

両調性を伴う結合型動的計画の為の極小埋め込み A minimal imebedding for associative dynamic programs

阪口 昌彦 (Masahiko Sakaguchi)

神奈川県立がんセンター臨床研究所, 高知大学医学部付属病院次世代医療創造センター

Kanagawa Cancer Center Research Institute,

Integrated Center for Advanced Medical Technologies, Kochi Medical school

1 序

両調性を伴う半群による利得関数に関する有限多段決定過程を考える. 結合的二項演算子が加法 $+$ の最適化問題の場合には, Bellman-Ford 法 [1, 3] に代表されるように最も動的計画法が適用されている. しかしながら, 本研究で考慮する最適化問題では, 各期間の最大化問題と最小化問題の片方のみを考慮する問題群に制限すると最適性原理 [1] は一般には成立しない. 最適性原理を満たす為に, 半群による利得関数に関する確率的動的計画では利得の過去集積値を考慮する不変埋没法 [2, 9] が用いられている [7]. また, 両調性を伴う動的計画においては最大化問題と最小化問題を両方を逐次に解く両的計画が用いられている [4, 5, 6, 10].

本研究の目的は, 利得の過去集積値すべてを考慮せずに両的計画が示唆してくれる極小の問題群のための不変埋没法を与えることによって最適再帰式を得ることである.

2 記号と定式化

全体を通して次の記号を用いる:

- S は空でない有限状態空間.
- 写像 A は各状態 $s \in S$ に対して, 行うことが可能な行動の空でない有限集合 $A(s)$ を割り当てる.
- 利得関数 $r_n: S \times A(S) \rightarrow \mathbb{R}$.
- 推移関数 $T_n: S \times A(S) \rightarrow S$.
- 全順序関係を持つ半群 $(U, \circ, <)$ は両調性を満たす: $U = U^+ + U^- + U^0$ のように次を満たす互いに排反な集合 U^+, U^-, U^0 の和集合で表現できる. $y, z \in U$ に対して

$$[1] \quad x \in U^+, y < z \implies x \circ y < x \circ z$$

$$[2] \quad x \in U^-, y < z \implies x \circ y > x \circ z$$

$$[3] \quad x \in U^0, y < z \implies x \circ y = x \circ z$$

この半群 $(U, \circ, <)$ を利得関数に持つ有限多段決定過程を考える:

主問題

$$\begin{aligned} F(s_1) &= \underset{(a_1, \dots, a_N)}{\text{opt}} \quad r_1(s_1, a_1) \circ r_2(s_2, a_2) \circ \dots \circ r_N(s_N, a_N) \\ \text{s.t.} \quad & a_n \in A_n(s_n), \\ & s_{n+1} = T_n(s_n, a_n), 1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

さらに, 便宜上本研究で与える極小埋め込みに用いるものより十分に広い問題群を与える:

問題 $(\lambda \in U)$

$$\begin{aligned} F^n(\lambda, s_n) &= \underset{(a_n, \dots, a_N)}{\text{opt}} \quad \lambda \circ r_n(s_n, a_n) \circ \dots \circ r_N(s_N, a_N) \\ \text{s.t.} \quad & a_m \in A_m(s_m), \\ & s_{m+1} = T_m(s_m, a_m), n \leq m \leq N. \end{aligned}$$

3 2つの非再帰性的原因 (非可分性)

確率的動的計画の加法型 $\circ = +$ の最適性の原理が両調性を伴う半群にまで拡張したときに成立しない原因は次の2つの非可分性 [8] である.

1. 期待演算子と半群 $(\mathbb{R}, \circ)$

定数 λ , 可測関数 g , 確率測度 p に対して, $\lambda \circ g$ を可測関数とする. 一般には,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda \circ g(x) p(dx) \neq \lambda \circ \int_{\mathbb{R}} g(x) p(dx).$$

1.1. 反例

$\circ = \vee$, $\lambda = 1$, $g(0) = 0, g(x) = 2$ for $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p(\{0\}) = 2/3, p(\{1\}) = 1/3$ のとき

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda \circ g(x) p(dx) = 4/3 \neq 1 = \lambda \circ \int_{\mathbb{R}} g(x) p(dx).$$

1.2. 等号成立の例

$$a \circ b = ab,$$

$$a \circ b = a + b + Lab, \quad L \in \mathbb{R}.$$

2. $\max(\min)$ 演算子と半群 $(\mathbb{R}, \circ)$

一般には, 定数 λ , $B \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$\underset{z \in B}{\text{opt}} [\lambda \circ z] \neq \lambda \circ \underset{z \in B}{\text{opt}} [z].$$

2.1. 反例

$\circ = \times$, $\text{opt} = \text{Max}$, $\lambda = -1$, $B = \{\pm 1\}$,

$$\underset{z \in B}{\text{opt}} [\lambda \circ z] = 1 \neq -1 = \lambda \circ \underset{z \in B}{\text{opt}} [z].$$

2.2. 等号成立の例

$$a \circ b = a \vee b \text{ and } \text{opt} = \text{Max}.$$

$$a \circ b = ab \text{ and } ([0, \infty), \circ).$$

4 極小埋め込み

以下に両的計画が示唆する非可分性 2 を回避する極小埋め込みとその埋め込みによる再帰式を与える.

4.1 乗法 ($a \circ b = a \times b$)

$U = \mathbb{R}$ のとき, 過去集積値列は下記の様になる:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= -1 \text{ or } +1, \\ &\vdots \\ \Lambda_n &= (-1)I_{\mathbb{R}^-}(\Lambda_{n-1} \circ r_{n-1}(s_{n-1}, a_{n-1})) \\ &\quad + (+1)I_{\mathbb{R}^+ \cup \{0\}}(\Lambda_{n-1} \circ r_{n-1}(s_{n-1}, a_{n-1})),\end{aligned}$$

ここで,

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}, \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}.$$

また, 次の最適再帰式が得られる. $\lambda = -1 \text{ or } +1, 1 \leq n \leq N-1$ に対して,

$$\begin{aligned}F^N(\lambda, s) &= \max_{a \in A_N(s)} [\lambda r_N(s, a)], \\ F^n(\lambda, s) &= \max_{a \in A_n^+(s) \cup A_n^0(s)} [|r_n(s, a)| F^{n+1}(\lambda, T_n(s, a))] \\ &\quad \vee \max_{a \in A_n^-(s)} [|r_n(s, a)| F^{n+1}(-\lambda, T_n(s, a))],\end{aligned}$$

ここで $A_n^+(\cdot) = \{a \in A_n(\cdot) | r_n(\cdot, a) \in \mathbb{R}^+\}$, $A_n^0(\cdot) = \{a \in A_n(\cdot) | r_n(\cdot, a) = 0\}$, $A_n^-(\cdot) = \{a \in A_n(\cdot) | r_n(\cdot, a) \in \mathbb{R}^-\}$.

再帰性の要点としては, 下記の簡単な有限群を用いることによって説明できる. 有限群であるので, 2つの問題 $\lambda = -1, +1$ で乗法に関して閉じているため, 両的計画が示唆してくれる極小埋め込みを与える.

有限群 ($G = \{-1, 1\}, \circ = \times$)

$\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

単位元 $e = 1$, $(-1) \times (-1) = e$.

4.2 擬乗法 ($a \circ b = a + b + Lab$, ただし $L > 0$)

L が正負に関係なく再帰性の要点としては, 次の有限群を用いることによって説明できる.

有限群 ($G = \{-\frac{2}{L}, 0\}, \circ$)

$\circ$	0	$-\frac{2}{L}$
0	0	$-\frac{2}{L}$
$-\frac{2}{L}$	$-\frac{2}{L}$	0

単位元 $e = 0$, $(-2/L) \circ (-2/L) = e$. また, 半群 $(\mathbb{R}, \circ)$ において零元は $-1/L$.

L が正負で両調性の範囲が変わり, $L > 0$ の場合, 次のものとなる.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^+ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{L} \right\}, \\ \mathbb{R}^- &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{L} \right\}, \\ \mathbb{R}^0 &= \left\{ -\frac{1}{L} \right\}.\end{aligned}$$

$U = \mathbb{R}$ のとき, 過去集積値列は下記の様になる:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= -\frac{2}{L} \text{ or } 0, \\ &\vdots \\ \Lambda_n &= \left(-\frac{2}{L} \right) I_{\mathbb{R}^-}(\Lambda_{n-1} \circ r_{n-1}(s_{n-1}, a_{n-1})) \\ &\quad + (0) I_{\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^0}(\Lambda_{n-1} \circ r_{n-1}(s_{n-1}, a_{n-1})),\end{aligned}$$

また, 次の最適再帰式が得られる. $\lambda = -\frac{2}{L}$ or 0 , $1 \leq n \leq N-1$ に対して,

$$\begin{aligned}F^N(\lambda, s) &= \max_{a \in A_N(s)} [\lambda \circ r_N(s, a)], \\ F^n(\lambda, s) &= \max_{a \in A_n^+(s) \cup A_n^0(s)} [|r_n(s, a)| \circ F^{n+1}(\lambda, T_n(s, a))] \\ &\vee \max_{a \in A_n^-(s)} \left[|r_n(s, a)| \circ F^{n+1} \left(\left(-\frac{2}{L} \right) \circ \lambda, T_n(s, a) \right) \right],\end{aligned}$$

ここで, $A_n^+(\cdot) = \{a \in A_n(\cdot) \mid r_n(\cdot, a) \in \mathbb{R}^+\}$, $A_n^0(\cdot) = \{a \in A_n(\cdot) \mid r_n(\cdot, a) \in \mathbb{R}^0\}$, $A_n^-(\cdot) = \{a \in A_n(\cdot) \mid r_n(\cdot, a) \in \mathbb{R}^-\}$.

この半群での絶対値記号は以下で定義する:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^0 \\ (-\frac{2}{L}) \circ x & \text{if } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

4.3 擬乗法 ($a \circ b = a + b + Lab$, ただし $L < 0$)

$L < 0$ の場合, 両調性の範囲は次のようなものとなる. 過去集積値, 最適再帰式及び絶対値記号は $L > 0$ の場合と同様である.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^+ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{L} \right\}, \\ \mathbb{R}^- &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{L} \right\}, \\ \mathbb{R}^0 &= \left\{ -\frac{1}{L} \right\}.\end{aligned}$$

4.4 fractional ($a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}$)

fractional の場合, 利得空間を実数 $\mathbb{R}$ から制限しなければならない. 先ず, 単位元と零元を探す.
 $x \circ x = x$ を解くと,

$$x = 0(\text{単位元}), \pm 1(\text{零元の候補 2 つ}).$$

次に, $x \circ x = 0$ を解くと, $x = 0$. つまり, この 2 項演算子 $\circ$ には乗法 $\times$ で (-1) に相当する元が存在しない. ところで, $(\mathbb{R}, \times)$ で参考にした有限群を少し抽象化すると次のものが考えられる.

有限群 ($G = \{ \text{負}, \text{正} \}$)

$\times$	正	負
正	正	負
負	負	正

乗法, 擬乗法のような群をこの fractional $\circ$ で作ると,

(i) 零元 $+1$ のとき, 両調性の範囲では半群は $([0, \infty), \circ)$ と制限される.

有限群 ($G = \{(1, \infty), (0, 1)\}$)

$\circ$	(0, 1)	(1, ∞)
(0, 1)	(0, 1)	(1, ∞)
(1, ∞)	(1, ∞)	(0, 1)

(ii) 零元 -1 のとき, 両調性の範囲では半群は $((-\infty, 0], \circ)$ と制限される.

有限群 ($G = \{(-1, 0), (-\infty, -1)\}$)

$\circ$	(-1, 0)	$(-\infty, -1)$
(-1, 0)	(-1, 0)	$(-\infty, -1)$
$(-\infty, -1)$	$(-\infty, -1)$	(-1, 0)

4.4.1 fractional $([0, \infty), \circ)$ のときの過去集積値列と再帰式

$([0, \infty), \circ)$ に対して可逆元は存在しない. なぜなら, 単位元 0 より, $a \circ b = 0$ とすると,

$$\frac{a+b}{1+ab} = 0. \quad \text{ゆえに } a = -b.$$

したがって, ここでは絶対値 $|r_n(\cdot)|$ をどのように定義するかを考慮する必要がある.

実際, 考慮する $r_n(\cdot) \in [0, \infty)^- = (1, \infty)$ に対して, $|r_n(\cdot)| \in [0, \infty)^+ = (0, 1)$ かつ

$$|r_n(\cdot)| \circ \lambda = r_n(\cdot)$$

となる $\lambda \in [0, \infty)^-$ を次のようにとることができる:

$$\lambda = \max_* r(*) := \max_{n,s} r_n(s),$$

$$|r_n(\cdot)| = \frac{\max_* r(*) - r(\cdot)}{r(\cdot) \max_* r(*) - 1}.$$

したがって, ここでの絶対値記号を次のように定義する:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \in [0, \infty)^+ \cup [0, \infty)^0 \\ \frac{\max_* r(*) - x}{x \max_* r(*) - 1} & \text{if } x \in [0, \infty)^- \end{cases}$$

過去集積値列を次の様に定める:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 &= \max_{\star} r(\ast) \text{ or } 0, \\
 &\vdots \\
 \Lambda_n &= \max_{\star} r(\ast) I_{[0,\infty)^-} (\Lambda_1 \circ r_1(s_1, a_1) \circ \cdots \circ r_{n-1}(s_{n-1}, a_{n-1})) \\
 &\quad + 0 I_{[0,\infty)^+ \cup [0,\infty)^0} (\Lambda_1 \circ r_1(s_1, a_1) \circ \cdots \circ r_{n-1}(s_{n-1}, a_{n-1})) \\
 &= \max_{\star} r(\ast) I_{[0,\infty)^-} (\Lambda_{n-1} \circ r_{n-1}(s_{n-1}, a_{n-1})) \\
 &\quad + 0 I_{[0,\infty)^+ \cup [0,\infty)^0} (\Lambda_{n-1} \circ r_{n-1}(s_{n-1}, a_{n-1})).
 \end{aligned}$$

すると, 最適再帰式は次のもので与えられる: $\lambda = e, e^-$,

$$\begin{aligned}
 F^N(\lambda, s) &= \max_{a \in A_N(s)} [\lambda \circ r_N(s, a)], \\
 F^n(\lambda, s) &= \max_{a \in A_n^+(s) \cup A_n^0(s)} [|r_n(s, a)| \circ F^{n+1}(\lambda, T_n(s, a))] \\
 &\quad \vee \max_{a \in A_n^-(s)} [|r_n(s, a)| \circ F^{n+1}(\lambda^-, T_n(s, a))],
 \end{aligned}$$

ここで $e = 0$, $e^- = \max_{\star} r(\ast)$, $(e^-)^- = e$,

$$\begin{aligned}
 A_n^+(\cdot) &= \{a \in A_n(\cdot) | r_n(\cdot, a) \in [0, \infty)^+\}, \\
 A_n^0(\cdot) &= \{a \in A_n(\cdot) | r_n(\cdot, a) \in [0, \infty)^0\}, \\
 A_n^-(\cdot) &= \{a \in A_n(\cdot) | r_n(\cdot, a) \in [0, \infty)^-\}.
 \end{aligned}$$

fractional $((-\infty, 0], \circ)$ のときの過去集積値列と再帰式の時も同様に最適再帰式が導出できる.

5 Numerical example

Sniedovich[11] の section3.3 数値例について, 極小埋め込みによる解法を与える.

問題

$$\begin{aligned}
 F(s_1) &= \max_{(a_1, \dots, a_N)} r_1(s_1, a_1) \circ r_2(s_2, a_2) \circ \cdots \circ r_{N-1}(s_{N-1}, a_{N-1}) \circ r_N(s_N, a_N) \\
 \text{s.t.} \quad &a_n \in A_n(s_n), \\
 &s_{n+1} = T_n(s_n, a_n), 1 \leq n \leq N,
 \end{aligned}$$

について内点の算法 $\circ = \times$, $N = 2$,

$$\begin{aligned}
 S &= \mathbb{N}, \\
 A_n(s) &= \{-|s|, |s| + n\}, \\
 s_2 &= T_1(s_1, a_1) = a_1 \\
 r_1(s, a) &= sa, \quad r_2(s, a) = a.
 \end{aligned}$$

$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} F^2(1, m) &= \max_{a_2 \in \{-|m|, |m|+2\}} [1 \times a_2] = |m| + 2, \\ F^2(-1, m) &= \max_{a_2 \in \{-|m|, |m|+2\}} [(-1) \times a_2] = |m|. \end{aligned}$$

さらに, $m \geq 0$ のとき $A_1^+(m) = \{|m| + 1\}$, $A_1^0(m) \cup A_1^-(m) = \{-|m|\}$ より,

$$\begin{aligned} F(m) = F^1(1, m) &= \max_{a \in A_1^+(m)} [|r_1(m, a)| F^2(1, T_1(m, a))] \\ &\vee \max_{a \in A_1^0(m) \cup A_1^-(m)} [|r_1(m, a)| F^2(-1, T_1(s, a))] \\ &= m^3 + 4m^2 + 3m \vee m^3 \\ &= m^3 + 4m^2 + 3m. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J, 1957.
- [2] R. Bellman, E. Denman, *Invariant Imbedding*, Lect. Notes in Operation Research and Mathematical Systems 52, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [3] L. Ford, JR., *Network Flow Theory*, Report P-923, The Rand Corporation, Santa Monica, Cal, 1956
- [4] T. Fujita, K. Tsurusaki, Stochastic optimization of multiplicative functions with negative value. J. Oper. Res. Soc. Japan 41 : no. 3, 351–373(1998).
- [5] S. Iwamoto, From dynamic programming to bynamic programming. J. Math. Anal. Appl. 177 : 56–74 (1993).
- [6] S. Iwamoto, On bidecision processes. J. Math. Anal. Appl. 187 : 676–699 (1994).
- [7] S. Iwamoto, Associative dynamic programs. J. Math. Anal. Appl. 201 : 195–211 (1996).
- [8] S. Iwamoto, 確率最適化における再帰式と決定樹表. (in Japanese) Mathematical Decision Making under uncertainty and ambiguity. Surikaiseikikenkyujyo-Kokyuroku No.1132: 15–23 (2000)
- [9] E. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, New York, 1968.
- [10] Y. Maruyama, Joint shortest path problems. (in Japanese) Discrete and continuous structures in optimization. Surikaiseikikenkyujyo-Kokyuroku No.945: 153–162 (1996)
- [11] M. Sniedovich, *Dynamic programming*. Foundations and principles. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.