

Tight closure の理論を使ってできる Arithmetic Macaulayfication について

東京都立大学理学部数学教室 蔵野 和彦 (Kazuhiko Kurano)

以下は、姫路獨協大学の山岸氏との共同研究です。

1 Introduction

(A, m) がネーター局所環とする。スキームの射 $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ が双有理な固有射で X が Cohen-Macaulay (各点の局所環が Cohen-Macaulay) であるとき、 π は A のマコーレー化 (Macaulayfication) であるということにする。

(A, m) を Gorenstein 局所環の準同型像で、 $\dim A = d + s$ とする。 L を A のイデアルで、 $\operatorname{ht}_A L = \dim G(L) \otimes A/m = d > 0$ (つまり、 L は equi-multiple) を満たすものとする。さらに、 $z_1, \dots, z_s \in A$ を、 A/L のパラメーター系となるように取る。 $(\dim A/L = s$ に注意。このとき、 $z_1, \dots, z_s$ は、 A のパラメーター系の一部になることに注意。)

このとき、次が成立する。([6])

定理 1 上の状況の下で、次は同値。

(1) $\operatorname{Proj}(R(L))$ は Cohen-Macaulay。

(2) 次の (a), (b) が成立する。

(a) $n \gg 0$ に対して $\operatorname{depth} L^n/L^{n+1} = s$ である。(つまり、 $n \gg 0$ に対して、 $z_1, \dots, z_s$ は L^n/L^{n+1} -正則列である。

(b) $\operatorname{Proj}(R(\bar{L}))$ は Cohen-Macaulay。ここで、 $\bar{A} = A/(z_1, \dots, z_s)$, $\bar{L} = L\bar{A}$ とする。

つまり、 $\text{Proj}(R(L))$ の Cohen-Macaulay 性を判定するためには、定理 1 の (2) の (a) と (b) を確かめればよい。

次の命題 2 ([6]) では、定理 1 の (2) の (b) が成立するためのある充分条件が与えられる。d-列、u.s.d-列等の定義、基本的な性質については、後藤-山岸 [3] を参照。

命題 2 定理 1 と同じ状況の下で (今、 $\dim \bar{A} = d > 0$ であり、 $\bar{L}$ は maximal primary ideal であることに注意)、さらに、次の 3 条件のうちの一つが成立するとする。

- (I) $\bar{L}$ は $\bar{A}$ 上の u.s.d-列で生成される。
- (II) $\bar{L}^{r+1} = q\bar{L}^r$ を満たす整数 $r \geq 0$ とイデアル $q = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \subseteq \bar{L}$ が存在し、かつ、 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$ は、 $\bar{L}^r$ 上の u.s.d-列である。
- (III) A/m が代数的閉体、 $\bar{L}^{r+1} = q\bar{L}^r$ を満たす整数 $r \geq 0$ とイデアル $q = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \subseteq \bar{L}$ が存在し、かつ、 $q = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d)$ を満たす $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d$ は必ず $\bar{L}^r$ 上の d-列である。

このとき、定理 1 の (2) の (b) は成立する。つまり、 $\text{Proj}(R(\bar{L}))$ は Cohen-Macaulay である。

今までの仮定に加えて、さらに次を仮定する。

A は、エクセレント正則局所環の像とし、剰余体 A/m は代数的閉体と仮定する。さらに、 A は、標数 $p > 0$ の体を含む整閉整域とする。また、 $y_1, \dots, y_d$ は A のパラメータ系の一部で、これらはすべて test element と仮定する。さらに、 $d \geq 3$ とする。 $I = (y_1, \dots, y_d)$, $L = I^*$ とおく。このとき任意の自然数 n に対して $L^{n+1} = I^n L = (I^n)^*$ が成立し、特に L は equi-multiple である。(詳しくは、次の章を参照のこと。)

このとき、 L は、命題 2 の条件 (III) を満たす ([6])。($r = 1$, $q = I\bar{A}$ として。)

故に、定理 1、命題 2 によって、今の状況で、 $\text{Proj}(R(L))$ が Cohen-Macaulay であるための必要充分条件は、定理 1 の (2) の (a) が成立することであることがわかる。

このことから、直ちに次が証明できる ([6])。

定理 3 $s = 0, 1$ であるとき、 $\text{Proj}(R(L))$ は Cohen-Macaulay。($s = 0$ のときは、[8]、 $s = 1$ のときは、[1], [6])

実は、定理 3 では、剰余体 A/m は代数的閉体と仮定する必要はない。実際、[6] の論文と appendix では、 $s = 0, 1$ の場合にその仮定をしないでリース環 $R(L)$ の局所コホモロ

ジー群が計算される。以下の章の目的は、まさに、リース環 $R(L)$ の局所コホモロジー群の計算である。

2 Tight closure について

p を素数とし、 C を標数 p のネーター環とする。

定義 4 J を C のイデアルとする。 $C^\circ = C \setminus \bigcup_{P \in \text{Min } C} P$ とおく。 J^* を次の様に定義する。 $x \in C$ に対して、ある $c \in C^\circ$ が存在して充分大きい e に対して $cx^{p^e} \in J^{[p^e]} = (y^{p^e} \mid y \in J)$ が成立するときに $x \in J^*$ とする。 J^* をイデアル J の tight closure という。

任意の C のイデアル J と任意の $x \in J^*$ と任意の非負整数 e に対して、 $cx^{p^e} \in J^{[p^e]}$ を充たす $c \in C^\circ$ を、 C の test element という。

次の性質は、colon capturing とされる。

補題 5 (C, m) を標数 p の *equi-dimensional excellent* 局所環とする。 $x_1, \dots, x_d$ を C のパラメーター系とし、 I と J を (polynomial) subring $D = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[x_1, \dots, x_d] \subset C$ の monomial イデアルとする。このとき、

$$\begin{aligned} (IC)^*_C : JC &= ((I :_D J)C)^*, \\ (IC)^* \cap (JC)^* &= ((I \cap J)C)^*. \end{aligned}$$

が成立する。

以上の性質等は、[5] を参照。

以下、最後まで、次を仮定する。

(A, m) は、 $d+s$ 次元エクセレント正則局所環の像とする (ここでは、剰余体 A/m は代数的閉体とは仮定しない)。さらに、 A は、標数 $p > 0$ の体を含む整閉整域とする。また、 $y_1, \dots, y_d$ は A のパラメーター系の一部で、これらはすべて test element と仮定する。さらに、 $d \geq 3$ とする。 $I = (y_1, \dots, y_d)$, $L = I^*$ とおく。

このとき、次が成立する ([8])。

補題 6 このとき任意の自然数 n に対して $L^{n+1} = I^n L = (I^n)^*$ が成立し、特に L は *equi-multiple* である。

このとき、[8], [1] によって次のことがわかる。

定理 7 (1) $s = 0$ かつ $i \geq d - 2 (= d + s - 2)$ のとき、 $R(L)^{(i)} = R(L^i)$ は Cohen-Macaulay 環である ([8]).

(2) $s = 1$ かつ $i \geq d - 1 (= d + s - 2)$ のとき、 $R(L)^{(i)} = R(L^i)$ は Cohen-Macaulay 環である ([1]).

我々の目標は、 $R(L)$ の局所コホモロジー群の計算によって上の定理に別証明を付け、 $d + s - 2$ の意味を解析することである。

次の補題が、後の証明の鍵である。

補題 8 $1 \leq i \leq j \leq d$ に対して、 $(y_1^{n_1}, \dots, y_{i-1}^{n_{i-1}}) L_{\tilde{L}} y_i^{n_i} y_j^{n_j} = (y_1^{n_1}, \dots, y_{i-1}^{n_{i-1}}) L_{\tilde{L}} y_j^{n_j}$ が成立する。

つまり、 $y_1, \dots, y_d$ は L 上の u.s.d-列である。 $(y_1, \dots, y_d$ は A 上の u.s.d-列であることは、もっと簡単に証明できる。)

証明. $x \in (y_1^{n_1}, \dots, y_{i-1}^{n_{i-1}}) L_{\tilde{L}} y_i^{n_i} y_j^{n_j}$ をとる。このとき、補題 5 により

$$(y_1^{n_1}, \dots, y_{i-1}^{n_{i-1}}) L_{\tilde{L}} y_i^{n_i} y_j^{n_j} \subseteq (y_1^{n_1}, \dots, y_{i-1}^{n_{i-1}}) L_A y_i^{n_i} y_j^{n_j} \subseteq (y_1^{n_1}, \dots, y_{i-1}^{n_{i-1}})^*$$

であることがわかる。さらに、 $y_j^{n_j}$ は、test element であることより、

$$y_j^{n_j} x \in (y_1^{n_1}, \dots, y_{i-1}^{n_{i-1}})$$

が成立する。故に、

$$y_j^{n_j} x = y_1^{n_1} w_1 + \dots + y_{i-1}^{n_{i-1}} w_{i-1}.$$

と書ける。このとき、再び補題 5 を使って、 $m = 1, \dots, i - 1$ に対して

$$w_m \in (y_1^{n_1}, \dots, y_{m-1}^{n_{m-1}}, y_{m+1}^{n_{m+1}}, \dots, y_{i-1}^{n_{i-1}}, y_j^{n_j}) y_m^{n_m} \subseteq L$$

が成立する。このとき、

$$x \in L \cap (y_1^{n_1}, \dots, y_{i-1}^{n_{i-1}}) L_A y_j^{n_j} = (y_1^{n_1}, \dots, y_{i-1}^{n_{i-1}}) L_{\tilde{L}} y_j^{n_j}.$$

がわかる。

証明終

3 $R(L)$ の局所コホモロジー群の計算

この章で、 $R(L)$ の局所コホモロジー群の計算をする。詳しくは [6] 参照。

$M = mR(L) + R(L)_+$, $N = LR(L) + R(L)_+$ を、 $R(L)$ の斉次イデアルとする。

まず、次を証明する。

定理 9 次が成立する。

- (1) $k = 0, 1$ に対して、 $H_N^k(G(L)) = (0)$ 。
- (2) $k = 2, \dots, d-1$ に対して、 $H_N^k(G(L)) = [H_N^k(G(L))]_{1-k} = H_L^k(A)$ 。
- (3) $a(G(L)) \leq 1 - d$ 。
- (4) $k = 0, 1, 2, 3$ に対して、 $H_N^k(R(L)) = (0)$ 。
- (5) $k = 4, \dots, d$ に対して、

$$[H_N^k(R(L))]_n = \begin{cases} H_L^{k-1}(A) & 3-k \leq n \leq -1 \text{ のとき} \\ (0) & \text{その他.} \end{cases}$$

- (6) $a(R(L)) = -1$. (cf. Lemma (6.3) in Part I of [2]).

ここで、 $a(-)$ は、a-invariant (cf. [4]) を表すものとする。

証明. 完全列

$$0 \longrightarrow R(L)_+ \longrightarrow R(L) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

を見る。 L の、イデアル I に関するリース加群を $R_I(L)$ とおく。つまり、

$$[R_I(L)]_n = \begin{cases} I^n L & (n \geq 0) \\ (0) & (n < 0) \end{cases}$$

である。このとき、補題 6 によって $L^2 = IL$ が成立することより、 $R(L)_+ = R_I(L)(-1)$ が成立する。このとき、補題 8 により、 $y_1, \dots, y_d$ は L 上の u.s.d-列である。このことより、リース加群 $R_I(L)$ の局所コホモロジー $H_N^k(R_I(L))$ は、[3] の結果を使うことによって次のようになることがわかる。

- $k = 0, 1, 2$ のとき、 $H_N^k(R_I(L)) = (0)$ 。
- $3 \leq k \leq d$ のとき、

$$[H_N^k(R_I(L))]_n = \begin{cases} H_I^{k-1}(L) = H_L^{k-1}(A) & 2-k \leq n \leq -1 \text{ のとき} \\ (0) & \text{その他.} \end{cases}$$

- $a(R_I(L)) < 0$.

さらに、完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow R_I(L) \longrightarrow R(L) \longrightarrow G(L) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow G_I(L)(-1) \longrightarrow G(L) \longrightarrow A/L \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

を使うことにより、定理の証明ができる。詳しくは、[6] 参照。

証明終

$s = 0$ の場合は $\sqrt{N} = M$ であるから、このとき、 $H_N^k(R(L)) = H_M^k(R(L))$ である。
さらに、任意の自然数 n に対して

$$(H_M^k(R(L)))^{(n)} = H_{M \cap R(L)^{(n)}}^k(R(L)^{(n)})$$

であることより ([4])、直ちに次の系がわかる。(定理 7 と比較してください。)

系 10 $s = 0$ とする。このとき、 $R(L^n)$ が *Cohen-Macaulay* 環であるための必要充分条件は、 $n \geq d - 2$ である。

次に、 $s > 0$ の場合を考える。

$z_1, \dots, z_s \in A$ を、 A/L のパラメーター系とする。(このとき、 $z_1, \dots, z_s, y_1, \dots, y_d$ は、 A のパラメーター系であることに注意。)

また、 $\sqrt{z + N} = M$ であることに注意すれば、スペクトル系列

$$E_2^{pq} = H_{(z)}^p H_N^q(R(L)) \Rightarrow H_M^{p+q}(R(L))$$

があるが、あることがわかる。

$s = 1$ の場合は、上のスペクトル系列を使って次の結果を得た。

定理 11 $s = 1$ ($\dim A = d + s = d + 1$) とする。また、 $i = 2, \dots, d$ と $j = 0, 1$ に対して、 H_i^j を

$$H_i^j = H_{(z_1)}^j \left(\frac{(y_1, \dots, y_i)^*}{\sum_{k=1}^i (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_i)^*} \right).$$

とおく。(補題 8 でコメントしたが、 $y_1, \dots, y_d$ は A 上の *u.s.d.*-列である。従って、[3] の Theorem (3.9) によって $i < d$ であるときは $H_i^j = H_{(z_1)}^j(H_L^i(A))$ が成立する。) このとき、次が成立する。

(1) $k = 0, 1$ のとき、 $H_M^k(G(L)) = (0)$.

$$(2) H_M^2(G(L)) = [H_M^2(G(L))]_{-1} = H_2^0.$$

(3) $k = 3, \dots, d$ のとき、

$$[H_M^k(G(L))]_n = \begin{cases} H_{k-1}^1 & n = 2 - k \\ H_k^0 & n = 1 - k \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$(4) a(G(L)) \leq 1 - d \text{ かつ } [H_M^{d+1}(G)]_{1-d} = H_d^1.$$

$$(5) k = 0, 1, 2, 3 \text{ のとき、 } H_M^k(R(L)) = (0).$$

$$(6) H_M^4(R(L)) = [H_M^4(R(L))]_{-1} = H_3^0.$$

(7) $k = 5, \dots, d+1$ のとき、

$$[H_M^k(R(L))]_n = \begin{cases} H_m^{k-1}(A) & 4 - k \leq n \leq -1 \\ H_{k-1}^0 & n = 3 - k \\ (0) & \text{その他} \end{cases}$$

$$(8) a(R(L)) = -1.$$

このことより、直ちに次の系がわかる。(定理 7 と比較してください。)

系 12 $s = 1$ とする。このとき、 $n \geq d - 3 = d + s - 2$ であれば、 $R(L^n)$ は Cohen-Macaulay 環である。また、 $R(L^n)$ が Cohen-Macaulay 環であれば、 $n \geq d - 2 = d + s - 3$ が成立する。

参考文献

- [1] I. M. ABERBACH, Arithmetic Macaulayfication using ideals of dimension one, preprint.
- [2] S. GOTO AND K. NISHIDA, *The Cohen-Macaulay and Gorenstein Rees Algebras associated to filtrations*, Mem. Amer. Math. Soc., Number 526, 1994
- [3] S. GOTO AND K. YAMAGISHI, The theory of unconditioned strong d-sequences and modules of finite local cohomology, preprint.
- [4] S. GOTO AND K. WATANABE, On graded rings, I, *J. Math. Soc. Japan* **30** (1978), 179–213.
- [5] M. HOCHSTER AND C. HUNEKE, Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 31–116.

- [6] K. KURANO, On Macaulayfication obtained by a blow-up whose center is an equimultiple ideal,
K. YAMAGISHI, Unconditioned strong d -sequences and local cohomology of Rees and associated graded modules (appendix), preprint.
- [7] T. KAWASAKI, On Macaulayfication of certain quasi-projective schemes, preprint.
- [8] C. HUNEKE AND K. E. SMITH, A tight closure approach to arithmetic Macaulayfication, preprint.

東京都立大学理学部数学教室

192-03 東京都八王子市南大沢 1-1

E-mail address: kurano@math.metro-u.ac.jp