

表面孤立波及び内部孤立波の数値解と伝播過程の数値解析

Numerical solutions and simulations of surface/internal solitary waves

鹿児島大学大学院・理工学研究科 柿沼 太郎 (Taro Kakinuma)*

東北大学・災害科学国際研究所 山下 啓 (Kei Yamashita)**

北見工業大学・工学部 中山 恵介 (Keisuke Nakayama)***

* Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University

** International Research Institute of Disaster Science, Tohoku University

*** Faculty of Engineering, Kitami Institute of Technology

1. 序 論

Newton-Raphson 法を適用した手法により、表面孤立波、または、内部孤立波の数値解を求める。その際に、水面変動や、界面変動及び速度ポテンシャルに関する移流方程式を解き、収束解を得る。ここでは、変分原理に基づく非線形波動方程式系（柿沼, 2001）を基礎方程式系とする。本手法により得られた表面孤立波、または、内部孤立波の数値解を KdV 方程式及び Choi and Camassa (1999) の shallower version に基づく解や、大振幅内部孤立波を含む Euler 方程式の数値解（Grueira, 1997）と比較する。また、得られた孤立波解を初期条件として与え、表面孤立波、または、内部孤立波の 1 次元伝播過程の数値シミュレーションを行なう。

2. 表面波及び内部波の非線形方程式系

非粘性・非圧縮性流体の非回転運動を対象とする。互いに混合しない流体層を最上層から順に第 i 層 ($i=1, 2, \dots, l$) と呼ぶ。第 i 層の密度 ρ_i ($\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_l$) は、各層内で一様であり、時間に関して一定とする。静水状態における第 i 層の層厚を h_i とする。

第 i 層の速度ポテンシャルを $\phi_i(x, z, t) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \{f_{i,\alpha}(x, t) \cdot z^\alpha\}$ のように、 N 個のべき関数の重み付き級数に展開し、変分原理を適用すると、次式の非線形表面波・内部波方程式系が得られる（柿沼, 2001）。

$$\eta_{i,1}^\alpha \frac{\partial \eta_{i,1}}{\partial t} - \eta_{i,0}^\alpha \frac{\partial \eta_{i,0}}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ (\eta_{i,1}^{\alpha+\beta+1} - \eta_{i,0}^{\alpha+\beta+1}) \nabla f_{i,\beta} \right\} - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1} (\eta_{i,1}^{\alpha+\beta-1} - \eta_{i,0}^{\alpha+\beta-1}) = 0 \quad (1)$$

$$\eta_{i,j}^\beta \frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta_{i,j}^{\beta+\gamma} \nabla f_{i,\beta} \cdot \nabla f_{i,\gamma} + \frac{1}{2} \beta \gamma \eta_{i,j}^{\beta+\gamma-2} f_{i,\beta} f_{i,\gamma} + g \eta_{i,j} + \frac{p_{i,j} + P_i}{\rho_i} = 0 \quad (j=0 \text{ or } 1) \quad (2)$$

ここで、 $\eta_{i,0}$, $\eta_{i,1}$, $p_{i,0}$ 及び $p_{i,1}$ は、それぞれ、第 i 層の下面位置、上面位置、下面における圧力及び上面における圧力である。また、 $P_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\rho_i - \rho_k) g h_k$ である。

3. 定常進行波の非線形方程式系

一定速度 C で進行する、波形が不変の定常進行波では、 $\partial F / \partial t = -C \partial F / \partial x$ なる移流方程式が成り立つ。ここで、物理量 F は、水面変動 ζ , 界面変動 η , または、上記のように展開された速度ポテ

ンシャルの重み係数 f_{α} である。この移流方程式を非線形波動方程式系に代入して、時間微分項を消去することができる。例えば、表面波を対象とする場合、移流方程式を式(1)及び(2)に代入して、次式に示すような、位相速度 C で進行する定常表面波の非線形方程式系が得られる。

$$-C\zeta^{\alpha}\nabla\zeta + \frac{1}{\alpha+\beta+1}\nabla\{(\zeta^{\alpha+\beta+1}-b^{\alpha+\beta+1})\nabla f_{\beta}\} - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}(\zeta^{\alpha+\beta-1}-b^{\alpha+\beta-1})f_{\beta} = 0 \quad (3)$$

$$-C\zeta^{\beta}\nabla f_{\beta} + \frac{1}{2}\zeta^{\beta+\gamma}\nabla f_{\beta}\nabla f_{\gamma} + \frac{1}{2}\beta\gamma\zeta^{\beta+\gamma-2}f_{\beta}f_{\gamma} + g\zeta = 0 \quad (4)$$

4. 定常進行波の数値解の算出手法

位相速度が一定である定常進行波の解を求めるために、適切な側方境界条件の下で、Newton-Raphson 法を適用して収束解を算定する。ここでは、表面孤立波解、または、内部孤立波解を求める。このうち、式(3)及び(4)の表面孤立波解を求める手法は、次の通りである。

- (0) 表面孤立波の KdV 理論解、すなわち、水面変動 ζ_{KdV} 、位相速度 C_{KdV} 及び速度ポテンシャル ϕ_{KdV} を求める。その際に、水面変動と位相速度は、できる限り小さな値とする。なぜならば、このとき、KdV 理論解は、真値に近く、真値に近い適切な初期値を用いた場合に、比較的少ない回数の収束計算によって収束解が得られるからである。なお、速度ポテンシャル ϕ_{KdV} の重み係数 $f_{\alpha\text{KdV}}$ は、 ζ_{KdV} と C_{KdV} を代入して線形方程式となる式(3)より求められる。
- (1) 初期値として ζ_{KdV} 及び $f_{\alpha\text{KdV}}$ を用いて、Newton-Raphson 法により、式(3)及び(4)を解く。ここで、位相速度 C は、 $C_1 = C_{\text{KdV}}$ とする。そして、第1番目の解 ζ_1 及び $f_{\alpha 1}$ を得る。なお、孤立波解を求めるための側方境界条件は、側方境界において物理量 F の水平方向微分がゼロであるとする。
- (2) 初期値として ζ_1 及び $f_{\alpha 1}$ を用いて、Newton-Raphson 法により、式(3)及び(4)を解く。ここで、位相速度 C は、 $C_2 = C_1 + \varepsilon$ とする。そして、第2番目の解 ζ_2 及び $f_{\alpha 2}$ を得る。ここで、 ε/C_1 は、 $1.0^{-5} \sim 1.0^{-3}$ の値とする。
- (3) 位相速度 C を段階的に大きくしながら、上記の(2)を繰り返して、任意の位相速度 C を有する孤立波の数値解 ζ 及び f_{α} を求める。

上記の手法は、表面孤立波の方程式系である式(3)及び(4)のみならず、内部孤立波の方程式系、そして、Boussinesq 型方程式系といった他の波動方程式系にも適用できると期待される。

5. 表面孤立波の数値解

静水深 h が一様である水域を対象とし、前述の手法により、表面孤立波解を求める。計算領域長 L 及び計算格子間隔 Δx は、それぞれ、 $L=50h$ 及び $\Delta x=0.02h$ とする。

図-1 に、表面孤立波の波形を示す。ここで、横軸及び縦軸は、それぞれ、水平距離及び水面変動を静水深 h で無次元化した値である。また、速度ポテンシャルの展開項数は、 $N=3$ 、または、4としている。図-1 (a) で、波高水深比が比較的小さな $ah=0.1$ の場合、本手法と KdV 理論による表面孤立波の波形には、差異が殆ど見られない。また、 $ah \leq 0.6$ の場合、 $N=3$ 及び 4 の数値解に、差異が殆どない。図-1 (b) は、本手法により得られた最大振幅の表面孤立波の波形を示している。ここで、 $N=4$ としており、最大振幅は、 $a=0.77h$ である。これほどまでに振幅・静水深比の大きな

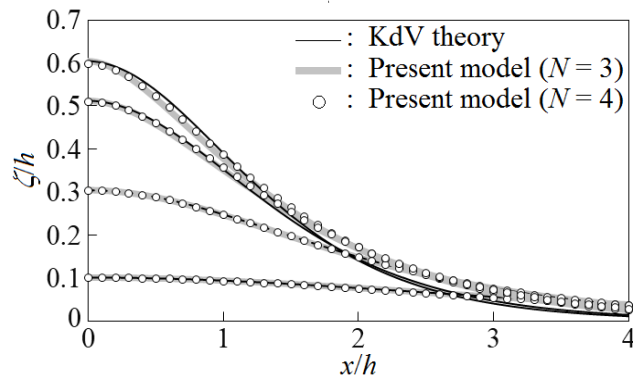
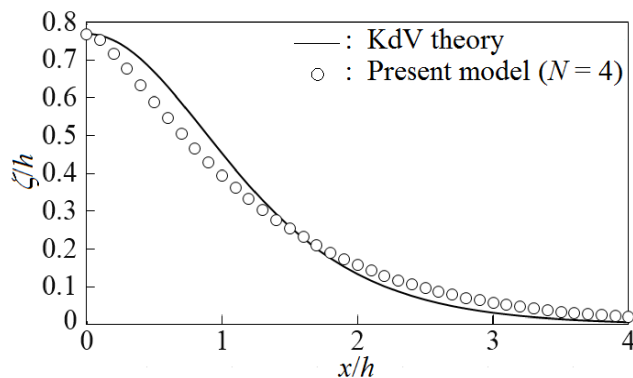
(a) $a/h=0.1, 0.3, 0.51$ 及び 0.6 (b) $a/h=0.77$

図-1 表面孤立波の水面形の数値解と KdV 理論解

孤立波を発生させることは、通常の水理実験において困難である。なお、本手法による数値解は、ピーク近傍において、KdV 理論解よりも尖った形状をしている。

図-2 に、振幅・静水深比 a/h と相対位相速度 C/C_{s0} の関係を示す。ここで、 C 及び C_{s0} は、それぞれ、孤立波の位相速度及び線形浅水波の位相速度 $\sqrt{gh}$ である。 $a/h \geq 0.3$ において、KdV 理論解は、本手法及び Longuet-Higgins・Fenton (1974) による位相速度より大きい。 $N=4$ 及び 5 の場合、表面孤立波の最大位相速度は、 $1.291C_{s0}$ であり、このとき、 $a/h = 0.77$ である。現時点では、これより大きな値の振幅・静水深比 a/h に対する解が、本手法により得られていないが、これは、本手法において、位相速度をパラメタとして数値解を求めており、同一のパラメタに対して振幅・静水深比が 2 値存在するからである。

6. 内部孤立波の数値解

上・下面が固定水平板で挟まれた、全静水深が h の 2 層流体を対象とする。下層と上層の密度比を $\rho_2/\rho_1=1.02$ とする。また、上層の層厚を $h_1=0.4h, 0.3h, 0.2h, 0.1h$ 及び $0.05h$ とし、それぞれの場合に対して、計算領域長を $L=70h, 30h, 25h, 20h$ 及び $15h$ 、また、計算格子間隔を $\Delta x=0.01h, 0.01h, 0.005h, 0.01h$ 及び $0.005h$ とする。速度ポテンシャルの展開項数は、 $N=3$ とする。そして、提案した手法により内部孤立波解を求め、KdV 理論解、並びに、 $O(h_1/h_2)=1$ 、 $O(a/h)=1$ 及び $O((h/\lambda)^4) \ll 1$ を仮定した Choi・Camassa (1999) による shallower version の解と比較する。

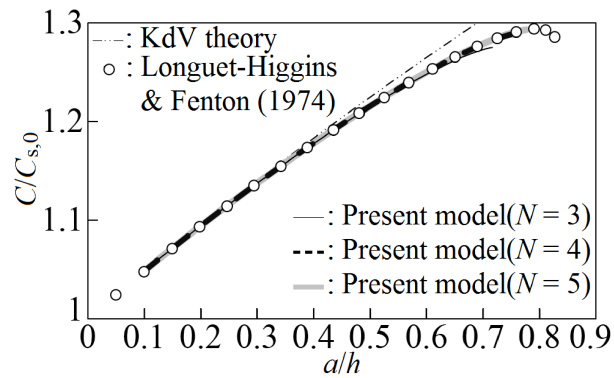


図-2 相対位相速度 $C/C_{s,0}$ ($C_{s,0}$ は、線形浅水波の位相速度である。)

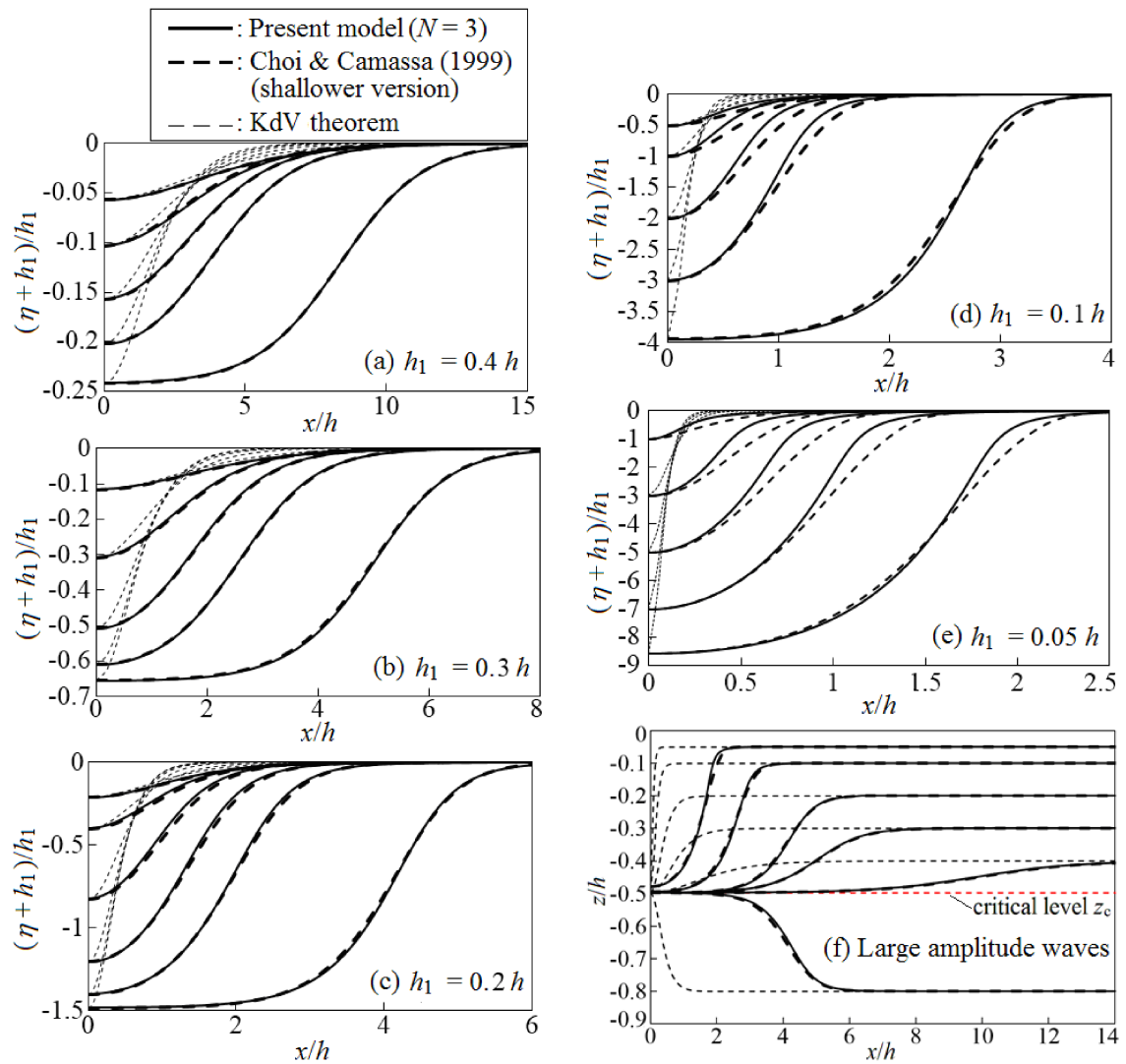


図-3 内部孤立波の界面形の数値解と理論解

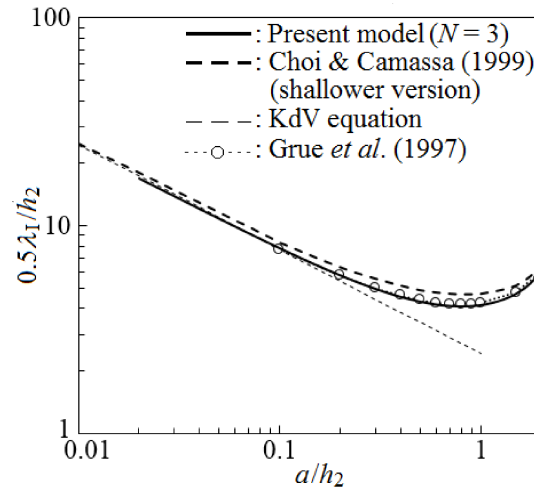


図-4 相対代表半波長 $0.5\lambda_1/h_2$ (密度比 $\rho_1/\rho_2=0.63$, 静水時の上層厚 $h_1=0.836h$)

図-3 (a) ~ (f) に, 内部孤立波の界面形を示す.

本手法による界面形の谷は, critical level に近い場合ほど, Choi・Camassa (1999) の解と同様, 平たくなる. ここで, critical level は, 安定した孤立波の界面が触れることのできない位置であり, 内部孤立波の最大振幅は, 次式で評価される critical level z_c に規定される (Funakoshi・Oikawa, 1986).

$$z_c = -h / \left(1 + \sqrt{\rho_2 / \rho_1} \right) \quad (5)$$

静水状態における上層厚が $h_1=0.4h$, $0.3h$, $0.2h$, $0.1h$ 及び $0.05h$ の各場合に対して, critical level は, $(z_c + h_1)/h_1 = -0.243$, -0.658 , -1.488 , -3.975 及び -8.950 となる. なお, 図-3 (d) 及び (e) が示すように, それぞれ, h_1/h が 0.05 及び 0.1 の場合に, 本手法による数値解は, Choi・Camassa (1999) の解と一致しない.

図-3 (f) に, 本手法によって得られた, 最大振幅を有する内部孤立波の波形を示す. $h_1 \geq 0.1h$ である場合, 界面位置が, critical level に殆ど接するような大振幅内部孤立波解が得られていることがわかる. また, 静水時の界面位置が, critical level に近いほど波長が長い.

図-4に, 相対代表半波長 $0.5\lambda_1/h_2$ と a/h_2 の関係を示す. ここで, 相対代表波長 λ_1 は, 次式で定義する.

$$\lambda_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta + h_1) dx / a \quad (6)$$

また, 上・下層の密度比及び上層の層厚は, それぞれ, $\rho_1/\rho_2 = 0.63$ 及び $h_1 = 0.836h$ であり, この場合の安定した内部孤立波は, 上に凸の界面形を示す. 本手法の相対代表半波長の数値解は, Euler 方程式系を数値解析的に解いて得られた Grue ら (1997) の結果と, 殆ど一致している.

7. 水平床上における孤立波の1次元伝播解析

7.1 表面孤立波の伝播

一様静水深 h の領域における鉛直断面内の運動を対象とする. そして, 水平軸 x の正の方向に伝播する表面孤立波の1次元伝播解析を行なう. 速度ポテンシャルの展開項数は, $N=3$ とする. 図-5は, $a/h = 0.66$ である表面孤立波解の1次元伝播を山下ら (2012) の無次元量に関する数値モデル

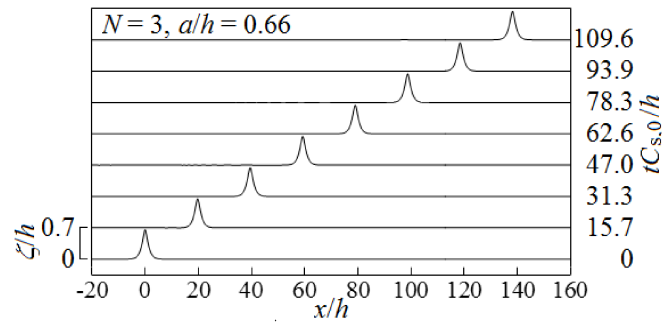


図-5 進行する表面孤立波の水面形の時間変化

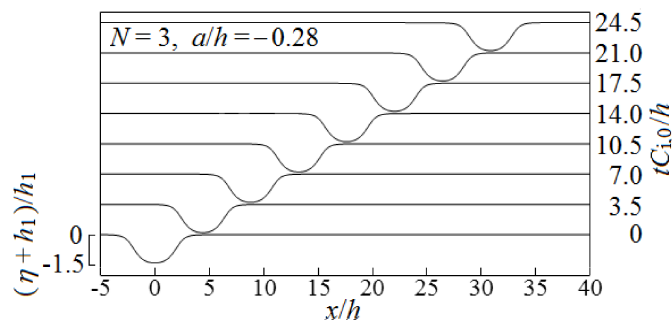


図-6 進行する内部孤立波の界面形の時間変化 ($\rho_2/\rho_1=1.02; h_1/h=0.2$)

を用いて時間発展させて解いた水面形の時間変化である。時間発展には、2層流体問題を対象とした Nakayama・Kakinuma (2010) による差分法を 1層流体問題に応用している。ここで、計算格子間隔及び計算時間間隔は、それぞれ、 $\Delta x/h=0.1$ 及び $\Delta t C_{s,0}/\Delta x=0.003$ である。これより、ここで提案した手法を適用して数値的に求めた大振幅の孤立波解が、安定して伝播することを確認できる。

7.2 内部孤立波の伝播

上・下面が固定水平板で挟まれた 2層流体である、一様静水深 h の領域における鉛直断面内の運動を対象とする。そして、水平軸 x の正の方向に伝播する内部孤立波の 1次元伝播解析を行なう。上・下層の密度比は、 $\rho_1/\rho_2=0.98$ である。速度ポテンシャルの展開項数は、 $N=3$ とする。

図-6 は、 $h_1=0.2h$ の場合の $|a|/h_1=1.4$ である内部孤立波の 1次元伝播を山下ら (2012) の無次元量に関する数値モデルを用いて時間発展させて解いた界面形の時間変化である。ここで、計算格子間隔及び計算時間間隔は、それぞれ、 $\Delta x/h=0.1$ 及び $\Delta t C_{i,0}/\Delta x=0.018$ である。図に示すような台形状の大振幅内部孤立波が安定して伝播の様子が確認できる。

7.3 二つの内部孤立波の干渉

図-7 に、振幅の異なる二つの内部孤立波解を初期条件として与えた場合の、各時刻の界面形を示す。ここで、 $h_1=0.2h$ であり、二つの内部孤立波の波高上層厚比は、 $|a|/h_1=1.4$ 及び 0.3 である。また、計算格子間隔及び計算時間間隔は、それぞれ、 $\Delta x/h=0.1$ 及び $\Delta t C_{i,0}/\Delta x=0.018$ である。大振幅内部孤立波が、振幅の比較的小さな内部孤立波に追い付き重合するとき、波の非線形干渉によ

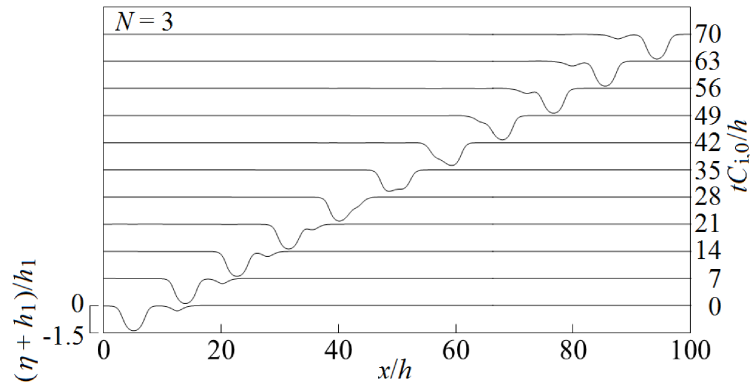


図-7 振幅の異なる二つの内部孤立波の追い越し ($\rho_2/\rho_1=1.02$; $h_1/h=0.2$ $|a|/h_1=1.4$ and 0.3)

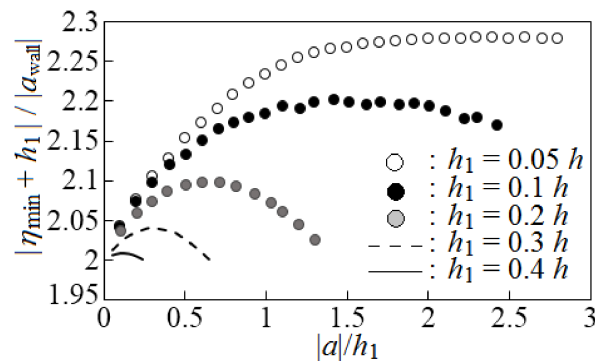


図-8 内部孤立波が鉛直壁に衝突する場合の波高上層厚比 $|a|/h_1$ と波高増幅率 $|\eta_{\min} + h_1|/|a_{\text{wall}}|$ の関係 ($N=3$)

り、波高が増加せず、減少する様子がわかる。

7.4 内部孤立波の衝突

鉛直壁に衝突する内部孤立波を対象とする。図-8 に、入射波の波高上層厚比 $|a|/h_1$ と鉛直壁の位置 $x=0$ における波高増幅率 $|\eta_{\min} + h_1|/|a_{\text{wall}}|$ の関係を示す。ここで、波高増幅率に対して、数値的な波高減衰の影響を除外するため、入射波が鉛直壁に衝突せずに透過する場合の、 $x=0$ における波高 $|a_{\text{wall}}|$ を波高増幅率の基準値として用いている。内部孤立波の波高増幅率は、振幅が中程度の場合に最大値を示す。そして、入射波の振幅が最大振幅に近い場合に、波高増幅率がほぼ 2 倍となり、波の挙動が線形な状態に近付くことがわかる。

8. 結 論

Newton-Raphson 法により移流方程式系の収束解を求める手法を適用し、変分原理に基づく非線形波動方程式系の孤立波解を求めた。そして、理論解や、Euler 方程式系の数値解析解と比較し、得られた数値解の妥当性を検討した。

表面孤立波に対して、速度ポテンシャルの展開項数を 4、または、5 とした場合に、最大位相速度 $C/C_{s0} = 1.294$ と同程度である $C/C_{s0} = 1.291$ を有する、精度の高い表面孤立波解が得られた。このときの振幅・静水深比は、約 0.77 であり、水面形は、峰のピーク付近で KdV 理論解よりも尖る。

内部孤立波に対して、速度ポテンシャルの展開項数を 3 とした場合に、精度の高い数値解が得られた。そして、振幅が大きくなるにつれて、界面形が台形状に近付くことが確認された。

更に、得られた大振幅孤立波解を初期条件として与えた時間発展解析を行ない、大振幅を有する定常進行波の伝播や、非線形干渉に関して調べた。表面孤立波及び内部孤立波の 1 次元伝播解析では、大振幅孤立波が一定速度で変形せずに進行することが確められた。また、鉛直壁に衝突する内部孤立波の数値解析の結果、入射波の振幅がゼロ、または、内部孤立波の最大振幅に近い場合に、鉛直壁位置における波高増幅率が入射波の振幅の 2 倍程度となり、線形波に類似した性質が現れることがわかった。

参考文献

- 柿沼太郎: 透水性海浜における内部波の挙動の数値計算, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 146-150, 2001.
- 山下 啓・柿沼太郎・山元 公・中山恵介: マッハシステム形成過程の数値解析, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol. 68, No. 2, pp. 6-10, 2012.
- Choi, W. and Camassa, R.: Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system, J. Fluid Mech., Vol. 396, pp. 1-36, 1999.
- Funakoshi, M. and Oikawa, M.: Long internal waves of large amplitude in a two-layer fluid, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 55, pp. 128-144, 1986.
- Grue, J., Friis, H. A., Palm, E., and Rusas, P. O.: A method for computing unsteady fully nonlinear interfacial waves, J. Fluid Mech., Vol. 351, pp. 223-252, 1997.
- Longuet-Higgins, M. S. and Fenton, J. D.: On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II, Proc. Roy. Soc. London, Series A Vol. 340, pp. 471-493, 1974.
- Nakayama, K. and Kakinuma, T.: Internal waves in a two-layer system using fully nonlinear internal-wave equations, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 62, pp. 574-590, 2010.