $i^*(a) = (i(a)-1) \bmod I(A)I(G)$  となる. そこで,  $\Lambda = ZG/I(A)I(G)$  とおけば, 上の完全系列 (3) が, 係数遊離環の拡大になることが, 容易に分る.

$E_\Lambda \Rightarrow E_G$  の構成: 係数遊離環の拡大 (2) が与えられたとき,  $G = \{\lambda \in \Lambda : f^*(\lambda) \in \pi\}$  とおくと,  $G$  は  $\Lambda$  の乗法に同じ, 群となり,  $f = f|_G : G \rightarrow \pi$ ,  $i : A \rightarrow G$  ( $i(a) = i^*(a) + 1$ ) が, 群拡大  $E_G : 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} \pi \rightarrow 1$  を定義する.

補題 6 ([17]) 上の方法によって,  $E_G$  から  $E_\Lambda$ , または,  $E_\Lambda$  から  $E_G$  を構成したとき,  $E_G$  と  $E_\Lambda$  の特性類は ( $H^2(\pi, A)$  と  $H^2(Z\pi, A)$  の同一視のもとで) 一致する. よって, 上の構成による対応  $E_G \leftrightarrow E_\Lambda$  によって,  $\text{Ext}(\pi, A)$  と

$\text{Ext}(\mathbb{Z}\pi, A)$  は一対一に対応する.

拡大の理論を, われわれの問題に应用するため, さらに, 次の補題を必要とする. いま, 二つの群拡大と同型写像

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \pi \longrightarrow 1 \\ & & \cong \downarrow \phi^* & & \downarrow \psi & & \cong \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & \pi' \longrightarrow 1 \end{array} \quad (4)$$

が与えられたとする. このとき,  $\pi'$ -加群  $A'$  を  $\psi$  を通して  $\pi$ -加群とみることによって,  $\psi$  は, コホモロジ一群の同型  $H(\psi): H^2(\pi', A') \xrightarrow{\sim} H^2(\pi, A)$  を与える. さらに,  $\phi^*$  が  $\pi$ -加群としての同型写像なら, コホモロジ一群の同型  $H(\phi^*): H^2(\pi, A) \xrightarrow{\sim} H^2(\pi, A')$  が得られる.

補題7 (e.g. [5].) 次の同値である.

- (i) 図式(4)を可換にする 同型  $\psi: G \xrightarrow{\sim} G'$  が存在する.
- (ii)  $\phi^*$  は  $\pi$ -加群 ( $A'$  を  $\psi$  を通して,  $\pi$ -加群と考えて) の同型写像であり, 拡大  $G, G'$  の特性類  $\alpha \in H^2(\pi, A), \alpha' \in H^2(\pi', A')$  に対し,  $H(\phi^*)(\alpha) = H(\psi)(\alpha')$  が成り立つ.

注意: 係数遊離環の拡大に対しても, 同様の命題が成り立つ.

問題を考えよう。  $\phi; ZG \xrightarrow{\sim} ZG'$  を *augmentation* と可換な環同型とする。もしも  $G$  がアーベル正規部分群  $A$  をもてば、定理4によって、 $G'$  も  $A$  と同型のアーベル正規部分群  $A' = \phi(A)$  をもつ。  $\pi = G/A$ ,  $\pi' = G'/A'$  とおくと、同じく定理4によって、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I(A)ZG & \longrightarrow & ZG & \longrightarrow & Z\pi \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow \phi & & \cong \downarrow \phi & & \cong \downarrow \bar{\phi} \\ 0 & \longrightarrow & I(A')ZG' & \longrightarrow & ZG' & \longrightarrow & Z\pi' \longrightarrow 0 \end{array}$$

ところで、 $\phi$  は *augmentation* と可換であるから、 $\phi(I(A)I(G)) = I(A')I(G')$  となり、 $I(A)ZG/I(A)I(G)$  と  $A$  を同一視して、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc} E_A: & 0 \longrightarrow & A & \longrightarrow & ZG/I(A)I(G) & \longrightarrow & Z\pi \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow \phi^* & & \cong \downarrow \phi^* & & \cong \downarrow \bar{\phi} & (5) \\ E_{A'}: & 0 \longrightarrow & A' & \longrightarrow & ZG'/I(A')I(G') & \longrightarrow & Z\pi' \longrightarrow 0 \end{array}$$

$E_A, E_{A'}$  は、補題6によって、群拡大  $E_G: 0 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow \pi \rightarrow 1$ ,  $E_{G'}: 0 \rightarrow A' \rightarrow G' \rightarrow \pi' \rightarrow 1$  に対応する係数遊離環の拡大であり、 $E_G, E_{G'}$  の特性類  $\alpha, \alpha'$  は  $E_A, E_{A'}$  の特性類とも考えられる。よって、補題7の後の注意によって、次が成り立つ。

補題8.  $Z\pi$ -加群  $A'$  を環同型  $\phi$  を通して,  $Z\pi$ -加群とみるとき,  $\phi^*: A \rightarrow A'$  は,  $Z\pi$ -加群の同型写像であり,  $\phi, \phi^*$  から引きおこされるコホモロジー群の同型,  $H(\phi): H^2(Z\pi, A) \rightarrow H^2(Z\pi, A')$  と,  $E_G, E_{G'}$  の特性類  $\alpha, \alpha'$  に対し,  $H(\phi^*)(\alpha) = H(\phi)(\alpha')$  が成り立つ.

この補題から, アーベル正規部分群  $A$  をもつ有限群  $G$  に対し, 環同型  $\phi: ZG \cong ZG'$  が与えられたとき,  $G \cong G'$  なるための, 一つの十分条件を得る.

補題9.  $\phi: ZG \cong ZG'$  に対し, 次の条件をみたす, 群同型  $\psi: \pi \cong \pi'$  が存在すれば,  $G \cong G'$  である.

(1) 環同型  $\phi: Z\pi \cong Z\pi'$  を通して得られる  $\pi$  の  $A'$  への作用と,  $\psi$  を通して得られる  $\pi$  の  $A'$  への作用は一致する.

(2) 拡大  $E_{G'}$  の特性類  $\alpha' \in H^2(\pi', A')$  に対し,

$H(\phi): H^2(\pi', A') = H^2(Z\pi', A') \rightarrow H^2(Z\pi, A') = H^2(\pi, A')$  と考えて,

$$H(\psi)(\alpha') = H(\phi)(\alpha') \quad \text{が成り立つ.}$$

証明)  $\phi$  から得られる同型  $\phi^*: A \cong A'$  と, 与えられた同型  $\psi: \pi \cong \pi'$  に対し, 図形 (4) を考える. 補題8より,  $\phi^*$  は,  $A$  を  $\phi$  を通して  $\pi$ -加群と考えると,  $\pi$ -同型であるか

ら、条件(1) によって、 $A'$  を  $\psi$  を通して、 $\pi$ -加群と考えても、 $\phi^*: A \cong A'$  は  $\pi$ -同型である。さらに、補題8と条件(2)より、拡大  $E_G, E_{G'}$  の特性類  $\alpha, \alpha'$  に対して、 $H(\phi^*)(\alpha) = H(\psi)(\alpha')$  が成り立つ。よって、補題7より、 $G \cong G'$ 。

定理10 (Jackson [4].)  $\phi: ZG \cong ZG'$  で、 $G$  がメタアーベル群ならば、 $G \cong G'$  である。さらに、 $A$  を  $G$  のアーベル正規部分群で、 $G/A$  がアーベル群なるものとする、 $A$  に対応する  $G'$  の正規アーベル部分群  $A' = \psi(A)$  と、 $\phi$  から  $\psi$  をおこされる同型  $\phi^*: A \cong A'$  が得られるが、 $\phi$  に対して、同型  $\psi: G \cong G'$  として、次を満たすものが取れる。

$$\phi(g) \equiv \psi(g) \pmod{I(A')I(G')}, \quad \forall g \in G, \quad \text{かつ}, \quad \psi|_A = \phi^*.$$

証明)  $\pi = G/A, \pi' = G'/A'$  とおくと、 $\phi$  は同型  $\bar{\phi}: Z\pi \cong Z\pi'$  を  $\psi$  をおこすが、 $\pi$  はアーベル群であるから、定理1の系ii)によって、 $\bar{\phi}|_{\pi}: \pi \cong \pi'$  (群同型) となる。よって、補題9において、 $\psi$  として  $\bar{\phi}|_{\pi}$  を考えれば、条件1), 2) は明らかに満たされる。さらに、合同式を満たすような同型  $\psi: G \cong G'$  が取れることは、図形(5)と、補題7の証明([5]参照)から容易に分る。

定理11.  $ZG \cong ZG'$  で、 $G$  がアーベル正規部分群<sup>A</sup>をもち、

$G/A = \pi$  が, 位数 8 の四元数群と初等的アーベル 2-群の直積に同型なら,  $G \cong G'$ .

(証明) Higman [3] によって, 上のような  $\pi$  に対しては,  $Z\pi$  の任意の単数は,  $\pm\sigma$  ( $\sigma \in \pi$ ) の形のものに限ざること  
が知られている. よって, 任意の環同型  $\bar{\phi}: Z\pi \cong Z\pi'$  は,  
群同型,  $\psi: \bar{\phi}|_{\pi}: \pi \cong \pi'$  を引きおこす. いま,  $A' = \Omega(A)$ ,  $\pi' = G'/A'$   
とおき,  $\phi: ZG \cong ZG'$  から得られる, 同型  $\bar{\phi}: Z\pi \cong Z\pi'$  に対  
し,  $\psi = \bar{\phi}|_{\pi}$  とおけば, 群同型  $\psi$  は, 補題 9 の条件を満たす.

定理 12.  $\phi: ZG \cong ZG'$  環同型.  $A$  を  $G$  のアーベル正規部分  
群,  $A'$  を  $A$  に対応する  $G'$  のアーベル正規部分群とする.

$H/A$ ,  $H'/A'$  を, おのあの,  $G/A$ ,  $G'/A'$  の中心とすると,  $H \cong H'$ .

(証明).  $\pi = G/A$ ,  $\pi' = G'/A'$ ,  $\pi_0 = H/A$ ,  $\pi'_0 = H'/A'$  とおく.  $\phi$  は  
環同型  $\bar{\phi}: Z\pi \cong Z\pi'$  を引きおこすが,  $\pi_0$  は  $\pi$  の中心だから,  
 $\psi = \bar{\phi}|_{\pi_0}: \pi_0 \cong \pi'_0$  は群同型となる. そこで, 群拡大の  
次の図形を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} E_H : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & H & \longrightarrow \pi_0 \longrightarrow 1 \\ & & & \cong \downarrow \phi^* & & & \cong \downarrow \psi \\ E_{H'} : & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & H' & \longrightarrow \pi'_0 \longrightarrow 1. \end{array}$$

まず, 補題 8 より,  $A'$  を  $\psi$  を通して  $\pi_0$ -加群と考えたとき,

$\phi^*$  は  $\pi_0$ -同型である ( $\psi = \bar{\phi}|_{\pi_0}$  に注意). 次に,

$\text{Res} : H^2(\pi, A) \rightarrow H^2(\pi_0, A)$  を制限写像とすると, 明らかに,  
 $\text{Res} \circ H(\phi^*) = H(\phi^*) \circ \text{Res}$  が成り立つ. また,  $\psi = \bar{\phi}|_{\pi_0}$  に注意すれば,  $\text{Res} \circ H(\bar{\phi}) = H(\psi) \circ \text{Res}$  が成り立つ.  $\alpha, \alpha'$  を, おのおの, 拡大  $E_G : 0 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow \pi \rightarrow 1$ ,  $E_{G'} : 0 \rightarrow A' \rightarrow G' \rightarrow \pi' \rightarrow 1$  の特性類とすると, 補題 8 より,  $H(\phi^*)(\alpha) = H(\bar{\phi})(\alpha')$  である. これと, 上の関係式より,  $H(\phi^*)(\text{Res}(\alpha)) = H(\psi)(\text{Res}(\alpha'))$  を得る. ところで,  $\text{Res}(\alpha), \text{Res}(\alpha')$  は, おのおの, 拡大  $E_H, E_{H'}$  の特性類であるから, 補題 7 によって,  $H \cong H'$  となる.

系 ([8.1])  $ZG \cong ZG'$  なら,  $G$  と  $G'$  の二番目の中心は, 互に同型である. とくに,  $G$  が 級 2 の巾零群なら,  $G \cong G'$ .

#### §4. 位数 8 の二面体群 $D_4$ の群環 $ZD_4$ .

定理 10, あるいは, 定理 12 の系から, 一般の可解群, 巾零群への拡張が次の問題となるが, いまのところ, 一つの難点がある. たとえば,  $\phi : ZG \cong ZG'$  で,  $G$  を級 3 の巾零群,  $A$  を  $G$  の中心とすると  $\pi = G/A$  は級 2 の巾零群となる.  $\pi(A) = A'$ ,  $\pi' = G'/A'$  とおくと,  $\phi$  は同型  $\bar{\phi} : Z\pi \cong Z\pi'$  を引き起す. いま,  $G \cong G'$  なる一つの規準として, 補題 9 を考えれば,  $\pi$  は級 2 の巾零群だから, 確かに, 群同型  $\psi : \pi \cong \pi'$  が存在

するが、この必要が補題9の条件をみたすかどうかは分らない。  
 前章で扱われた場合は、ある意味で、補題9の条件が, *trivially*  
 に成り立っていた。しかし、一般にその事は期待できない。  
 実際、補題9において、 $\Pi = D_4$  の場合には、コホモロジー群  
 を考えて、はじめて条件がみたされることが分る。このこと  
 を以下で示そう。そのために、 $ZD_4$  の環自己同型についての、  
 ある知識が必要となる。

$D_4$  を、 $a^4 = b^2 = 1$ ,  $ab = ba^3$  なる  $a, b$  で生成された、  
 位数8の二面体群とする。 $A = \langle a^2 \rangle$  は  $D_4$  の中心となる。

### 補題13. 合同式

$$\varphi(x) \equiv x \pmod{I(A)I(D_4)}, \quad \forall x \in D_4 \quad (6)$$

をみたす  $ZD_4$  の環自己同型  $\varphi: ZD_4 \rightarrow ZD_4$  (augmentation  $\varepsilon$  と  
 可換) は、次の形で与えられる。

$$\begin{cases} \varphi(a) = a + \gamma_a(1-a^2)a + \gamma_b(1-a^2)b + \gamma_{ab}(1-a^2)ab \\ \varphi(b) = b + \delta_a(1-a^2)a + \delta_b(1-a^2)b + \delta_{ab}(1-a^2)ab, \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 $I = \{\gamma_a, \gamma_b, \gamma_{ab}\}$ ,  $S = \{\delta_a, \delta_b, \delta_{ab}\}$  は、

$$\begin{cases} \gamma_a(\gamma_a + 1) = \gamma_b^2 + \gamma_{ab}^2 \\ \delta_a(\delta_b + 1) = \delta_a^2 - \delta_{ab}^2 \\ 2(\gamma_a\delta_a - \gamma_b\delta_b - \gamma_{ab}\delta_{ab}) = \gamma_b - \delta_a \end{cases} \quad (8)$$

をみたす偶数である。逆に、(7) で定義される  $\varphi$  は、合同式 (6) をみたす  $ZD_4$  の自己同型である。

証明). [7] を参照.

この補題の (7) 式で定義される自己同型を、簡単のため、 $\varphi_{r,s}$  と記することにする。

定理 14.  $ZD_4$  の (augmentation  $\varepsilon$  と可換な) 任意の自己同型  $\varphi$  は、 $D_4$  の自己同型  $\psi$  と、(8) 式をみたすある偶数  $r = \{r_a, r_b, r_{ab}\}$ ,  $s = \{s_a, s_b, s_{ab}\}$  に対し、 $\varphi_{r,s}$  との合成  $\varphi_{r,s} \circ \psi$  として得られる。

証明).  $D_4$  の中心  $A$  による商群  $D_4/A$  はアーベル群より、環同型  $\varphi: ZD_4 \rightarrow ZD_4$  に、定理 10 を適用すると、 $\varphi(x) \equiv \psi(x) \pmod{I(A)I(D_4)}$ ,  $\forall x \in D_4$  なる  $D_4$  の自己同型  $\psi$  が存在する。かつ、 $\psi(A) = A$  より、 $ZD_4$  の自己同型  $\varphi \circ \psi^{-1}$  は、 $\varphi \circ \psi^{-1}(x) \equiv x \pmod{I(A)I(D_4)}$ ,  $\forall x \in D_4$  をみたす。よって、補題 13 より、定理を得る。

定理 15.  $\phi: ZG \rightarrow ZG'$  で、 $G$  が初等的アーベル群  $A$  を正規部分群にもち、 $G/A$  が位数 8 の二面体群  $D_4$  に同型となるような 2-群ならば、 $G \cong G'$  である。

証明).  $A' = \bar{\alpha}(A)$  を  $A$  に対応する  $G'$  のアーベル正規部分群とする.  $\phi^*: A \cong A'$  を  $\phi$  から得られる同型,  $\pi = G/A$ ,  $\pi' = G'/A'$  とおいて,  $\phi$  から得られる環同型  $\bar{\phi}: Z\pi \cong Z\pi'$  を考える.  $\pi$  は  $D_4$  に同型であるから,  $\pi_0, \pi'_0$  を  $\pi, \pi'$  の中心とすると,  $\bar{\phi}(x) \equiv \bar{\psi}(x) \pmod{I(\pi_0)I(\pi')}$ ,  $\forall x \in \pi$ , かつ,  $\bar{\psi}(\pi_0) = \pi'_0$  となる群同型  $\bar{\psi}: \pi \cong \pi'$  が存在する. よって,  $\bar{\psi} \circ \bar{\phi}$  は,  $Z\pi$  の自己同型で,  $\bar{\psi} \circ \bar{\phi}(x) \equiv x \pmod{I(\pi_0)I(\pi)}$ ,  $\forall x \in \pi$  をみたす. よって, 補題13より,  $\bar{\psi} \circ \bar{\phi}(x) = x + 2X$ ,  $x \in I(\pi_0)Z\pi$  なる  $X$  が,  $x \in D_4$  に対して決まる. すなわち,  $\bar{\phi}(x) = \bar{\psi}(x) + 2\bar{\psi}(X)$ . ところで,  $A$  は巾指数2であるから,  $\bar{\phi}$  を通しての,  $\pi$  の  $A'$  への作用は,  $\bar{\psi}$  を通してのそれに一致する. また,  $H^2(\pi, A')$  も巾指数2であるから, 明らかに,  $H(\bar{\phi}) = H(\bar{\psi})$  となる. よって, 補題9より,  $G \cong G'$  を得る.

例. 補題13において, 合同式(6) をみたす  $ZD_4$  の自己同型  $\varphi$  としては, たとえば, 次のものがある.

$$\begin{cases} \varphi(a) = a + 4(1-a^2)a + 2(1-a^2)b + 4(1-a^2)ab \\ \varphi(b) = b + 2(1-a^2)a + 2(1-a^2)ab \end{cases}$$

## 引用文献

- [1] H. Cartan - S. Eilenberg ; Homological Algebra, Princeton Univ. Press, 1956.
- [2] J.A. Cohn - D. Livingstone ; On the structure of group algebras, Canad. J. Math., 17 (1965), 583-593.
- [3] G. Higman ; The units of group rings, Proc. Lond. Math. Soc., 46 (1940), 231-248.
- [4] D. A. Jackson ; The groups of units of the integral group rings of finite metabelian and finite nilpotent groups, Quart. J. Math. Oxford, 20 (1969), 319-331.
- [5] S. Lang ; Rapport sur la Cohomologie des Groupes, Benjamin, Inc., 1966.
- [6] 大林 ; 整係数群環について, 数学, 19 (1967), 18-30.
- [7] T. Osayashi ; Integral group rings of finite groups, Osaka J. Math., 7 (1970), 近刊.
- [8] D. S. Passman ; Isomorphic groups and group rings, Pacific J. Math., 15 (1965), 561-583.