

Injective envelopes and Morita equivalence

富山大教育 漢名 正道 (Masamichi Hamana)

本稿ではいくつかの categories における injective envelopes の存在とそれらに関係した結果について述べる。また, W^* 代数の場合の自然な一般化として単調完備 C^* -代数の連続接合積を導入する。

1. Triple systems と森田同値性.

C^* -代数 C の triple product: $[x, y, z] = xy^*z$ に関して閉じているノルム閉線型部分空間を C の triple subsystem と呼ぶ。また, ある C^* -代数の triple subsystem として実現できる線型空間を triple system と呼ぶ。triple system は次のように特徴付けられる [3, 15]:

X が triple system $\iff \exists C^*$ 代数 $C_X, \exists$ 射影 $e, f \in M(C_X)$ (C_X の multiplier algebra): $X = eC_Xf \subset C_X$.

実際, $(\Leftarrow)$ は明らかである。 $(\Rightarrow)$ を示すために, X を triple subsystem として含む C^* -代数 C を取る。そのとき

$$K_\ell(X) = \overline{\text{lin}}(XX^*), \quad K_r(X) = \overline{\text{lin}}(X^*X)$$

($\overline{\text{lin}}$ は closed linear span を表す) は C の C^* -部分代数であり,

$$C_X = \begin{pmatrix} K_\ell(X) & X \\ X^* & K_r(X) \end{pmatrix} \subset C \otimes M_2$$

は $C \otimes M_2$ の C^* -部分代数である。 $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 は $M(C)$ の単位元) とおくと $X \cong \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e C_X f$ (triple systems として同型) となる。ここで C_X の選ぶ方は C の選ぶ方に依るが, $K_\ell(X)$, $K_r(X)$ は C には依らず X だけから定まる。

triple system X に対し, $A = K_\ell(X)$, $B = K_r(X)$ とおくと X は

$$\langle x, y \rangle_\ell = xy^*, \quad \langle x, y \rangle_r = y^*x, \quad x, y \in X$$

によって定義される A -値内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\ell$, B -値内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ をもつ A - B -bimodule となる。逆に, C^* -代数に値をもつ内積加群 [11, 13] は (本質的には) triple system から上記のようにして得られる。 X 上の adjoint をもつ有界 B -加群自己準同型全体 (T の adjoint T^* は $\langle T^*x, y \rangle_r = \langle x, Ty \rangle_r$, $x, y \in X$ によって定義される) を $M_\ell(X)$ と表し, $xy^* \in A$ を $(X \ni z \mapsto xy^*z \in X) \in M_\ell(X)$ と同一視することによって $A \subset M_\ell(X)$ と見做すと, $M_\ell(X) = M(A)$ となる [9]。同様に $M_r(X) \supset B$ が定義され, $M_r(X) = M(B)$ となる。このとき Rieffel [13] の意味での強森田同値性, 森田同値性は次のよう

に定式化できる [3]: C^* -代数 A, B が 強森田同値 (resp. 森田同値) であるとは, ある triple system X が存在して, $A = K_\ell(X)$, $B = K_r(X)$ (resp. $A = M_\ell(X)$, $B = M_r(X)$) とするときをいう。この X は A - B -equivalence bimodule と呼ばれる。

2. Category $\mathcal{C}$.

ある C^* -代数のノルム閉線型部分空間として実現できる線型空間を operator space と呼ぶ。operator spaces $V \subset C$, $W \subset D$ (C, D は C^* -代数) に対し, $\varphi: V \rightarrow W$ が 完全有界 (resp. complete isometry, ...) とは, $\|\varphi\|_{cb} \equiv \sup_n \|\varphi \otimes id_n\| < \infty$ (resp. $\varphi \otimes id_n$ ($n=1, 2, \dots$) が全て isometry, ...) , 222 $\varphi \otimes id_n: V \otimes M_n \rightarrow W \otimes M_n$ であり, $V \otimes M_n$ は C^* -代数 $C \otimes M_n$ の部分空間としてノルムを入れる, となることをいう。operator spaces と完全有界写像から成る category を $\mathcal{C}$ とする。 $\mathcal{C}$ における "同型" を onto complete isometry として定義し, $V, W \in \mathcal{C}$ が completely isometric のとき $V \sim W$ と書く。 $V \in \mathcal{C}$ が C^* -代数 (resp. triple system, ...) であるとは, $V \sim A$ とする C^* -代数 A (resp. triple system, ...) があるときをいう。(A, B が共に C^* -代数 のとき $A \sim B$ ならば $A \cong B$ ($*$ -isomorphic) となる。 A, B が triple systems のときも同様。従って上記の A は一意に定まる。)

$V \in \mathcal{C}$ が injective であるとは, $\forall W, \forall Z \in \mathcal{C}, W \subset Z,$

$\forall$ 完全有界な $\varphi: W \rightarrow V$, $\exists$ 完全有界な $\hat{\varphi}: Z \rightarrow V$ s.t.

$\hat{\varphi}|_W = \varphi$, $\|\hat{\varphi}\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}$, とするときをいう。既知の結果

と比較するために, 別の category $\mathcal{G}'$ を考える。ここで $\mathcal{G}'$ の対象は operator systems (= operator spaces $V \subset C$ (C は C^* 代数) s.t. C の単位元 $1 \in V$, $x \in V \Rightarrow x^* \in V$) であり, $\mathcal{G}'$ の射は完全正值写像である。この場合と同様に $\mathcal{G}'$ における

injectivity が定義されるが, それは通常の意味での *injectivity* [2] である。Arneson [1] (resp. Paulsen [12], Wittstock) の結果は $B(H)$ が $\mathcal{G}'$ (resp. $\mathcal{G}$) において *injective* であることを意味する。従って任意の $V \in \mathcal{G}$ は *injective operator space* $B(H)$ に含まれ, このとき定義より

V が *injective* $\iff V$ は $B(H)$ 上の *completely contractive projection* の像となる。

$\mathcal{G}'$ においては, *injective operator system* = *injective C^* 代数* (i.e., *injective operator system* は C^* 代数の構造が一意的に定まる [2]) であるが, 以下で見るように, $\mathcal{G}$ において

injective operator space = pAq (A は *injective C^* 代数*, p, q は A の射影)

となり, 従ってこれは *triple system* となる。(任意の C^* 代数上の *completely contractive projection* の像が *triple system* となることは知られている [14].)

$\mathcal{G}'$ の対象が一意的な injective envelope をもつことは知られている [5] が, この結果が次のように拡張できる。

Theorem 1. (i) 任意の operator space V は一意的な injective envelope $I(V)$ (i.e., V を含む $\mathcal{G}$ の最小の injective object) をもつ。更に $I(V) = pAq$, A は injective C^* -代数, $p, q \in A$ は射影, $C(p) = C(q) = 1$ ($C(\cdot)$ は中心台を表す) と表せる。

(ii) (i) において V が triple system とすれば, V は triple system $I(V) = pAq$ の triple subsystem,

$$I(M_\ell(V)) = pAp, \quad I(M_r(V)) = qAq$$

となり, $I(V)$ は $pAp - qAq$ -equivalence bimodule となる。従って injective envelope を取ることによって 森田同値性は保存される。

Remark. (ii) における $V \subset A$ の A における単調閉包 (V を含み, A における順序収束に関して閉じている最小の部分空間) を $\overline{V}$ と表すと, $\overline{V}$ は単調完備 C^* -代数 $\overline{M_\ell(V)}, \overline{M_r(V)}$ (C^* -代数 B に対し $\overline{B}$ は B の正則単調完備化 [6] を表す) の間の森田同値性を定義する equivalence bimodule となる。特に V が単調完備 C^* -代数上の内積加群のとき, $\overline{V}$ は [8] の意味での V の自己共役完備化 (V を含む最小の自己共役内積加群) となる。

[5] で示された operator system に対する (Arveson [1] の意味での) Šilov 境界の存在性を $\mathcal{O}$ における結果に拡張しよう。

operator space V が C^* -代数 C に含まれているとき,

$$T(V; C) = (V \text{ を含む } C \text{ の最小の triple subsystem}),$$

$$K_\ell(V; C) = C^*(VV^*), \quad K_r(V; C) = C^*(V^*V)$$

($C^*(\{v\})$ は $\{v\}$ で生成される C^* -代数を表す) とおく。特に C として Theorem 1 (i) の A を取るとき, これらをそれぞれ $T(V)$, $K_\ell(V)$, $K_r(V)$ と表す。triple systems X, Y に対し $\varphi([x, y, z]) = [\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)]$, $x, y, z \in X$ を満たす線型写像を triple homomorphism と呼ぶ。(C^* -代数の間の $*$ -準同型と同様に, triple homomorphism は常に contractive であり, その像が triple subsystem (i.e. ノルム閉) となることが示せる。) 次の結果は, C の取り方によって変化する $T(V; C)$ の中で $T(V)$ が最小のものであることを主張する。そして $\text{Ker } \varphi$ が operator system の場合の Šilov 境界に相当するものである。

Theorem 2. 上の記号を用いる。そのとき $T(V; C)$ から $T(V)$ の上への triple homomorphism φ が存在する。そして $xy^* \mapsto \varphi(x)\varphi(y)^*$ によって $K_\ell(V; C)$ から $K_\ell(V)$ の上への $*$ -準同型が誘導される ($K_r(\cdot)$ の場合も同様)。

3. Category $\mathcal{C}_G$.

G を左不変 Haar 測度 dt をもつ局所コンパクト群とする。
この節では前節の結果を G が連続に作用している場合に拡張する。 $\mathcal{C}_G$ を次のように定義される G -modules と G -morphisms から成る category とする: 先づ $L^\infty(G)$ を作用

$$(f \cdot x)(s) = \int f(t) x(st) dt \quad (x \in L^\infty(G), f \in L^1(G))$$

によって左 Banach $L^1(G)$ -加群と考える。任意の operator space V に対し $V \otimes L^\infty(G)$ の Fubini 積 $V \bar{\otimes} L^\infty(G)$ を以下で定義する [7]: $V \subset B(H)$ のとき

$$V \bar{\otimes} L^\infty(G) = \{ x \in B(H) \bar{\otimes} L^\infty(G) \mid L_f(x) \in V, \forall f \in L^1(G) = L^\infty(G)_* \}$$

とかく $(B(H) \bar{\otimes} L^\infty(G))$ は W^* -テンソル積, $L_f: B(H) \bar{\otimes} L^\infty(G) \rightarrow B(H)$ は左 slice map を表す)。この $V \bar{\otimes} L^\infty(G)$ は $B(H) \cap V$ の選ぶ方に依らず (complete isometry を除いて) 一意に定まる。
 $V \bar{\otimes} L^\infty(G)$ は $L^1(G)$ -加群の構造を

$$R_g(f \cdot x) = f \cdot R_g(x) \quad (x \in V \bar{\otimes} L^\infty(G), f \in L^1(G), g \in V^*)$$

($R_g: V \bar{\otimes} L^\infty(G) \rightarrow L^\infty(G)$ は右 slice map) によって入れたものを canonical G -module と呼ぶ。そして一般の G -module を canonical G -module の $L^1(G)$ -部分加群として定義し, G -modules の間の完全有界 $L^1(G)$ -加群準同型を G -morphism と呼ぶ。

$\mathcal{C}$ の場合と同様に $\mathcal{C}_G$ における injectivity (G -injectivity)

と呼ぶ) が定義される。次の補題により $\mathcal{G}$ における injective object の存在が保証される。

Lemma. $V \in \mathcal{G}$ が injective ならば, $V \otimes L^\infty(G)$ は G -injective G -module である。

従って任意の G -module X は $B(H) \otimes L^\infty(G)$ の形の G -injective G -module の部分加群となり, そして

X が G -injective $\iff X$ は $B(H) \otimes L^\infty(G)$ 上の idempotent G -morphism の像となる

ことと $B(H) \otimes L^\infty(G)$ が $\mathcal{G}$ においても injective であることに注意すれば,

G -injective $\Rightarrow$ injective

となることが分る。

C^* -代数 (resp. 単調完備 C^* -代数, ...) と completely isometric なる G -module を C^* - G -module (resp. 単調完備 C^* - G -module, ...) と呼ぶ。 G -module X に対し X の fixed point subspace X^G を

$$X^G = \{x \in X \mid f \cdot x = \langle 1, f \rangle x, \forall f \in L^1(G)\}$$

($\langle 1, f \rangle = \int 1 \cdot f(t) dt$) によって定義する。

Theorem 3. (i) 任意の G -module X は一意的に G -injective envelope $I_G(X)$ (i.e. X を部分加群として含む最小の G -injective G -module) をもつ。更に $I_G(V) = pAg$ (A は

G -injective C^* - G -module, p, q は A^G の射影) と表せる。

(ii) (i) において X が unital C^* -代数 (resp. 単調完備 C^* -代数), $1 \in X^G$ とすれば, $I_G(X)$ は X を C^* -部分代数 (resp. 単調閉 C^* -部分代数) として含む injective C^* -代数である。

4. G -module の接合積.

この節では, 初めに operator space 上の G -module structure が G の W^* -代数への action の自然な一般化になっていることを示し, 次に G -module の接合積を導入する。

G の W^* -代数 M への action は unital $*$ -isomorphism

$$\alpha: M \rightarrow M \bar{\otimes} L^\infty(G) \quad \text{s.t.} \quad (\alpha \bar{\otimes} \text{id}) \circ \alpha = (\text{id} \bar{\otimes} \alpha_G) \circ \alpha$$

(id は恒等写像) として定義される [10] (そして, これは強連続な G から $\text{Aut } M$ への群準同型 (普通の意味での action) と 1 対 1 に対応している)。ここで α_G は Hopf-von Neumann 代数 $L^\infty(G)$ の comultiplication:

$$\alpha_G: L^\infty(G) \rightarrow L^\infty(G) \bar{\otimes} L^\infty(G), \quad \alpha_G(x)(s, t) = x(st), \quad x \in L^\infty(G)$$

である。この定義に習って G の operator space X への action を complete isometry

$$\alpha: X \rightarrow X \bar{\otimes} L^\infty(G) \quad \text{s.t.} \quad (\alpha \bar{\otimes} \text{id}) \circ \alpha = (\text{id} \bar{\otimes} \alpha_G) \circ \alpha$$

として定義すると, $\alpha(X)$ は canonical G -module $X \bar{\otimes} L^\infty(G)$ の部分加群となり, 従って $X (\sim \alpha(X))$ には G -module の構造

が入る。逆に G -module $X (\subset V \otimes L^\infty(G): \text{canonical } G\text{-module})$ を与えるとき,

$$\text{id} \otimes \alpha_G: V \otimes L^\infty(G) \rightarrow V \otimes L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$$

は X を $X \otimes L^\infty(G)$ に写し, 従って $\alpha_X \equiv \text{id} \otimes \alpha_G|_X$ は上述の意味での action となる。以上から operator space X 上の G の action と X 上の G -module structure とは同一視できる。

Theorem 3 を用いると, G の action α_X のある種の性質は operator space X の性質から導けることが示せる:

Proposition 4. X を G -module とする。 X が単調完備 C^* -代数で, $1 \in X^G$ なるば, $\alpha_X: X \rightarrow X \otimes L^\infty(G)$ は unital normal $*$ -isomorphism となる。従って, 特に (M, G, α) の形の W^* -力学系と $1 \in M^G$ を満たす W^* - G -module M とは同じものである。また C^* -力学系 (A, G, α) (A は unital) は $1 \in A^G$, $\overline{L^1(G) \cdot A}^{\text{norm}} \text{ (ノルム閉包)} = A$ を満たす unital C^* - G -module A として特徴付けられる。

今後 $1 \in X^G$ を満たす単調完備 C^* - G -module X を 単調完備 C^* -力学系 と呼ぶことにする。

G -module X の接合積 $(X \rtimes_\alpha G (\alpha = \alpha_X) \text{ と表す})$ を次のように定義する: G の X 上の action $\alpha = \alpha_X$ に対し, $X \otimes B(L^2(G))$ 上の action $\tilde{\alpha}$ を

$$\tilde{\alpha} = \text{Ad}(1 \otimes V_G') \circ (\text{id} \otimes \sigma) \circ (\alpha \otimes \text{id}_{B(L^2(G))})$$

によって定義し (V_G, σ の定義は cf. [10]。但し [10] では左不変 Haar 測度を考えているので適当な修正が必要である。以下の W_G に関しても同様),

$$X \rtimes_{\alpha} G \equiv (X \otimes B(L^2(G)))^{\tilde{\alpha}} \text{ (fixed point subspace)}$$

とおく。特に X が単調完備 C^* -力学系なれば, $X \rtimes_{\alpha} G$ は単調完備 C^* -代数となり, これは W^* -代数の接合積の一般化である。

竹崎の双対定理を定式化するために G の operator space への coaction という概念を導入しよう。これは Kac 代数 $L^{\infty}(G)$ の代わりにその dual Kac 代数 $\mathcal{K}(G)$ (G の右正則表現によって生成される von Neumann 代数) を考えることによって得られる。

$(\text{id}_V \otimes \delta_G)(Y) \subset Y \otimes \mathcal{K}(G)$ を満たす 1 ルンバ 閉線型部分空間 $Y \subset V \otimes \mathcal{K}(G)$ (V は operator space, δ_G は $\mathcal{K}(G)$ の comultiplication) を co- G -module と呼ぶ, $\delta_Y \equiv \text{id}_V \otimes \delta_G|_Y$ を G の Y への coaction と呼ぶ。そのとき co- G -module の coaction に関する接合積が定義できる。 G -module X に対し $X \rtimes_{\alpha} G$ 上の coaction $\hat{\alpha}$, $(X \rtimes_{\alpha} G) \otimes B(L^2(G))$ 上の coaction $\tilde{\alpha}$ を

$$\hat{\alpha}(x) = \text{Ad}(1 \otimes W_G^*)(x \otimes 1), \quad x \in X \rtimes_{\alpha} G,$$

$$\tilde{\alpha} = \text{Ad}(1 \otimes W_G) \circ (\text{id} \otimes \sigma) \circ (\hat{\alpha} \otimes \text{id}_{B(L^2(G))})$$

によって定義し,

$$(X \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G \equiv ((X \rtimes_{\alpha} G) \otimes B(L^2(G)))^{\tilde{\alpha}}$$

とき, $(X \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\hat{\alpha}} G$ 上の second dual action $\hat{\hat{\alpha}}$ を

$$\hat{\hat{\alpha}}(x) = \text{Ad}(1 \otimes V_G')(x \otimes 1), \quad x \in (X \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\hat{\alpha}} G$$

と定義する。そのとき以下の意味で竹崎双対性が成立する:

Proposition 5. $X (\subset V \bar{\otimes} L^{\infty}(G))$: canonical G -module) を任意の G -module とし, $\alpha = \alpha_X$ とすると

$$\{(X \rtimes_{\alpha} G) \rtimes_{\hat{\alpha}} G, \hat{\hat{\alpha}}\} \cong \{\tilde{X} \bar{\otimes} B(L^2(G)), \tilde{\alpha}\},$$

ここで

$$\tilde{X} \equiv \{x \in V \bar{\otimes} L^{\infty}(G) \mid f \cdot x \in X, \forall f \in L^1(G)\}$$

(これは $V \bar{\otimes} L^{\infty}(G) \supset X$ の選が方に依らない)。

Remark. X を単調完備 C^* -力学系と仮定しても $\tilde{X} = X$ かどうかは一般には不明であるが, X が G -injective (又は G が離散群) ならば $\tilde{X} = X$ となる。

良く知られているように W^* -力学系はそれに含まれるある C^* -力学系の弱閉包として得られる。同様に, 任意の C^* -力学系とその単調完備化に付随して単調完備 C^* -力学系が得られることが分る:

Example. (A, G, α) を任意の C^* -力学系, B を A の任意の単調完備化 (i.e., A を含み, A によって生成される単調完備 C^* -代数),

$$\pi_{\alpha}: A \rightarrow C^b(G, A) \subset A \bar{\otimes} L^{\infty}(G) \subset B \bar{\otimes} L^{\infty}(G),$$

$$\pi_{\alpha}(x)(t) = \alpha_t(x), \quad x \in A, \quad t \in G$$

とすると $\pi_\alpha(A)$ の単調完備 C^* -代数 $B \overline{\otimes} L^\infty(G)$ における単調閉包 (C とする) は単調完備 C^* -力学系となる。

$\text{non-}W^*$ となる単調完備化 B (例えば A の正則単調完備化) を取れば, C は一般には $\text{non-}W^*$ となる。しかし B が $\text{non-}W^*$ であって C が W^* となる場合もある。

REFERENCES

- [1] W. Arveson, Subalgebras of C^* -algebras, Acta Math. 123(1969), 141-224.
- [2] M.-D. Choi and E.G. Effros, Injectivity and operator spaces, J. Funct. Anal. 24(1977), 156-209.
- [3] F. Combes and H. Zettl, Order structures, traces and weights on Morita equivalent C^* -algebras, Math. Ann. 265(1983), 67-81.
- [4] M. Hamana, Injective envelopes of C^* -algebras, J. Math. Soc. Japan 31 (1979), 181-197.
- [5] _____, Injective envelopes of operator systems, Publ. Inst. Math. Sci. 15(1979), 773-785.
- [6] _____, Regular embeddings of C^* -algebras in monotone complete C^* -algebras, J. Math. Soc. Japan 33(1981), 159-183.
- [7] _____, Tensor products for monotone complete C^* -algebras, I and II, Japan. J. Math.(N.S.) 8(1982), 259-283, 285-295.
- [8] _____, Modules over monotone complete C^* -algebras, 作用素論・作用素環論 研究集会記録 73-82(1980).
- [9] G.G. Kasparov, Hilbert C^* -modules: theorems of Stinespring and Voiculescu, J. Operator Theory 4(1980), 133-150.
- [10] Y. Nakagami and M. Takesaki, Duality for crossed products of von Neumann algebras, Lecture Notes in Math. 731, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1979).
- [11] W.L. Paschke, Inner product modules over B^* -algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 182(1973), 443-468.
- [12] V.I. Paulsen, Every completely polynomially bounded operator is similar to a contraction, J. Funct. Anal. 55(1984), 1-17.
- [13] M.A. Rieffel, Morita equivalence for C^* -algebras and W^* -algebras, J. Pure Appl. Algebra 5(1974), 51-96.
- [14] M.A. Youngson, Completely contractive projections on C^* -algebras, Quart. J. Math. Oxford (2) 34(1983), 507-511.
- [15] H. Zettl, A characterization of ternary rings of operators, Advances in Math. 48(1983), 117-143.