

高次元における Yang-Mills 場の Moduli 空間の End について

東大・理 中島 啓

(Hiraku Nakajima)

ここでは, K.K.Uhlenbeck [U2], S.Sedlacek [Se], S.K.Donaldson [D1] による, 4次元多様体上の Yang-Mills 場の Moduli に関するいわゆる “bubble theorem” を高次元の場合に拡張することを目的とする。

以下に従って述べる。

§ 0. Notation

§ 1. 一般の Yang-Mills 場の Moduli の場合

§ 2. Einstein-Hermitian connection の Moduli の場合

§ 3. Einstein metrics の収束について

§0. Notation

以下 Notation は次の通りとする。

(X, g) : n 次元のコンパクトな Riemannian Manifold

$G, \mathfrak{g}$: コンパクト・リー群, およびそのリー環

$P \rightarrow X$: X 上の G 主束

$\mathcal{M}$: P 上の Yang-Mills 場の Moduli空間, すなわち P 上の Yang-Mills 場の全体の集合を gauge 群の作用で割ったもの

$\text{Ad}P$: P の adjoint bundle, すなわち adjoint 表現

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$$

によって P に associate した vector bundle

$A^k(\text{Ad}P)$: $\text{Ad}P$ に値をもつ k -form の全体

$\mathcal{M}$ に次の様に位相を導入する。 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ を Yang-Mills 場の列,
 $[A_i]$ を A_i の表わす class とするとき,

$$[A_i] \longrightarrow [A_{\infty}] \quad \text{in } \mathcal{M}$$

を, ある gauge 変換 γ_i によつて

$$\gamma_i(A_i) \longrightarrow A_{\infty} \quad \text{in } C^{\infty}\text{-topology on } X$$

とできるときと定義する。但しここで, C^{∞} -topology という
 ときには, connection の全体と $A^1(\text{Ad}P)$ を同一視することに

よって導入している。

§1. 一般の Yang-Mills 場の Moduli の場合

Moduli 空間 $\mathcal{M}$ の global な構造を知りたいということが問題意識である。今までに知られていたのは、以下のように低次元の場合に限られていた。

FACT

1) $n = 2, 3$ のとき (Uhlenbeck [U2])

$\mathcal{M}$ はコンパクトである。

2) $n = 4$ のとき (Donaldson [D1])

$\mathcal{M}$ は、一般にコンパクトでない。しかし、任意の列 $\{[A_i]\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ は、 $\int_X |R_{A_i}|^2 dV_g$ が有界であれば X の有限個の点を除いて収束する。(詳しくは、後に述べる Theorem 1 を見よ。)

注意として、 G が abelian のときには $\mathcal{M}$ がコンパクトであることが、Hodge Theory から容易に従うことを指摘しておく。

それでは、この section の主定理を述べよう。

THEOREM 1

任意の Yang-Mills 場の列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ で $\int_X |F_{A_i}|^2 dV$ が有界であるものに対し, ある部分列 $\{j_k\} \subset \{i\}$, gauge 変換 γ_{j_k} , $(n-4)$ 次元の Hausdorff 測度が有限であるようなコンパクト集合 $S \subset X$, $E|_{X \setminus S}$ 上の Yang-Mills 場 A_∞ が存在して,

$$\gamma_{j_k}(A_{j_k}) \rightarrow A_\infty \quad X \setminus S \text{ 上で } C^\infty\text{-収束する。}$$

$(n-4)$ 次元 Hausdorff 測度 $\mathcal{H}_{n-4}$ の復習をしておこう。

距離空間 X の部分集合 A に対し,

$$\mathcal{H}_{n-4}^\varepsilon(A) := \omega_{n-4} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^{n-4} : \begin{array}{l} \text{diam } C_j < \varepsilon \\ A \subset \bigcup_j C_j \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{H}_{n-4}(A) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{H}_{n-4}^\varepsilon(A) \in [0, \infty]$$

と定義する。但し ω_{n-4} は $\mathbb{R}^{n-4}$ の unit ball の体積である。特に $n=4$ の場合は $\mathcal{H}_0(A) = (A \text{ の個数})$ となり, 上の定理は Donaldson の結果と一致する。

以下, Theorem 1 の証明の概略を述べる。Key となるのは次のアプロオリ評価である。

THEOREM 2

n, X, G のみに依存する定数 ε_1, C が存在して次が成立する。

$B_r(x) \subset X$: metric ball に対し, A が $E|B_r$ 上の Yang-Mills 場であつて, $r^{4-n} \int_{B_r(x)} |A|^2 dV_g \leq \varepsilon_1$ を満たすとき

$$\sup_{B_{\frac{r}{4}}(x)} |A|^2 \leq C r^{-n} \int_{B_r(x)} |A|^2 dV_g$$

が成立つ。

証明は harmonic map のときの Schoen の評価 [Sc] と全く parallel にできる。Weitzenböck formula と Monotonicity formula を用いる。

さて $\{A_i\}$ を Theorem 1 にある Yang-Mills 場の列としよう。そこで X の部分集合 S を次のように定義する。

$$S := \{x \in X : \lim_{i \rightarrow \infty} r^{4-n} \int_{B_r(x)} |A_{A_i}|^2 dV \geq \varepsilon_1 \text{ for all } r > 0\}$$

まず $\mathcal{H}_{n-4}(S) < \infty$ となることを見よう。実際、任意の正数 r に対し、次の様な ball family $\{B_r(x_k) : k=1, \dots, 4\}$ を取る。

$$\textcircled{1} \quad S \subset \bigcup_k B_{2r}(x_k), \quad x_k \in S$$

$$\textcircled{2} \quad B_r(x_k) \cap B_r(x_l) = \emptyset \quad \text{if } k \neq l$$

すると, $x_k \in S$ という条件から

$$r^{4-n} \int_{B_r(x_k)} |A_{A_i}|^2 dV \geq \frac{\varepsilon_1}{2} \quad \text{for } i \text{ : 十分大}$$

よって

$$\sum_{\mathbb{R}} \left[\frac{\text{diam} B_r(x_k)}{2} \right]^{n-4} \leq \frac{2}{\varepsilon_1} \int_{B_r(x_k)} |R_{A_i}|^2 dV \leq \frac{2}{\varepsilon_1} \int_X |R_{A_i}|^2 dV \leq \frac{2}{\varepsilon_1} C$$

但し、最後の不等式は、 $\int_X |R_{A_i}|^2 dV$ が上から有界という仮定から導かれる。結局 $r \downarrow 0$ として $\mathcal{H}_{n-4}(S)$ が示された。

次に $X \setminus S$ での A_i の収束を見る。次の Uhlenbeck による Coulomb gauge の存在定理が用いられる。

FACT (Uhlenbeck [U2])

$p \geq \frac{n}{2}$ とする。このとき n, X, G, p に依存する正数 ε_2 が存在して次が成立する。

$\mathbb{P} B_r$ 上の connection A (Yang-Mills だけでなくともよい) が

$$r^{2p-n} \int_{B_r} |R_A|^p dV \leq \varepsilon_2$$

を満たすならば、 $\mathbb{P} B_r$ のある trivialization $\mathbb{P} B_r \cong B_r \times G$ が存在して、 A をこの trivialization によって G -valued 1-form と思ったときに

$$d^* A = 0$$

が成立つ。但し d は $B_r \times G$ の trivial な product connection であり、 d^* はその adjoint である。

A が Yang-Mills 場であることは, $d_A^* A = 0$ と同値である。
これを trivialization を用いて $\mathfrak{g}$ -valued 1-form A の方程式に直すと,

$$d^* dA + [A, dA] + [A, [A, A]] = 0$$

となるが, この方程式は楕円型ではない。Coulomb gauge であるという条件 $d^* A = 0$ をあわせると, A は楕円型の方程式をみたすことになるのである。

$x \in X \setminus S$ としよう。部分列 $1/j_4 < 1/j_5$ を取れば, ある $r > 0$ に対して

$$r^{4-n} \int_{B_r(x)} |A_{j_4}|^2 dV \leq \varepsilon_1 \quad \text{for all } j$$

を満たす。このとき Theorem 2 を用いれば,

$$\sup_{B_{r/4}(x)} |A_{j_4}|^2 \leq C r^{-n} \int_{B_r(x)} |A_{j_4}|^2 dV \leq C r^{-4} \varepsilon_1$$

必要ならば ε_1 をさらに小さく取り直すことにより, 各 A_j は Coulomb gauge の存在定理の仮定をみたすとしてよい。Coulomb gauge による trivialization のもとで A_j の収束をいうのは, 楕円型の微分方程式に関するアプリアリ評価を用いることによつて容易である。これは local な収束でしかないが, theorem の結論にあるような gauge 変換 γ_j を作ることは, technical な議論であつて, 本質的に難しいことではない。

この § を終える前に二、三の注意を述べる。まず Uhlenbeck-Yau の中に(証明なしで)引用されている事実によると, Theorem 1 は, 私たちが Yang-Mills でなくとも成立つようである。但しその場合は $\mathcal{H}_{n-4}(S) < \infty$ までは言えず, 単に $\mathcal{H}_{n-4+\varepsilon}(S) = 0$ がすべての正数 ε について成立つだけのようである。その証明には Coulomb gauge の存在定理がもっと弱い仮定, すなわち, すべての $r_1 \leq r$ に対し

$$r_1^{4-n} \int_{B_{r_1}} |R_A|^2 dV \leq \varepsilon$$

が成立つときに成立することをを用いる。こちらの方が応用範囲は大きいように思われる。

次に, Theorem 1 の状況が起こる例であるが, これは余り知られていないように思われる。§2 はその数少ない例の一つである。Yang-Mills 場の存在定理が高次元の場合は §2 の例を除いて全くないのが理由である。今後の課題と言えるだろう。

§2. Einstein-Hermitian connection の Moduli の場合

この § では, X はコンパクトな Kähler manifold で, 次元を m (よって real の次元は $n = 2m$) とし, ω で Kähler form を表わす。構造群を $G = U(r)$ とし, $U(r)$ の標準的な $\mathbb{C}^r$ へ

の表現によつて E に associate したベクトル・バンドルを E で表す。

まず Einstein-Hermitian connection の定義をしよう。

Definition

E 上の connection A が Einstein-Hermitian であるとは、次の 1) 2) をみたすときを言う。

1) A は holomorphic connection である。

すなわち、 A に associate した外微分作用素

$$d_A : A^p(E) \longrightarrow A^{p+1}(E)$$

を X の complex structure に従つて

$$d_A = \partial_A + \bar{\partial}_A : A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{p+1,q}(E) + A^{p,q+1}(E)$$

と分解したときに

$$\bar{\partial}_A^2 = 0$$

を満たす。

2) 各点 $x \in X$ に対し、正則接バンドル $T_x X$ の unitary frame $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ を取ったときに、

$$\sum_{\alpha=1}^m R_A(e_\alpha, \bar{e}_\alpha) \zeta = \lambda \zeta \quad \text{for all } \zeta \in E_x$$

が成立つ。但し λ は、(点 x にはよらない) 実数であつて、

上、上の方程式を用いると自動的に

$$\lambda = 2m\pi \int_X c_1(E) \wedge \omega^{n-1} / r \cdot \text{vol}(X)$$

となることが従う。

(より詳しいことについて2は、小林先生の本 [K2] を参照するとよい。)

A が Einstein-Hermitian ならば Yang-Mills connection である。

A を Einstein-Hermitian connection とするとき $\bar{\partial}_A$ から定まる X 上の coherent sheaf を $\mathcal{E}_A$ で表わそう。このとき $\mathcal{E}_A$ は、代数幾何で言うところの、“semistable” な sheaf となっている。([K1]) 代数幾何では semistable な sheaf の moduli は調べるだけ2いて、vector bundle だけ考えて2いては compact にならず2 torsion free な semistable sheaf ま2広げると、projective な variety になることが知られて2いる。([M]) を2て、Einstein-Hermitian connection A_i に対応する sheaf $\mathcal{E}_{A_i}$ が vector bundle でない torsion free sheaf に“収束”するとき、微分幾何的に見て A_i がどういうふるまいをするかという問題を考えることは自然である。次の Theorem は、ある条件のもと2この問題に解答を与えるものである。

THEOREM 3

今までの記号2さらに、 X は projective 2、Kähler form ω はある ample line bundle L の $c_1(L)$ に コホモロガス2あるとし、

$$\text{G.C.D.} \left(r, \int_X c_1(E) \wedge \omega^{n-1} \right) = 1$$

が成り立っているとして仮定する。

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ を Einstein-Hermitian connection の列とすると Theorem 1 の結論において, S は $\dim_{\mathbb{C}} S = m-2$ となる analytic set であり, A_{∞} が $X \setminus S$ 上に定める sheaf $\mathcal{E}_{A_{\infty}}$ は, X 上で定義されたある torsion free coherent sheaf $\mathcal{F}$ の $X \setminus S$ への制限である。

証明を述べるかわりに, 収束の状況をより詳しく説明しよう。(実はこの observation が証明の Key Point である。) 記号が繁雑になるのを避けるために, A_i が (gauge 変換をとらずに) A_{∞} に $X \setminus S$ で収束しているとして仮定しよう。まず, Serre の Theorem A が S ample line bundle L を十分 tensor すれば, $\mathcal{E}_{A_i} \otimes \mathcal{O}(L^k)$ が global section で生成される。すなわち, k を十分大にとると, i と無関係な整数 N が存在して,

$$f_i: \mathcal{O}_X^N \longrightarrow \mathcal{E}_{A_i} \otimes \mathcal{O}(L^k)$$

という各 fibre 上で surjective な homomorphism f_i が存在する。但し, $\mathcal{O}_X$ は X の structure sheaf, $\mathcal{O}(L^k)$ は $L^{\otimes k} = \underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{k \text{ 回}}$ の定める sheaf である。 k が i によらずに一様にとれることは, 代数幾何の理論によって保証されている。 f_i の $\text{rank } E = r$ 回の外積を取ると,

$$\wedge^r f_L: \mathcal{O}_X^{(N)} \longrightarrow \wedge^r (\mathcal{E}_{A_i} \otimes \mathcal{O}(L^k))$$

となる。ここで $\wedge^r (\mathcal{E}_{A_i} \otimes \mathcal{O}(L^k))$ は line bundle の構造群が $G = U(1)$ という abel 群の vector bundle $\wedge^r (E \otimes L^k)$ 上の Einstein-Hermitian connection から定まる sheaf であることに注意する。§1 で述べたように、構造群が abelian であれば moduli はコンパクトだから、 $\wedge^r (\mathcal{E}_{A_i} \otimes \mathcal{O}(L^k))$ は、 X 全体である line bundle L_∞ に収束するとしてよい。このとき $\wedge^r f_L$ は適当に定数倍あることによつて

$$g_\infty: \mathcal{O}_X^{(N)} \longrightarrow L_\infty$$

という non-zero homomorphism に収束する。しかしこのとき g_∞ は各 fibre で surjective とは言えず、ちょうど S の上では 0 になる。

まとめようならば、 S は $\mathcal{E}_{A_i}$ の local frame を取ったときに、 i が無限大に発散するにつれて、その frame が一次独立でなくなってしまうところと言える。

なお、Theorem 3 と 簡単な P.D.E の理論を用いると、次の Removable singularity theorem が言える。

THEOREM 4

Theorem 3 で得られた Einstein-Hermitian connection A_∞ は, torsion free sheaf $\mathcal{F}$ の double dual $\mathcal{F}^{**}$ が locally free な所まで smooth に拡張される。よって $\dim \mathcal{C} = m-3$ である analytic set S' があり、 A_∞ は $X \setminus S'$ まで伸びる。

特に $m=2$ のときは A_∞ は X 全体に拡張され、これは Uhlenbeck の removable singularities theorem [U1] と適合する。高次元における removable singularities theorem (いろいろと知られているが、[OS], [N2]) を用いる仮定が強く、Theorem 3 の A_∞ には apply できない。上の Theorem 4 は、簡単なうえ、自然である。

なお、この theorem 4 の結論は一般の Yang-Mills 場のときにも成り立つのではないかと予想している。すなわち A_∞ を Theorem 1 で得られた Yang-Mills 場とすると、あるコンパクト集合 S' で $\mathcal{H}_{n-5+\varepsilon}(S')=0$ for all $\varepsilon>0$ を満たすものが存在して A_∞ は $X \setminus S'$ まで smooth に拡張されるだろうというものである。その根拠は、Schoen-Uhlenbeck の harmonic map の regularity theory [SU] の類推というだけだが、Yang-Mills 場の regularity theory を作るというのは、hard であるが面白い問題のように思われる。

§3. Einstein metric の収束について

これは、私が今一番興味をもっている問題なのであるが、
今までの Yang-Mills 場するときの結果を Einstein 計量るときに
考えこみよというものである。一般に Einstein 計量の Levi-
Civita connection は Yang-Mills であるから、一見 Yang-Mills
ときの結果がそのまま使えそうであるが、実際には §2 ま
での結果は多様体の base metric は fix していたのだから、こ
れはそのまま適用することはできない。

次の様な例が知られていた。

Example (小林(亮)-Todorov) [KT]

X_∞ を $T^4/\mathbb{Z}_2$ とする。但し $\mathbb{Z}_2$ は T^4 に

$$\tau(z_1, z_2) = (-z_1, -z_2) \quad \tau: \mathbb{Z}_2 \text{ の生成元}, (z_1, z_2) \in T^4$$

で作用しているものとする。 g_∞ を T^4 の flat metric $\left(\frac{dz_1^2 + dz_2^2}{(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^2} \right)$
から自然に X_∞ 上に induce される metric としよう。但し、
 $\mathbb{Z}_2$ の作用は T^4 上で 16 個の不動点を持つから (X_∞, g_∞) は
manifold ではなく orbifold である。これは Kähler orbifold であ
る。singular point を $x_1, \dots, x_{16}$ と書くことにしよう。

$$\pi: X \rightarrow X_\infty$$

を X_∞ の (complex surface と (2 の) minimal resolution としよ
う。 X は K3 surface である。このとき、 X 上の Ricci-flat
Kähler metric の列 $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ で、次をみたすものが存在す

る。

$$1) \operatorname{vol}(X, g_i) = 1 \quad \text{for all } i$$

$$2) \operatorname{vol}(\pi^{-1}(x_a), g_i|_{\pi^{-1}(x_a)}) = 1/i \quad \text{for all } i, a$$

としこのとき, g_i たちは $\pi^{-1}(x_a)$ を除いたところでは, $\pi^{-1}(g_\infty)$ に収束する。(実は (X, g_i) は (X_∞, g_∞) に Hausdorff distance で収束している。ここでは Hausdorff distance について述べない。例えば Surveys in Geometry の "Gromov の幾何学" を参照)

この例をみる限り極限では, 多様体の differentiable structure まどが変わってしまっている。これは, Yang-Mills のときでも bundle の topological type がかわってしまうことから見れば当然と言えるだろう。

これについて私の今までに得た結果は,

(X_i, g_i) という Einstein 4-manifold の列を考えたときに,

とれが 1) $\operatorname{diam}(X_i, g_i)$ は上から bounded

2) $\operatorname{vol}(X_i, g_i)$ は下からある正定数で bounded

3) X_i たちの Euler 数は bounded

をみたすならば, (X_i, g_i) の Hausdorff distance に関する収束先 (X_∞, d_∞) という距離空間が, 有限個の点を除いて $\mathbb{R}^4$

manifoldであつて, さらに X_∞ 有限個の点と上に Einstein 計量 g_∞ が定義され, g_i たちは“ある意味で” g_∞ に収束するといふものである。

現在論文をまとめている段階なので詳しい内容については別の機会にゆずることにする。

References

- [D1] S.K.Donaldson, An applicaton of gauge theory to 4-dimensional topology, J. Diff. Geom., 18 (1983), 279-315.
- [D2] S.K.Donaldson, Infinite determinants, stable bundles and curvature, Duke Math. J. 54 (1987), 231-247.
- [K1] S.Kobayashi, Differential geometry of holomorphic vector bundles, Math. Seminar Notes (by I.Enoki), 41 (1982), Univ. of Tokyo (in Japanese).
- [K2] S.Kobayashi, Differential geometry of complex vector bundles, Publ. of Math. Soc. of Japan, 15 (1987), Iwanami Shoten.
- [KT] R.Kobayashi and A.Todorov, Polarized period map for generalized K3 surfaces and the moduli of Einstein metrics, Tohoku Math. J., 39, 145-151 (1987).
- [L] M.Lübke, Stability of Einstein-Hermitian vector bundles, Manuscripta Math., 42 (1983), 245-257.
- [M] M.Maruyama, Moduli of stable sheaves I & II, J. Math. Kyoto Univ., 17 (1977), 91-126, and ibid., 18 (1978), 557-614.
- [N1] H.Nakajima, Compactness of the moduli space of the Yang-Mills connections in higher dimensions, preprint.
- [N2] H.Nakajima, Removable singularities for Yang-Mills connections in higher dimensions, to appear in J.Fac.Sci.Univ.Tokyo.
- [N3] H.Nakajima, On the ends of the moduli space of Einstein-Hermitian connections and removable singularities theorem, preprint.
- [OS] T.H.Otway and L.M.Sibner, Point singularities of coupled gauge fields with low energy, to appear in Comm. Math. Phys.

- [Sc] R.Schoen, Analytic aspects of the harmonic map problem, Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations, ed. S.S.Chern, Springer-Verlag, 1985, 321-358.
- [Se] S.Sedlacek, A direct method for minimizing the Yang-Mills functional, Comm. Math. Phys., 86 (1982), 512-528.
- [U1] K.Uhlenbeck, Removable singularities in Yang-Mills fields, Comm.Math.Phys., 83 (1982), 11-30.
- [U2] K.Uhlenbeck, Connection with L^p -bounds on curvature, Comm. Math. Phys., 83 (1982), 31-42.
- [UY] K.Uhlenbeck and S.T.Yau, On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, Comm.Pure and Appl.Math., 39, Number S., (1986), 257-293.