

Fuchs のもんだい について.

岡本和夫 (東大理).

§ 1. Riemann 問題

以下、 X ; Riemann surface.

S ; discrete subset of X

とする.

一般に、 X 上で定義された n 階の常微分方程式

$$(1) \quad D^n y + p_1(x) D^{n-1} y + \dots + p_{n-1}(x) Dy + p_n(x) y = 0$$

を考える。ここで、 D は X 上のある 1-form ω に関する微分

即ち、 $Dy \cdot \omega = dy$ で定義される。また $p_j(x)$ $j=1, \dots, n$

は X 上の meromorphic function である。

さらに、我々は、方程式 (1) が Fuchs 型であると仮定しよう。

すると、 S を $p_j(x)$ の pole 全体からなる ~~disce~~ discrete

set とすれば、よく知られているように、(1) は、 $\pi_1(X-S)$

から $GL(n, \mathbb{C})$ への表現類 $\hat{\rho}$ を決める。このようにして

Fuchs 型線型常微分方程式 (1) から、triple $(X, S, \hat{\rho})$ が

定まるが、これを Riemann datum とよぶことにする。

Definition 1. Riemann datum $(X, S_0, \hat{\rho}_0)$ が Riemann

datum $(X, S, \hat{\rho})$ から reduce された datum であるとは、

(a). $S_0 \subset S$

(b) 任意の表現, $\rho \in \hat{\rho}$; $\pi_1(X-S) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$.

2

に対して、 $\rho_0 \in \hat{\rho}_0$ が存在して、 diagram

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X-S) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X-S_0) \\ & \searrow \rho & \swarrow \rho_0 \\ & GL(n, \mathbb{C}) & \end{array}$$

が commute する。

- (c). $S'_0 \subset S$ が上の (a), (b) を満足するものであれば
 $S_0 \subseteq S'_0$

Definition 2. 2つの Riemann data $(X, S, \hat{\rho})$,

$(X, S', \hat{\rho}')$ が equivalent であるとは、それぞれの reduced system が等しい場合をいう。

言い換えれば、 $(X, S_0, \hat{\rho}_0)$ が $(X, S, \hat{\rho})$ の reduced system であるということとは、

(a)' $\forall \sigma \in \pi_1(X-S_0)$ に対して、 $\hat{\rho}(\sigma) \neq I$ (identity matrix).

(b)' $\forall \sigma \in \pi_1(X-S) - \pi_1(X-S_0)$ に対して、 $\hat{\rho}(\sigma) = I$

ということである。

Riemann Problem 任意に与えられた (X, S_0) に対し、

ちよどきめを Riemann datum として持つ様な、Fuchs 型線型常微分方程式 (1) が存在するな。

この問題は、古くから数々の数学者によって考察されたが、1957年に H. Röhrl によって次の様な形で解決された。

Theorem 与えられた $(X, S, \hat{\rho})$ に対して、Fuchs 型方程式 (1) が存在して、その Riemann datum を

$(X, S', \hat{\rho}')$ とすれば、一般に $S \subset S'$ ぞ

$$(X, S, \hat{\rho}) \sim (X, S', \hat{\rho}')$$

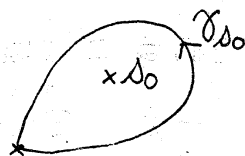
(definition 2 の意味での equivalent)

方程式の解で考えれば、これは次のことを意味している。

いま、 $\lambda_0 \in S$ をとり、 λ_0 を正のむきに一周する道の homotopy class を γ_{λ_0} とかく。

すると、 $\rho(\gamma_{\lambda_0}) = I$ となるような特異点

λ_0 は、解の pole になっている。



Definition 3 解の pole になっている (即ち分岐点ではない) 特異点を かなけの特異点 (apparent singular point) という。

Röhrl の定理の主張することは、かなけの特異点の存在をゆるせば、Riemann 問題の solution は存在する、ということである。

以下、 X を compact Riemann surface とし、その genus を g とかく。すると当然次のことが問題となる。 $(X, S, \hat{\rho})$ について Riemann 問題の解を作った場合、かなけの特

異点があらわれるとしても、それは最小限どのぐらいまで必要であろうか。以下、しばらくこの問題を考えてみよう。

X : compact Riemann surface of genus g .

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}.$$

とし、各 s_j はみかけの特異点ではないとする。(このような特異点を便宜上、wesentlich singularity とよぼう)。すると $\hat{\rho}$ は

$$(2) \quad \text{Hom}(\pi_1(X-S), GL(n, \mathbb{C})) / GL(n, \mathbb{C})$$

の元とみなすことができる。(2) の空間を $\mathcal{M}$ と書く。この時 $\mu \equiv \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = n^2(2g+m-2) + 1$ であることはわかっている。

一方、 S に特異点をもつような Fuchs 型方程式 (1) は

$$\nu \equiv \frac{1}{2}n^2(m+2g-2) + \frac{1}{2}mn$$

この parameter を含む。すると一般には $\mu \geq \nu$ である。この事情からみても、みかけの特異点を許さない限り、Riemann Problem は解をもたない。また $\mu \leq \nu$ となるのは、 $g=0$, $n=2$ のときは $m \leq 3$, $n > 2$ のときは $m \leq 2$ という場合だけである。

それでは、 $K \equiv \mu - \nu$ は何を意味するか? この K とみかけの特異点の ~~最小数とは~~ コスウとは等しくないであろうか。実は、 $\mathcal{M}$ には complex structure が入り、analytic variety にな

るが、irreducible な表現だけを考えれば、それなら決まる

subset $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ は manifold になる。そこで、

予想. $\hat{p} \in \mathcal{M}_0$ の時には、みなけの特異点、 ∞ を許せば

Riemann 問題は solution をもつであろう。

§2. Fuchs の問題.

X ; compact Riemann surface of genus g .

$$S = \{ a_1, \dots, a_m \}$$

として、いま、さらに $S = S_1 \cup S_2$, (disjoint sum)

$$S_1 = \{ a_1, \dots, a_\ell \}, \quad S_2 = \{ t_1, \dots, t_\ell \}. \quad \ell + \ell = m.$$

とする。 $(X, S, \hat{p})$ を Riemann datum とするような。

Fuchs 型常微分方程式

$$(3) \quad D^n y + P_1(x, t_1, \dots, t_\ell) D^{n-1} y + \dots + P_n(x, t_1, \dots, t_\ell) y = 0$$

を次のように決めることができる。

Theorem 1 (H. Röhrl).

$U_j \subset X$ を t_j ($j=1, 2, \dots, \ell$) の open neighbourhood とする。 S_1 の点 a_j を fix して、 t_j を variable とみなす。今、 $\hat{p}$ が variable $t_j \in U_j$ によらないならば、方程式 (3) の係数

$$P_j(x, t_1, \dots, t_\ell).$$

は、 $X \times U_1 \times \dots \times U_\ell$ 上 meromorphic である。

さて、次に我々は次の問題を考えよう。

Fuchs' Problem. 方程式 (3) の含む parameter を一般に α と書く。 ρ が、 $t_j \in U_\rho$ にやうないとして、関数

$$X = X(t_1, \dots, t_k)$$

を決定せよ。

これは極めてむずかしい問題である。少なくとも $g=0$ なら、 $g=1$ の場合でないと、具体的には扱えそうもない。過去、数学者達が考察したのは、もちろん $g=0$ の場合である。Fuchs からはじまって、Schlesinger, Garnier 等々によって研究されたのも Riemann sphere $\mathbb{P}^1$ 上で定義された方程式についてである。それにもななめらず、この Fuchs' Problem が興味深いと思われる理由を以下に説明するが、そのためには、K. Fuchs によって示された一例を示せば十分であると思われる。

Remark 念の為に数学史にたちもどってみるならば、Fuchs 型方程式とか、Fuchs 群 とかではあるが Fuchs は、L. Fuchs であり、K. Fuchs はその息子である。

さて、 $X = \mathbb{P}^1$, $S = \{0, 1, \infty\}$ とし、さしてみよう。このとき、2階の方程式を考うることにすれば

$$u = 9, \quad v = 8, \quad \text{よって} \quad K = 1$$

であるなら、みなけの特異点 1つを許すでしょう。

2 階の方程式

$$(4) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

は、 $\hat{p}$ が、 t によらない (以下、 t を variable とする) という性質を不変にしたまま、

$$(4') \quad y'' = py$$

という形に変換できるから、以下 (4)' を考える。ここで

$$(5) \quad p(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda)^2} \\ + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{\varepsilon}{x-\lambda}$$

$$(6) \quad \alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 0$$

λ がみかけの特異点にあたるものであって、(4)' の Riemannian scheme は、

0	1	t	∞	λ
$\frac{1+p_0}{2}$	$\frac{1+p_1}{2}$	$\frac{1+p_2}{2}$	σ	$\frac{3}{2}$
$\frac{1-p_0}{2}$	$\frac{1-p_1}{2}$	$\frac{1-p_2}{2}$	σ'	$-\frac{1}{2}$

となっている。すると次のことがわかる。

Theorem 2. $\lambda = \lambda(t)$ は非線型常微分方程式

$$(7) \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-\lambda} \right) \frac{d\lambda}{dt} \\ + \frac{1}{2} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)^2} \left\{ k_{\infty} - k_0 \frac{t}{\lambda^2} + k_1 \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} - (k_t-1) \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right\}$$

を満足し、かつ、 $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ は、 $t, \lambda, \frac{d\lambda}{dt}$ の有理関数となっている。

Remark $k_0, k_1, k_t, k_{\infty}$ は constant である。

また、 a, b, c は $\hat{p}$ が t によらない、という条件から必然的に t に independent な定数である。

我々が興味深いのは、方程式 (7) である。(7) は Painlevé の transcendental としてよく知られている。動く不岐点をもたない様な、非線型常微分方程式を決定するというのは古くからの常微分方程式論における大問題であるが、我々は、Painlevé の研究した場合以外には多くのものを得ていない。この Fuchs の結果をみると、Fuchs' Problem を考察して出てくる方程式というのは、すべてこの type のものではないだろうかと予想するのは、必ずしも無理なこととは言えない。Schlesinger, Garnier 等々の研究においても、R. Fuchs と同様の結果を得ている。

§3. torus 上の方程式

$g=0$ の場合にいろいろと調べられているとしたら、次は当然、 $g=1$ の場合も考えられてよいだろう。もちろんこの場合は、(7) のような「有理関数的」なものではなく「代数関数的」なものが表われるであろう。

以下、 $X = \mathbb{T}^1$ (複素 1 次元 complex torus)

$$S = (z_1, z_2)$$

として、2階の方程式を考える。しかし、 $\mathbb{I}^1$ の universal covering space は、 $\mathbb{C}$ であるから、torus 上の方程式をはじめなら、 $\mathbb{C}$ の上で、elliptic function $\wp(x)$ 等々をもちいて書いておくことにする。 $\wp(x)$ の基本周期を $2\omega_1, 2\omega_3$ と書く。 $\Omega = \{2\alpha\omega_1 + 2\beta\omega_3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$ として、 ~~$x \in \Omega$~~ $x \in \mathbb{C}$ と Ω に関して congruent な点全体を $x + \Omega$ と書く。さらに、混乱のない限り、 $x + \Omega$ を単に x と書く。

$S = \{0 + \Omega, t + \Omega\}$ とし、 t を variable と考える。我々の考察する方程式は、次の type である。

$$(8) \quad y'' + p(x, t)y' + q(x, t)y = 0.$$

Remark $\mathbb{C}$ においては、方程式 (8) は、

$$(8)' \quad y'' = r(x, t)y$$

に変形されうるが、この時、 $\hat{p}$ が t に independent であるという性質は、保存されない。

さて、なんたんな計算によって、我々の場合、

$$\mu = 9, \quad \nu = 6 \quad \therefore \quad k = 3$$

がわかる。従って、みなけの特異点は3コでてくるわけだが、問題を簡略化して、いまみなけの特異点2コで解けていると仮定しよう。その特異点を λ_1, λ_2 とおく。^{さらに}~~するを~~ (8) において、

$$(9) \quad p(x) = k_1 + c_0 \zeta(x) + c_1 \zeta(x-t) - \zeta(x-\lambda_1) - \zeta(x-\lambda_2)$$

$$(10) \quad g(x) = k_1 + b_0 \zeta(x) + b_1 \zeta(x-t) + b_2 \zeta(x-\lambda_1) + b_3 \zeta(x-\lambda_2) \\ + a_0 p(x) + a_1 p(x-t)$$

とする。言い及えれば、み及けの特異点 λ_i ($i=1, 2$) における exponent は、0 および 2 とする。

Remark (a). $\zeta(x)$ は elliptic function ではないから、(9), (10) より

$$(11) \quad c_0 + c_1 = 2,$$

$$(12) \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

を得る。

(b). 方程式 (8) の Riemannian scheme は、

$0+\Omega$	$t+\Omega$	$\lambda_1+\Omega$	$\lambda_2+\Omega$
σ_0	σ_1	0	0
σ_0'	σ_1'	2	2

ここに

$$(13) \quad \sigma_0 + \sigma_0' + \sigma_1 + \sigma_1' = 0.$$

恒等式 (13) は Fuchs' relation に対応するものであるが、実は (11) から (13) は容易に得られる。

方程式 (8), および (9), (10) で、我々は R. Fuchs と同様に、み及けの特異点 λ_1, λ_2 についてもどの様は微分方程式を満足するかを調べるわけだが、ここでは途中の計算、および、証明はすべて省略し 結果だけ示すことにする。

興味のある方は、筆者の paper を御参照下さい。

Result (I) $\lambda_i = \lambda_i(t)$ は 非線型方程式系

$$(E_1) \quad \frac{1}{2M} \frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} = -\frac{1}{4} (\phi(\lambda_1) - \phi(\lambda_1 - t)) \left(\sum_{i=1}^2 \left(\frac{d\lambda_i}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} (\phi(\lambda_2) - \phi(\lambda_2 - t)) \frac{d\lambda_1}{dt} \frac{d\lambda_2}{dt} \\ - \frac{1}{2} (\phi(\lambda_1 - t) - \phi(\lambda_2 - t)) \frac{d\lambda_1}{dt} + \frac{1}{2} (\phi(\lambda_1) - \phi(\lambda_2)) \frac{d\lambda_2}{dt} \\ - M^2 (\phi(\lambda_1) - \phi(\lambda_2)) (\phi(\lambda_1) - \phi(\lambda_1 - t)) (\alpha_0 - \alpha_1) \\ + M \phi'(\lambda_1) (\alpha_0 - \alpha_1) + (\phi(\lambda_1) - \phi(\lambda_1 - t)) \alpha_1$$

$$(E_2) \quad \frac{1}{2M} \frac{d^2 \lambda_2}{dt^2} = \frac{1}{4} (\phi(\lambda_2) - \phi(\lambda_2 - t)) \left(\sum_{i=1}^2 \left(\frac{d\lambda_i}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} (\phi(\lambda_1) - \phi(\lambda_1 - t)) \frac{d\lambda_1}{dt} \frac{d\lambda_2}{dt} \\ + \frac{1}{2} (\phi(\lambda_1) - \phi(\lambda_2)) \frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{1}{2} (\phi(\lambda_1 - t) - \phi(\lambda_2 - t)) \frac{d\lambda_2}{dt} \\ - M^2 (\phi(\lambda_1) - \phi(\lambda_2)) (\phi(\lambda_2) - \phi(\lambda_2 - t)) (\alpha_0 - \alpha_1) \\ + M \phi'(\lambda_2) (\alpha_0 - \alpha_1) - (\phi(\lambda_2) - \phi(\lambda_2 - t)) \alpha_1$$

を満足する。

ここで

$$M = \frac{1}{S(\lambda_2) - S(\lambda_1) + S(\lambda_1 - t) - S(\lambda_2 - t)}$$

$$\alpha_j = -a_j + \frac{1}{4} C_j^2 - \frac{1}{2} C_j \quad (j=0, 1)$$

(II) $k_j(t), b_j(t) \quad (j=1, \dots, 3)$ は $\frac{d\lambda_1}{dt}, \frac{d\lambda_2}{dt}$ および

$\phi(\lambda_i), \phi(\lambda_i - t), S(\lambda_i), S(\lambda_i - t) \quad (i=1, 2)$ の有理関数

である。

(III) k_1 は t に independent に、勝手にとれる。

(IV) さらに、(I) ~ (III) を満足するように $\lambda_i(t), (i=1, 2)$

$k_1, k_2(t), b_j(t), (j=0, 1, \dots, 3)$ をえうべば、方程式 (8) から決まる表現類 $\hat{\rho}$ は ρ によらない。

さて、このようにして得られた 方程式 $(E_1), (E_2)$ であるが、この方程式は動く分岐点をもたないであろうな。このことは、まだわかっていないが、少なくとも次のような予想はたつ。

予想 $(E_1), (E_2)$ の一般解 $\lambda_i = \lambda_i(t)$ は、動く分岐点をもつとしても、 λ_1, λ_2 の適当な 対称関数 $\Lambda_1(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ $\Lambda_2(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ (たとえば $\phi(\lambda_1) + \phi(\lambda_2), \phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2)$) は動く分岐点をもたないであろう。

$k=2$ の場合に於てもこのように面倒な結果になるなら、 $k=3$ とすれば、かなり大変なことである。しかし最後に次のことに注意したい。 $k=2$ ならば $u+k=8$ である。一方 $(E_1), (E_2)$ の general solution $\lambda_i = \lambda_i(t)$ は、初期値

$\lambda_i^0 = \lambda_i(t_0), \lambda_i^{0'} = \frac{d\lambda_i}{dt}(t_0)$ を parameter として含むなら、 $\lambda_i = \lambda_i(t, \lambda_i^0, \lambda_i^{0'}, c_0, c_1, a_0, a_1)$

という形をしている。即ち、(II) を考えれば、7つの parameter を含む。(I) より、 k_1 は任意だから、Fuchs' Problem の解として得られた system $\{\lambda_i, k_1, k_2, b_j\}$ は 8 個の parameter を含む。これは $u+k$ の値と同じである。さて $k=3$ としてみよう。この時も k_1 は任意であることは

わなっている。今度は

$$\lambda_j = \lambda_j^*(t, \lambda_j^0, \dot{\lambda}_j^0, C_0, C_1, a_0, a_1) \quad j=1, 2, 3.$$

という形で決まることもわかる。ところが、これらの system の含む parameter はみなけ上 10コである。ということは

$\lambda_j, \frac{d\lambda_j}{dt}$ に何らかの関数関係の存在することを意味している。 $n=3$ の場合の主要な困難はこの点にある。

参考文献

- [1] K. Okamoto, On Fuchs' problem on a torus I;
(to ~~appear~~ ^{appear})
- [2] 青藤利弥, Riemann の問題, 数学, 12巻
(1960-61), p. 145-159.