

$\mathbb{P}^3$ の Curve の Basic Sequence について

京大数理研 尾崎睦実

$\mathbb{P}^3$ の nonsingular irreducible curve を分類するのに basic sequence と呼ばれるものを定義して考えていく試みをしているので、今の程度のことになっているかを述べておく。目下のところ、これからきちんとしたものとして様になっていくかどうかは保証の限りでない。

以下 curve とは 体 k 上の完備 1 次元スキームで embedded point をもたないものとする。簡単のため、 k は標数 0 の代数的閉体とする。[A2; notation] にある記号は断りなしに用いる。

§ 1. Basic Sequence の定義

X を $\mathbb{P}^3$ の curve, $\mathcal{I}$ をその ideal sheaf, $I = \bigoplus_{i \geq 0} I_i = H_*^0(\mathcal{I})$
 $R := k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ とする。

Definition 次の条件を満たす整数列 $(a; \pi^1; \pi^2) = (a; n_1, \dots, n_a; n_{a+1}, \dots, n_{a+b})$ を X の basic sequence と呼び、記号で $B(X)$ と書く。

$$(1) \quad a \leq n_1 \leq \dots \leq n_a, \quad n_1 \leq n_{a+1} \leq \dots \leq n_{a+b}.$$

$$(2) \quad \dim_k I_n = \binom{n-a+3}{3}_+ + \sum_{i=1}^a \binom{n-n_i+2}{2}_+ + \sum_{j=1}^b \binom{n-n_{a+j}+1}{1}_+$$

ただし、
$$\binom{v}{i}_+ = \begin{cases} \binom{v}{i} & \text{for } v \geq i \\ 0 & \text{for } v < i \end{cases}$$

(3) homogeneous coordinates x_1, x_2, x_3, x_4 を general にとったとき、 $H_*^1(\mathcal{F})$ の $k[z]$ -module としての minimal free resolution

$$0 \longrightarrow k[z][-\bar{E}^2] \xrightarrow{G} k[z][-\bar{E}^1] \xrightarrow{H} k[z][-\bar{E}^0] \longrightarrow H_*^1(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

を考えると、数列 $\bar{E}^0 = (\varepsilon_1^0, \dots, \varepsilon_p^0)$, $\bar{E}^1 = (\varepsilon_1^1, \dots, \varepsilon_q^1)$, $\bar{E}^2 = (\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_r^2)$ は x_1, x_2, x_3, x_4 のとり方によらず $H_*^1(\mathcal{F})$ の構造でのみ定まる。このとき $\pi^2 = \bar{E}^2$ (up to permutation) となる。

$B(X)$ の存在の証明

$\mathbb{P}^3$ の斉次座標は十分 general にとってあるものとする。

step 1). $a = \min\{i \mid I_i \neq (0)\}$, f_0 を x_1 に関して monic な I_a の元とある。 $\Gamma = R/I + (x_3, x_4)R$ とおき、 Γ の $k[x_2]$ -module としての minimal free resolution

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^a k[x_2] [-n_i] \xrightarrow{A} \bigoplus_{i=0}^{a-1} k[x_2] [-i] \xrightarrow{(1, x_1, x_1^2, \dots, x_1^{a-1})} \Gamma \longrightarrow 0$$

をとると、横ベクトル $F' := (1, x_1, x_1^2, \dots, x_1^{a-1}) A$ は $I + (x_3, x_4)R$ の元を成分とする。そこで I の斉次多項式 f_i ($1 \leq i \leq a$) をとって $(f_1, \dots, f_a) \equiv F' \pmod{(x_3, x_4)R}$ となるようにする。このとき $\deg f_i = n_i$ ($1 \leq i \leq a$)。 Γ は自然に $\bigoplus_{i=0}^{a-1} x_1^i k[x_2]$ の k -sub-vector space と思えば、 k -vector spaces としての直和

$$(1.1) \quad (\bar{f}_0 \cdot k[x_1, x_2] \oplus \bigoplus_{i=1}^a \bar{f}_i \cdot k[x_2]) \oplus \Gamma = k[x_1, x_2]$$

が成立する。ただし $\bar{f}_i = f_i(x_1, x_2, 0, 0)$ ($0 \leq i \leq a$)。

step 2) $\bar{f}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, 0)$ ($0 \leq i \leq a$) とおくと、(1.1) より

$$(1.2) \quad (\bar{f}_0 \cdot k[x_1, x_2, x_3] \oplus \bigoplus_{i=1}^a \bar{f}_i \cdot k[x_2, x_3]) \oplus (\Gamma \otimes_k k[x_3]) = k[x_1, x_2, x_3]$$

となるから $R/I + x_4 R$ は $k[x_3]$ -module としての minimal free resolution 次のようなもの

$$(1.3) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^b k[x_3] [-n_{a+j}] \xrightarrow{B} \Gamma \otimes_k k[x_3] \xrightarrow{(\gamma_1, \dots, \gamma_c)} R/I + x_4 R \rightarrow 0$$

を持つ。ただし $(\gamma_1, \dots, \gamma_c)$ は Γ の k -basis。横ベクトル $F^2 := (\gamma_1, \dots, \gamma_c) B$ は $I + x_4 R$ の元を成分とするから、 I の斉次多項式 f_{a+j} ($1 \leq j \leq b$) があって $(f_{a+1}, \dots, f_{a+b}) \equiv F^2 \pmod{x_4 R}$ となる。このとき $\deg f_{a+j} = n_{a+j}$ ($1 \leq j \leq b$) であり、 $\bar{f}_{a+j} =$

$f_{a+j}(x_1, x_2, x_3, 0)$ とおけば、単因子論より、 k -vector space として

$$(1.4) \quad \Gamma_{\otimes_k k[x_3]} = \left(\bigoplus_{j=0}^l f_{a+j} k[x_3] \right) \oplus \left\{ (k[x_3]\text{-free module}) \oplus (k\text{-free module}) \right\}.$$

step 3) x_* は R/I regular と思ってよいから (1.2), (1.4) より

$$(1.5) \quad I = f_0 k(0) \oplus \bigoplus_{i=1}^l f_i k(1) \oplus \bigoplus_{j=1}^l f_{a+j} k(2)$$

となることがわかる。

ここまでで (1), (2) を満たすような整数列 $(a; n_0, \dots, n_a; n_{a+1}, \dots, n_{a+l})$ はできた。(3) については次のようにある。

step 4) (1.3) を $k(2)$ -modules の exact sequence にもちあわせる。

$$0 \longrightarrow k(2)[-n^2] \xrightarrow{\tilde{B}} \Gamma_{\otimes_k k(2)} \xrightarrow{(\gamma_1, \dots, \gamma_c)} R/I \longrightarrow 0.$$

これから得られる exact sequence $(n := (x_3, x_*) k(2))$

$$0 \longrightarrow H_n^1(\mathcal{F}) = H_n^1(R/I) \longrightarrow H_n^2(k(2)[-n^2]) \xrightarrow{\tilde{B}} H_n^2(\Gamma_{\otimes_k k(2)})$$

に、 $\text{Hom}_k(\cdot, k)$ をほどこした後、 $k(2)$ -module としての duality を用いると、minimal generators から始まる free resolution

$$\Gamma_{\otimes_k k(2)}[-2] \xrightarrow{{}^t \tilde{B}} k(2)[-n^2-2] \longrightarrow \text{Ext}_{k(2)}^2(H_n^1(R/I), k(2))[-2] \longrightarrow 0$$

を得る。一方 (3) の resolution から *minimal free resolution*

$$k(z)[\bar{E}^1 - 2] \xrightarrow{+G} k(z)[\bar{E}^2 - 2] \longrightarrow \operatorname{Ext}_{k(z)}^2(H_n^1(R/I), k(z))[-2] \longrightarrow 0$$

が得られ、両者を比較して $\bar{\pi}^2 = \bar{E}^2$ (up to permutation) となる。

Remarks 1) $B(X)$ が X で一意的に定まることは条件

(1), (2), (3) より明らかである。

2) X が arithmetically Cohen-Macaulay $\iff \ell = 0$ 。

この場合の定義は [G-P.1] にある。

3) resolution (1.3) が minimal であるから $1 \leq j \leq \ell$ に対して $f_{a+j}(x_1, x_2, 0, 0) = 0$ となる。

§2. I の Free Resolution

M を graded R -module, $s_1, \dots, s_\ell, t_1, \dots, t_m, u_1, \dots, u_n$ を M の斉次な元で次の直和が成立するものとする。

$$M = \left(\bigoplus_{i=1}^{\ell} s_i k(0) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m t_i k(1) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n u_i k(2) \right).$$

$V = (s_1, \dots, s_\ell, t_1, \dots, t_m, u_1, \dots, u_n)$ とおく。 M は R -module であるから、 $\phi_{1i}, \psi_{1i}, \psi_{2i} \in k(0)^\ell \oplus k(1)^m \oplus k(2)^n \subset R^{\ell+m+n}$ が存在して

$$\begin{cases} x_1 t_i = V \cdot \dot{\varphi}_{1i} & (1 \leq i \leq m) \\ x_1 u_i = V \cdot \dot{\psi}_{1i}, \quad x_2 u_i = V \cdot \dot{\psi}_{2i} & (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

が成立する。 $e_i = {}^t(\underbrace{0, \dots, 0}_{l+i-1}, 1, 0, \dots, 0)$, $e'_i = {}^t(\underbrace{0, \dots, 0}_{l+m+i-1}, 1, 0, \dots, 0)$ として

$$\begin{cases} \varphi_{1i} = x_1 e_i - \dot{\varphi}_{1i} & (1 \leq i \leq m) \\ \psi_{1i} = x_1 e'_i - \dot{\psi}_{1i}, \quad \psi_{2i} = x_2 e'_i - \dot{\psi}_{2i} & (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \text{Fact 1} \quad \text{Ker}(R^{l+m+n} \xrightarrow{V} M) \\ = \left(\bigoplus_{i=1}^m \varphi_{1i} R(0) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \psi_{1i} R(0) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \psi_{2i} R(1) \right). \end{aligned}$$

証明は [A.1; Theorem 1.6] をみよ。

さて、このことを先の ideal I に用いて I の free resolution を計算すると次のようなものが得られる。ただし minimal とは限らないことに注意する。

$$(2.1) \quad 0 \longrightarrow R^b \xrightarrow{\lambda_3} R^{a+2b} \xrightarrow{\lambda_2} R^{a+b+1} \xrightarrow{\lambda_1} I \longrightarrow 0$$

$$\lambda_1 = (f_0, f_1, \dots, f_{a+b})$$

$$\lambda_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} \underbrace{v_{01}}_a & \underbrace{v_{02}}_a & \underbrace{0}_a \end{array} \right]_1, \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} -v_4 \\ -v_5 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$(2.2) \begin{cases} 1) \ x_1 1_a - v_1, v_{01}, v_{02}, v_2 \text{ の成分は } k(1) \text{ の元。} \\ 2) \ x_1 1_a - v_3, x_2 1_a - v_5, v_4, v_{21} \text{ の成分は } k(2) \text{ の元。} \\ 3) \ v_4 \equiv 0 \pmod{(x_3, x_4)k(2)}. \end{cases}$$

$$(2.3) \quad W = \begin{bmatrix} v_{01} & 0 \\ v_1 & v_4 \\ v_2 & v_5 \end{bmatrix} \text{ とおくと } f_i = (-1)^i \det W^{(i)} / \det v_5$$

(W の 3 行は 0 から始まる)

Remark. λ_3 の計算、および (2.2) の内容は、§1 で述べた存在証明からは明白とはいえないが、細かいところにまで立ち入り考えればわかる。(2.3) は free resolution の構造定理よりの帰結。詳しくは [A.2; §1] を見よ。

Fact 2. $\text{Hom}_R(H_*(\mathcal{F}), k)$

$$\cong R[\bar{n}^2 - 2] / I_m^R({}^t \lambda_3)$$

$$= R[\bar{n}^2 - 2] / (I_m^{k(2)}({}^t v_3) \oplus I_m^{k(1)}({}^t v_5) \oplus N)$$

$$\cong k(2)[\bar{n}^2 - 2] / N,$$

$$\text{ただし } N = \sum_{i \geq 0} I_m^{k(2)} \{ ({}^t v_5)^i \cdot {}^t v_4 \} \subset (x_3, x_4) k(2)[\bar{n}^2 - 2],$$

$${}^t v_5 = x_2 1_a - v_5.$$

証明は [A.2 ; pp 802-803] を見よ。

Examples. (1). 次数 a と n ($a \leq n$) の曲面の完全交叉.

$$B = (a; n, n+1, n+2, \dots, n+a-1).$$

(2). $a=2$ となる integral curve.

$$B = (2; n, n+1) \quad (\text{完全交叉})$$

$$B = (2; n^2; n^l) \quad (n=2, l=0 \text{ 又は } n \geq 3, l \leq n-2)$$

(3). arithmetically Buchsbaum curve $\iff m H_*^1(\mathcal{F}) = 0$

$$(m_i = (x_1, x_2, x_3, x_4)R) \iff \bar{v}_3 \equiv \bar{v}_5 \equiv 0 \pmod{(x_3, x_4)R(2)},$$

$$N = I_m^{R(2)}(x_3 1_e, x_4 1_e) \quad (\text{ただし } \bar{v}_3 = x_1 1_e - v_3). \quad \text{またこのとき}$$

$$H_*^1(\mathcal{F}) \cong R[-(\bar{n}^2-2)] \quad \text{となっている。これらより}$$

$$B = (a; \bar{m}, \bar{n}^2, \bar{n}^2; \bar{n}^2) \quad (\text{up to permutation}).$$

ただし $\bar{m}$ はある整数列。I の生成元をとりかえれば、

$$v_5 = x_2 1_e, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 1_e \\ x_4 1_e \end{bmatrix}$$

と考えてよい。(2.1) より $\lambda_2 \lambda_3 = 0$ であるが、今の場合これは解ける。このこと、(2.3) より arithmetically Buchsbaum curve はほとんどすべて把握できるといえる [A.2; §3]。

(4). $l=1$ のとき、 $v_3 = x_1$, $v_5 = x_2$ としてよい。 v_4 は $R(2)^4$ の元となる。関係式 $\lambda_2 \lambda_3 = 0$ はこの場合も容易に解け (c.f. [A.1; §4])、 $l=1$ となる curve もだいたい把握できる。

例えば次のことがわかる。

$a \geq 3$, $n_{a+1} \geq n_a$ のとき, $B(X) = (a; n_1, \dots, n_a; n_{a+1})$ となる integral curve X が存在するための必要十分条件は, $a, n_1, \dots, n_a$ で定まる整数 $\rho(a, n_1, \dots, n_a)$ があって, $n_{a+1} \leq \rho(a, n_1, \dots, n_a)$, かつ $n_i \leq n_{i+1} \leq n_i + 1$ ($1 \leq i \leq a-1$) (c.f. [A.1; Proposition 4.4])。

§3. Integral Curve についての Remarks.

Definition. $(z_i)_{i \geq 1}$ が整数列で, すべての i に対して $z_i \leq z_{i+1} \leq z_i + 1$ となるとき, (z_i) は connected であるといふ。

以下考える curve X は integral であるを仮定し, その basic sequence $B(X) = (a; \bar{n}', \bar{n}'') = (a; n_1, \dots, n_a; n_{a+1}, \dots, n_{a+c})$ についてわかっていふことを述べる。講演の後にまとめたことも書いておく。

(1). [A.3; Corollary 1.2, 1.3], $\bar{n}'$ は connected で (かつ

$$\text{rank}_*(U_i) \pmod{m} \geq \#\{n_1, n_2, \dots, n_a\} - 1.$$

(2). [G-P.1; Théorème 2.5], $c=0$ ならば, $B(X) = (a; \bar{n}')$ となる integral curve X が存在する $\iff \bar{n}'$ が connected.

(3). $2 \leq a' \leq a$ を満たすある整数 a' に対して $n_i = n_{i+1} - 1$ ($1 \leq i \leq a'$) が成立すれば、 $n_{a'} \leq n_{a+1}$ である。

(4). $n_1 = n_2$ で、 $3 \leq a' \leq a$ を満たすある整数 a' に対して $n_i = n_{i+1} - 2$ ($2 \leq i \leq a'$) とする。 $l' = \max\{j \mid (n_{a+1}, n_{a+2}, \dots, n_{a+j}) \text{ が connected}\}$ とおく。そして

1) $n_{a+l'} = n_{a+l'-1}$ ならば $j_0 = \min\{j' \mid n_{a+j} = n_{a+l'} - (l' - 1 - j), j' \leq l' \leq l'-1\}$

2) $n_{a+l'} \neq n_{a+l'-1}$ ならば $j_0 = \min\{j' \mid n_{a+j} = n_{a+l'} - (l' - j), j' \leq l' \leq l'\}$

とおく。このとき $n_{a'} \leq n_{a+j_0}$ が成立する。

(5). $n_i = n_{i+1} - 1$ ($1 \leq i \leq a$) であるとする。このとき $l \geq 3$ としても $(n_{a+1}, n_{a+2}, n_{a+3})$ は connected となる。また、 $l' = \max\{j' \mid n_{a+j} = n_{a+1} + j - 1, 1 \leq j \leq j'\}$ とおくと、 $l' < l$ で $n_{a+l'+1} = n_{a+l'}$ が成立する。(3)より $n_a \leq n_{a+1}$ も成立する。

(4)と(5)の内容はもっと改善されるべきであると思われる。筆者は(5)の仮定が成立するような integral curve の例を知らない。(3)~(5)の証明には次の事実を用いる。 i). $\text{length}(H_*^1(\mathcal{F})) < \infty$ ii). $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$. iii). (1)の内容 iv). §1の $H_*^1(\mathcal{F})$ の $\mathbb{R}(2)$ -module としての minimal free resolution に出てくる $\bar{\mathcal{E}}$ は、座標 x_1, x_2, x_3, x_4 を少し動かしても変わらない。

証明は書くと長くなるので省略する。i), ii), iii) がどのように用いられるかは [A.3; Lemma 1.4] をみるとわかる。

X の degree Σd , arithmetic genus を g とおくと

$$\begin{cases} d = \sum_{i=1}^a n_i - \frac{1}{2}a(a-1) - b \\ g = 1 + b - \frac{1}{6}a(a-1)(a-5) + \sum_{i=1}^a \frac{1}{2}n_i(n_i-3) - \sum_{j=1}^b n_{a+j} \end{cases}$$

今まで述べた条件のほかに、Riemann-Roch の定理、Castelnuovo の定理 ($H^1(\mathcal{F}_v) = 0$, $v \geq d-2$) などを満たすような数列 $(a; n_1, \dots, n_a; n_{a+1}, \dots, n_{a+b})$ を $d=10$, $0 \leq g \leq 12 = [1 + \frac{1}{6}d(d-3)]$ (c.f. [G-P.2; p401]) について computer を用いて計算してみると、次のようなことになる。

$$\textcircled{1} (d, g) = (10, 12)$$

$$(2; 7^2; 7^3), (3; 4^3, 5)$$

$$\textcircled{2} (d, g) = (10, 11)$$

$$(3; 4, 5^2; 5), (4; 4^4), (4; 4^3, 5; 4)$$

$$\textcircled{3} (d, g) = (10, 10)$$

$$(3; 4, 5^2; 6), (3; 5^3; 5^2), (4; 4^3, 5; 5)$$

$$\textcircled{4} (d, g) = (10, 9)$$

$$(3; 4, 5^3; 7), (3; 5^3; 5, 6), (4; 4^3, 5; 6), (4; 4^2, 5^2; 5^2)$$

$$\textcircled{5} (d, g) = (10, 8)$$

$$(3; 5^3; 5, 7), (3; 5^3; 6^2), (4; 4^2, 5^2; 5, 6), (4; 4, 5^3; 5^3)$$

$$\textcircled{6} (d, g) = (10, 7)$$

$$(2; 8^2; 8^5), (3; 5^3; 5, 8), (3; 5^3; 6, 7), (3; 5^2, 6; 6^3), (4; 4^2, 5^2; 5, 7)$$

$$(4; 4^2, 5^2; 6^2), (4; 4, 5^3; 5^2, 6), (4; 4, 5^2, 6; 5^3, 6), (4; 5^4; 5^4)$$

以下だんだん増えていき、 $(d, g) = (10, 0)$ ではおよそ 110 個くらい出てくる。これらすべてが実際に integral curve の basic sequence になっているとはとても思えず、条件は不十分であるといえる。上にあげたもので $g \geq 8$ については、 $(4; 4^2, 5^2; 5, 6)$, $(3; 5^3; 5, 7)$ を除いて、すべて実際に integral curve に対応することが確かめられている。 $(d, g) = (10, 9)$ の場合について少し述べよう。 C_0 を $\Sigma_1 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ の exceptional divisor, f を $\Sigma_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の fiber とする。 S_0 を $\Phi|_{C_0+2f}: \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{P}^4$ の image を general な点から $\mathbb{P}^4$ へ projection して得られた 3 次曲面 (c.f. [G-P.2; Appendice B]), S を smooth cubic surface とする。

$$(3; 4, 5^2; 7) \text{-----} S_0 \text{ 上の曲線} \sim 3C_0 + 7f$$

$$(3; 5^3; 5, 6) \text{-----} S_0 \text{ 上の曲線} \sim 4C_0 + 6f \quad \text{又は}$$

$$S \text{ 上の曲線} \sim 7l - 3e_1 - 2(e_2 + e_3 + e_4) - e_5 - e_6$$

$$(4; 4^3, 5; 6) \text{-----} \S 2 \text{ の Example (4) で述べたもの。}$$

$$(4; 4^2, 5^2; 5^2) \text{-----} \text{次の } \S \text{ で } u \text{ と } v \text{ のつくり方を述べる。}$$

§4. 与えられた $H_*(\mathcal{F})$ と Basic Sequence を持つような curve

長さ有限の R -module M が与えられ、その $k(z)$ -module としての minimal free resolution が general な座標に対しては

$$(4.1) \quad 0 \longrightarrow k(z)[-\bar{E}^2] \xrightarrow{G} k(z)[-\bar{E}^1] \xrightarrow{H} k(z)[-\bar{E}^0] \xrightarrow{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} M \longrightarrow 0$$

となつていふとせよ。ただし、 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ は M の生成元で、 $\bar{E}^i$ ($i=0,1,2$) は §1 と同様。 M は R -module であるから

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p)(x_1 1_p - P) = 0, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_p)(x_2 1_p - Q) = 0$$

となる $k(z)$ の元を成分とする $p \times p$ 行列 P, Q がある。また整数列 $(a; n_1, \dots, n_a) = (a; \bar{n}')$ で $a \leq n_1 \leq \dots \leq n_a$, $n_i \leq E_i^2$ ($1 \leq i \leq a$) を満たすものが与えられ次のようになつていふとする。

$$(*) \quad (\bar{n}' + 1, \bar{E}^0 + 2, \bar{E}^1 + 1, \bar{E}^1 + 1) = (\bar{E}^1 + 2, \bar{m}) \quad (\text{up to permutation})$$

ただし $\bar{m} = (m_1, \dots, m_{a+p+f})$ はある整数列。このとき

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{E}^0 - 1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{n}') \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{E}^0 - 1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{E}^1)$$

とおいて rank $1+a+p+f$ の vector bundle $\mathcal{F}$ を完全列

$$(4.2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{\mathcal{E}}^0) \longrightarrow 0$$

$$\mu = (0 : x_1 1_P - P : 0 : x_2 1_P - Q : H)$$

によつて定める。直接計算すれば $c_1(\mathcal{F}) = -\sum_{\lambda=1}^{a+p+q} m_\lambda$ となる。
 も $H^0(\mathcal{F}(\bar{m})) := H^0(\bigoplus_{i=1}^{a+p+q} \mathcal{F}(m_i))$ の元 $\tilde{s}$ の dependency locus
 が $\mathbb{P}^3$ の中で codimension 2 であれば、その ideal sheaf を $\mathcal{I}$
 とおくと完全列

$$(4.3) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{m}) \xrightarrow{\times \tilde{s}} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

を得る。これから $\mathcal{I}$ はある curve の ideal sheaf となっ
 ていることがわかり $H_*^1(\mathcal{I}) \cong M$ 。実際には、 $\mathbb{P}^3$ の curve の
 ideal sheaf は皆このようにしてできる locally free resolution
 をもつ (c.f. [A.2; §2])。

$$\text{Fact 3.} \quad h^0(\mathcal{I}(m)) = \binom{m-a+3}{3}_+ + \sum_{\lambda=1}^a \binom{m-n_\lambda+2}{2}_+ + \sum_{i=1}^r \binom{m-\varepsilon_i^2+1}{1}_+$$

証明には、(4.1), (4.2), (4.3), (*) を用いて直接 $h^0(\mathcal{I}(m))$
 を計算すればよい。

$\tilde{s}$ によつて定まる上の curve を X と書くと、(4.1) と
 Fact 3 より $B(X) = (a; \bar{n}; \bar{\varepsilon}^2)$ (up to permutation of $\bar{\varepsilon}^2$) が成
 立する。

Example. $(4; 4^2, 5^2; 5^2)$ の場合。

$$\begin{cases} A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ V_1 = x_1 1_2 - x_3 A, \quad V_2 = x_2 1_2 - x_4 B \\ H_1 = x_3 1_2 - x_4 C, \quad H_2 = x_4^2 1_2, \quad H = (H_1, H_2) \end{cases}$$

とし、

$$M = R[-2]^2 / I_M^R(V_1, V_2, H)$$

とおく。 M は $k(2)$ -module としての minimal free resolution

$$0 \longrightarrow k(2)[-5^2] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -H_2 \\ H_1 \end{pmatrix}} k(2)[-3^2, -4^2] \xrightarrow{H} k(2)[-2^2] \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を持つ。(出てくる数 $2, 3, 4, 5$ は、 x_1, x_2, x_3, x_4 を変へても変わらない。) rank 6 の vector bundle $\mathcal{E}$ を完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^6 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^2 \xrightarrow{(V_1, V_2, H)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^2 \longrightarrow 0$$

により、定義すると (4.2) における $\mathcal{F}$ は $\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4, -4^2, -5^2)$ と一致する。一方 $(\bar{\pi}' + 1, \bar{\varepsilon}^0 + 2, \bar{\varepsilon}' + 1, \bar{\varepsilon}' + 1) = (5^2, 6^2, 4^2, 4^2, 5^2, 4^2, 5^2)$
 $= (\bar{\varepsilon}' + 2, \bar{m})$ (up to permutation) より $\bar{m} = (4^6, 5^4)$ 。よって (4.3) は

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4^6, -5^4) \xrightarrow{\tilde{S}} \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4^3, -5^2) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

となる。\$E\$ が十分 general にとれば、これは

$$(4.4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4^3, -5^2) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

に還元されると思ってよい。

Fact 4. 1). $\mathcal{E}(5)$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ 上の global sections で生成される。

2). $H^0(\mathcal{E}(4))$ の k -vector space としての basis は

$$\Psi := \begin{bmatrix} -V_2 & -H_1 & 0 \\ V_1 & 0 & -H_1 \\ 0 & V_1 + \alpha_4[A, C] & V_2 \\ 0 & C[A, C] & [B, C] \end{bmatrix}$$

の列により与えられる。ただし $[,]$ は Lie bracket.

3). Ψ によって与えられる $\mathcal{E}(4)$ の 6 つの sections からなる行列を $\tilde{\Psi}$ とおくと $\det(\tilde{\Psi})$ によって定まる divisor は $x_1^2 - x_3^2 - x_2^2 + x_4^2 = 0$ で smooth.

4). $H^0(\mathcal{E}(4^3)) \ni \tilde{s}_i$ を general にとると完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4^3) \xrightarrow{\tilde{s}_i} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow 0$$

によって定まる sheaf $\mathcal{E}'$ は locally free であり、従って (4.4) のかわりに

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5^2) \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

を考えるとよい。

5). 体 k の標数は 0 だから、1) より、十分 general な $H^0(E'(5^2))$ の元 $\tilde{S}_2$ を選べば、これが smooth curve X で $B(X) = (4; 4^2, 5^2; 5^2)$ となるものを定めることとなる。 $H^1(\mathcal{F}) = 0$ であるから X は connected で、smooth irreducible curve となっていることが判明する。

Remarks 1). 上の例はもっと一般化できている。

2). 上のようになれば、うまく与えられた basic sequence を持つ smooth で irreducible な arithmetically Buchsbaum curve をつくることは容易である。

References

[A.1] Amasaki, M., Preparatory Structure Theorem for Ideals Defining Space Curves, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19 (1983), 493-518.

[A.2] _____, On the Structure of Arithmetically Buchsbaum Curves in $\mathbb{P}_k^3$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20 (1984), 793-837.

[A.3] _____, Examples of Nonsingular Irreducible Curves Which Give Reducible Singular Points of $\text{red}(H(d, s))$,

Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985), 761-786.

[G-P.1] Gruson, L. et Persike, C., Genre des courbes de l'espace projectif, Proceedings, Tromsø, Norway 1977, Lecture Notes in Mathematics No. 687, Springer-Verlag.

[G-P.2] _____, Genre des courbes de l'espace projectif (II), Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t. 15 (1982), 401-448.