

ある種のブロック・デザインの不存

カルガリイ大学 小川潤次郎
(名誉教授)

釣合型不完全ブロック計画 — 略して BIBD — は次のように定義される。 v 個の処理と大きさ b の r 個のブロックがあって、

(1) 各ブロックは k 個の相異なる処理を含む、

(2) 各処理は r 個のブロックに現われる、

(3) 任意の二つの処理の対は丁度 λ 個のブロックに現われる。

BIBD を規定する 5 個の整数 v, b, r, k, λ の間には次の関係があることが見易い。

$$vr = bk, \quad \lambda(v-1) = r(k-1).$$

更に又 'Fisher の不等式'

$$v \leq b \quad \text{従って} \quad r \geq k.$$

が成り立つ。 $v=b$ 従って $r=k$ のとき BIBD は対称であるという。そうでないときは非対称であるという。

1930 年代に R.A. Fisher と F. Yates は $r \leq 10$ の範囲の BIBD を全部リストしようとした。そのときどうしても作れなかったものも現われた。それは次の通りであった。

$$(\alpha) \quad v=15, \quad b=21, \quad r=7, \quad k=5, \quad \lambda=2,$$

$$(A^*) \quad v=22, \quad b=22, \quad n=7, \quad k=7, \quad \lambda=2,$$

$$(B) \quad v=21, \quad b=28, \quad n=8, \quad k=6, \quad \lambda=2,$$

$$(B^*) \quad v=29, \quad b=29, \quad n=8, \quad k=8, \quad \lambda=2,$$

$$(C) \quad v=36, \quad b=45, \quad n=10, \quad k=8, \quad \lambda=2,$$

$$(C^*) \quad v=46, \quad b=46, \quad n=10, \quad k=10, \quad \lambda=2,$$

$$(D) \quad v=46, \quad b=69, \quad n=9, \quad k=6, \quad \lambda=1,$$

$$(E) \quad v=51, \quad b=86, \quad n=10, \quad k=6, \quad \lambda=1.$$

色々な人々が試みを作ったので、これらの不存在証明と
うことの問題になって来た訳である。更に部分釣合型不完全ブ
ロック計画—PBIBD—でも同様の問題がある。この不存在証明に対
する有力な武器は Hall-Minkowski の p -不変量である。

§1. BIBD の結合行列 全体で $n=vn=bk$ 個ある実験単位又ポ
ットに任意に一連番号をつけ、 α -処理に対して、 n 次元のイ
ンダックス ζ_α を次のように定める。但し ζ'_α は ζ_α の転置された行ベク
トルを表わす。

$$\zeta'_\alpha = (\zeta_{1\alpha}, \zeta_{2\alpha}, \dots, \zeta_{n\alpha})$$

で、その成分は

$$\zeta_{f\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{もし } \alpha \text{ 処理が } f \text{ ポットに施されたならば} \\ 0 & \text{否ならば} \end{cases}$$

$$n \times v \text{ 行列} \quad \Phi = \|\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_v\|$$

を処理の結合行列と"う。 Q -ブ"ロックに対して n 次元インダックス η_α

と次のように定めた

$$\eta'_a = (\eta_{1a} \eta_{2a} \cdots \eta_{na}),$$

その成分は

$$\eta_{fa} = \begin{cases} \text{もし } f\text{-}7^\circ \text{ ロットが } a\text{-}7^\circ \text{ ロットに属するならば,} \\ \text{然らば } 1 \text{ である} \end{cases} \quad 0.$$

$$n \times b \text{ 行列 } \Psi = \|\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_b\|$$

を 7° ロットの結合行列と"う。このとき

$$\Phi' \Phi = n I_v, \quad \Psi' \Psi = k I_b.$$

さて, $u \times b$ 行列

$$N = \Phi' \Psi = \|n_{aa}\|$$

を考へると, その要素 n_{aa} は

$$n_{aa} = \sum_{f=1}^n \sum_{j=1}^b \eta_{fa} = \begin{cases} \text{もし } a\text{-}7^\circ \text{ ロットが } a\text{-}7^\circ \text{ ロットに属するならば,} \\ \text{然らば } 1 \text{ である} \end{cases} \quad 0.$$

これは今考へてゐる BIRD の結合行列と呼ばれてゐる。

$$NN' = (n-\lambda) I_v + \lambda G_v,$$

但し G_v はその要素がすべて 1 である $u \times u$ 行列であり, その行列式を取ると

$$\det NN' = n^k (n-\lambda)^{u-k}.$$

この左辺は N の u 個の b 次元行列のグラム行列式である。この右辺は $n \neq \lambda$ は有限一様独立で, 従つて $u \leq b$ である。これは Fisher の不等式である。若し $n = \lambda$ なら $u = k$, $b = n = \lambda$ となつて完

全ブロック計画とわけて了う。

BIBD に対称な N は *non-singular* な正方形行列であるから、 $NN' = N'N$ 即ち正規行列となる。従って任意の二つのブロックは λ 個の処理を共有することと判別する。このことから、 $v=b, r=k, \lambda$ である対称な BIBD が存在すれば、それと 1 ブロックと、そのブロックに含まれる k 個の処理を有することとなる。

$$v^* = v - k, \quad b^* = v - 1, \quad r^* = r, \quad k^* = k - \lambda, \quad \lambda^* = \lambda$$

なす非対称な BIBD が生ずる。これを '切捨法' といい、 $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ は対称な $(\alpha^*), (\beta^*), (\gamma^*)$ が切捨法で得られるものである。1 ブロックを有し、それに含まれる 2 処理を有すると

$$v^{**} = k, \quad b^{**} = v - 1, \quad r^{**} = k - 1, \quad k^{**} = \lambda, \quad \lambda^{**} = \lambda - 1$$

なす非対称な BIBD が生ずる。

対称な BIBD では結合行列は 0-1 要素をもつ正方形行列であるから $\det N$ は整数、従って

$$r^2(v-\lambda)^{v-1} = (\det N)^2 = \text{完全平方}$$

$$(v-\lambda)^{v-1} = \text{完全平方}$$

となる。もし v が偶数ならば、 $v-1$ が奇数であるから、 $v-\lambda$ 自身が完全平方となる必要がある。従って前掲の $(\alpha^*), (\gamma^*)$ の不存在は判別する。然し $(\alpha), (\gamma)$ の不存在はできない。 (β^*) の存在・不存在も判定する。これは Hasse-Minkowski の p -不変量を引用して行われる。

§2. Harn-Minkowski の p -不変量 p は素数 a_i は正の整数又

は 0 と 1 である

$$\alpha = a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots$$

の形の数を p -進数という。これから p^k 以上の項を捨て去つて残りの有限和を α_k と書くことにしよう。二つの p -進数 α, β について、 $\alpha = \beta$ ということとはある一定の正整数 K より大の n に対して $\alpha_n = \beta_n$ である

$$\alpha_k \equiv \beta_k \pmod{p^k}$$

が成り立つことと同値である。特に係数 a_i は $0 \leq a_i \leq p-1$ の範囲にとるべきである。このときは p -進数のカノニカル表現という。 α, β が共にカノニカル表現で表わされてゐるならば、 $\alpha = \beta$ ということとは、 n に対して $\alpha_n = \beta_n$ である。 p の冪次を含む。

$$\gamma = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots$$

の形のものを p -進整数という。特に $a_0 \neq 0$ とする。 γ が単数ということとは、 γ が整数ということと同値である。 p -進数の全体は可換体となり、これを $\mathbb{Q}_p$ で表わす。 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_p$ 。実数体 $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_0$ として、これに代るものを $\mathbb{R}_p$ で表わすことができる。

今 α, β を共に 0 でない p -進整数として、記号 $(\alpha, \beta)_p$ を次のように定義して、これを Hilbert のノルム剰余記号と呼ぶ。不定方程式

$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ が p -進整数解をもてば, $(\alpha, \beta)_p = +1$,
 解をもたずとも $(\alpha, \beta)_p = -1$.

Hilbert 記号の性質:

(1) a, b が互いに素の整数で $p \nmid ab$ ならば $(a, b)_p = +1$.

(2) $(a, b)_p = (b, a)_p$.

(3) $(ac^2, bc^2)_p = (a, b)_p$.

(4) $(a, -a)_p = +1$.

(5) $(2ab, p) = 1$ ならば $(a, b)_p = 1$.

(6) $(a, b)_p \cdot (a, c)_p = (a, bc)_p$.

(7) $(a, a)_p = (a, -1)_p$.

(8) $(ac, bc)_p = (a, b)_p \cdot (c, -ab)_p$.

(9) $(a, p)_p = \left(\frac{a}{p}\right)$ (Legendre 記号).

(10) a, b が 0 でない整数ならば $\prod_p (a, b)_p = +1$, 但しこの積は $p \in \mathbb{N}$ を含むすべての素数にわたるものである.

Hilbert 記号については Helmut Hasse: *Number Theory*, Springer-Verlag Berlin,

Heidelberg, New York 1980, Chapt. 5, §6. The Quadratic Reciprocity Law as Product Formula

for the Hilbert Symbol pp. 92-96 参照.

二つの有理数域上の n 次の行列 A, B について, 正則な有理行列 C があって $C'AC = B$ となることを, A と B とは 有理的に合同 であるといふ, $A \sim B$ であることである. 有理的合同的については Hasse の定理が基本的である. 吾々取って必要は形で Hasse の定理

を述べる。

Hasseの定理 二つの n 次有理対称な定正行列 A, B が有理的に合同であるための必要且十分の条件は

$$\det A \sim \det B$$

で更に p を含むすべての素数 p に対して

$$C_p(A) = C_p(B)$$

であることである。但し (1) へ $D_0 = 1, D_1, D_2, \dots, D_n = \det A$ をそれぞれ $0, 1, 2, \dots, n$ 次の首座小行列式として

$$C_p(A) = (-1)_p \prod_{i=1}^n (D_i, D_{i-1})_p$$

であつて、これを Hasse-Minkowski の p -不変量 である。

吾々が使うのは必要条件の方である。すべての nm -singular な二次形式は nm -singular な有理変換で対角線型になる。上の定理の必要条件の方も証明する。これは次の補題を証明すればよい。

補題 二つの nm -singular な二次形式

$$f = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \quad \text{と} \quad f' = \sum_{i=1}^n a'_i x_i^2$$

とが有理的に合同ならば、凡ての素数 p に対して

$$\bar{C}_p(f) = \bar{C}_p(f')$$

但し (2) で

$$\bar{C}_p(f) = \prod_{i=1}^n (D_i, D_{i-1})_p = \prod_{i \leq k} (a_i, a_k)_p.$$

証明 は n に対しての数学的帰納法でやぶ。先づ $n=1$ のときは f と f' が有理的に合同ならば $a_1 \sim a'_1$ 従つて $(a_1, a_1)_p = (a'_1, a'_1)_p$.

$n=2$ のときは

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = a'_1 y_1^2 + a'_2 y_2^2$$

但し y_1, y_2 は x_1, x_2 の有理係数の一次式である。両辺に a_1 を掛けて、 $(\cdot)$ で $y_2=0$ とおくと

$$a_1^2 x_1^2 + a_1 a_2 x_2^2 = a_1 a'_1 y_1^2$$

よって

$$a_1 a'_1 \left(\frac{y_1}{a_1 x_1} \right)^2 - a_1 a_2 \left(\frac{x_2}{a_1 x_1} \right)^2 = 1$$

よって

$$(a_1 a'_1, -a_1 a_2)_p = 1$$

$$(a_1, -a_1 a_2)_p = (a'_1, -a_1 a_2)_p$$

一方 $d(f) = a_1 a_2 \sim d(f) = a'_1 a'_2$ であるから

$$(a_1, -a_1 a_2)_p = (a'_1, -a'_1 a'_2)_p \Rightarrow (a_1, a_2)_p = (a'_1, a'_2)_p$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_p(f) &= (a_1, a_2)_p (a_1, a_2)_p (a_1, a_2)_p = (-1, a_1)_p (a_1, a_2)_p (-1, a_2)_p = (-1, a_1 a_2)_p (a_1, a_2)_p \\ &= (-1, a_1 a'_2)_p (a'_1, a'_2)_p = (a'_1, a'_2)_p (a'_1, a'_2)_p (a'_1, a'_2)_p = \bar{c}_p(f). \end{aligned}$$

$n \geq 3$ のときは、 $n-1$ 次までは有理変換に対する $\bar{c}_p(f)$ の不変性を証明されたものと仮定する。

$$f = a_1 x_1^2 + \varphi(x_2, \dots, x_n), \quad f' = a'_1 x_1^2 + \varphi'(x_2, \dots, x_n)$$

変換行列 $S = \|a_{ik}\|$ とすれば

$$S \begin{vmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_n \end{vmatrix} S = \begin{vmatrix} a'_1 & & 0 \\ & a'_2 & \\ 0 & & a'_n \end{vmatrix}$$

である。今行列 S_0 を次の如くとし

$$S_0 = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\frac{a_2}{a_1'}\alpha_{21} & \cdots & -\frac{a_n}{a_1'}\alpha_{n1} \\ \alpha_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right\|,$$

然らば計算してやれば次のようになる

$$f_0 = S_0' f S_0 = a_1' x_1^2 + \varphi_0(x_2, \dots, x_n)$$

こゝで φ_0 の係数行列は

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_2 - \frac{a_2^2 \alpha_{21}^2}{a_1'} & -\frac{a_2 a_3 \alpha_{21} \alpha_{31}}{a_1'} & \cdots & -\frac{a_2 a_n \alpha_{21} \alpha_{n1}}{a_1'} \\ -\frac{a_3 a_2 \alpha_{31} \alpha_{21}}{a_1'} & a_3 - \frac{a_3^2 \alpha_{31}^2}{a_1'} & \cdots & -\frac{a_3 a_n \alpha_{31} \alpha_{n1}}{a_1'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n a_2 \alpha_{n1} \alpha_{21}}{a_1'} & -\frac{a_n a_3 \alpha_{n1} \alpha_{31}}{a_1'} & \cdots & a_n - \frac{a_n^2 \alpha_{n1}^2}{a_1'} \end{array} \right\| \quad (*)$$

すなわち

$$S_0' S^{-1} f_0 S_0' S = f'$$

こゝで計算して確かめよう

$$S_0' S = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right\|,$$

但し

$$B = \|\beta_{ik}\|, \quad \beta_{ik} = \alpha_{ik} - \frac{\alpha_{i1} \alpha_{k1}}{\alpha_{11}},$$

従つて

$$B' \varphi_0 B = \varphi'.$$

数学的帰納法の仮定より

$$d(\varphi_0) \sim d(\varphi), \quad \overline{\varphi}_p(\varphi_0) = \overline{\varphi}_p(\varphi')$$

とすると

$$\overline{\varphi}_p(f_0) = (a'_1, a'_1)_p(a'_1, d(\varphi_0))_p, \quad \overline{\varphi}_p(\varphi_0) = (a'_1, a'_1)_p(a'_1, d(\varphi))_p, \quad \overline{\varphi}_p(\varphi') = \overline{\varphi}_p(f').$$

従って、おれおれの証明より、このことは

$$\overline{\varphi}_p(f) = \overline{\varphi}_p(f_0)$$

ということが出来る。

故て

$$a'_1 = u_1,$$

$$a'_1 - a_2 \alpha_{21}^2 = u_1 - a_2 \alpha_{21}^2 = u_2,$$

$$a'_1 - a_2 \alpha_{21}^2 - a_3 \alpha_{31}^2 = u_2 - a_3 \alpha_{31}^2 = u_3,$$

$$a'_1 - a_2 \alpha_{21}^2 - a_3 \alpha_{31}^2 - \dots - a_{r-1} \alpha_{r-1,1}^2 = u_{r-2} - a_{r-1} \alpha_{r-1,1}^2 = u_r,$$

とかく、 φ_0 の係数行列(*)は次り行列と有理的合同となる。

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} a_2 \frac{u_2}{u_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 \frac{u_3}{u_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r-1} \frac{u_{r-1}}{u_{r-2}} \end{array} & \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} & \begin{array}{c} a_2 \frac{u_{r-1} - a_2 \alpha_{r-1,1}^2}{u_{r-1}} - \frac{a_2 a_{r-1} \alpha_{r-1,1} \alpha_{r-1,1}}{u_{r-1}} \dots - \frac{a_2 a_{r-1} \alpha_{r-1,1} \alpha_{r-1,1}}{u_{r-1}} \\ \vdots \\ a_{r-1} \frac{u_{r-1} - a_{r-1} \alpha_{r-1,1}^2}{u_{r-1}} - \frac{a_{r-1} a_{r-1} \alpha_{r-1,1} \alpha_{r-1,1}}{u_{r-1}} \dots - \frac{a_{r-1} a_{r-1} \alpha_{r-1,1} \alpha_{r-1,1}}{u_{r-1}} \end{array} \end{array}$$

適当に変数の番号をとり又之を φ_0 とし

$$u_r = u_{r+1} - a_r \alpha_{r+1}^2 = 0$$

ならば

$$u_{r+1} - a_{r+1} \alpha_{r+1}^2 = u_{r+1} - a_{r+2} \alpha_{r+2}^2 = \dots = u_{r+1} - a_n \alpha_n^2 = 0$$

であるから $r < n$ は不可能、同様に $r = n$ ならば $d(\varphi_0) = 0$

を意味する。又 $r = n+1$ ならば

$$\varphi_0 \sim \sum_{i=2}^n \frac{u_i}{u_{i+1}} x_i^2 \sim \sum_{i=2}^n u_{i+1} u_i x_i^2$$

$$2 < r \leq n-1$$

の場合には

$$\varphi_0 \sim \varphi_1 + \varphi_2$$

より

$$\varphi_1 = \sum_{i=2}^{r-1} a_i \frac{u_i}{u_{i+1}} x_i^2 \sim \sum_{i=2}^{r-1} a_i u_i u_{i+1} x_i^2$$

$$\varphi_2 = - \sum_{i \neq j=0}^{n-r} \frac{a_{r+i} a_{r+j} \alpha_{r+i} \alpha_{r+j}}{u_{r+1}} x_{r+i} x_{r+j} \sim -u_{r+1} \sum_{i \neq j=0}^{n-r} x_{r+i} x_{r+j}$$

$2 > r$ 、 $u_r = a_r' = a_1 \alpha_n^2 + a_2 \alpha_{n-1}^2 + \dots + a_n \alpha_{r+1}^2$ と置く

$$a_r \alpha_{r+1}^2 = a_{r+1} \alpha_{r+1}^2 = \dots = a_n \alpha_n^2 = u_{r+1}$$

であるから

$$a_1 \alpha_n^2 = u_1 - a_2 \alpha_{n-1}^2 - \dots - a_n \alpha_{r+1}^2 = -(n-r) u_{r+1}$$

より

$$a_1 \sim -(n-r) u_{r+1}$$

であることが

但し $|A| = \det A$, $A+B = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$, $A \otimes B$ は Kronecker 積を表わすものとす。
 である。

Hilbert 記号の計算で有用なものに

$$(a, b)_p = (a+b, -ab)_p$$

から $a = n+1$, $b = -1$ とすると

$$(n+1, -1)_p = (n, n+1)_p.$$

対称は BIBD の存在の必要条件. BIBD に対称なら, その結

合行列 N は正交行列であって

$$N I_v N' = (n-\lambda) I_v + \lambda G_v$$

から

$$M \equiv (n-\lambda) I_v + \lambda G_v \sim I_v.$$

ところで, M の固有根 $n + (v-1)\lambda = n^2 k$ に対応する固有ベクトルは $j'_v = (1,$

$1, \dots, 1)$ であり, これと直交する有理ベクトルは M のもう一つの

固有根 $n-\lambda$ に対応する。

$$H = \begin{vmatrix} 1 & v-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & v-2 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{vmatrix},$$

とすれば

$$H' M H = \begin{vmatrix} n^2 v & 0 \\ 0 & (n-\lambda) Q \end{vmatrix},$$

2.7.2

$$Q = \left\| \begin{array}{cc} v(u-1) & \circ \\ (u-1)(u-2) & \\ \circ & \vdots \\ & 2.1 \end{array} \right\|$$

$$G_p(Q) = (-1, -1)_p$$

2.7.2.2

$$G_p(M) = (-1, -1)_p \cdot (-1, 2\lambda)_p^{\frac{v(u-1)}{2}} \cdot (v, 2\lambda)_p$$

一方 $G_p(\mathbb{I}_v) = (-1, -1)_p$ である。必要条件として、すべての素数 p に対して

$$S_p \equiv (-1, 2\lambda)_p^{\frac{v(u-1)}{2}} \cdot (v, 2\lambda)_p = +1$$

を得る。

例として、 $v=b=29$, $\lambda=k=8$, $\lambda=2$ のときは

$$S_p = (29, 6)_p = (29, 2)_p (29, 3)_p$$

である。 $p=3$ とすると

$$S_3 = \left(\frac{29}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1$$

とある。この位数に対して B/BD は存在しない。

§4 アソシエーション代数 v 個の要素の間に定義されたアソ

シエーションとは次の3条件を満たす関係である。

(1) 任意の二つの要素をとれば、それらは互に第1種のアソシエート、第2種のアソシエート、……、又は第 n 種のアソシエートのいずれかである。

(2) 各要素は n_i 個の第 i 種アソシエートをもつ.

(3) 今 α と β が第 i 種のアソシエートであれば, α に対して第 j 種, β に対しては第 k 種アソシエートであるような要素 γ の数は p_{jk}^i であって, これはすべての第 i 種アソシエートに対して共通である.

各要素はそれ自身の第 0 種アソシエートであるというように考えれば

$$n_0 = 1, \quad p_{ik}^0 = \delta_{ik}, \quad p_{ij}^0 = n_i \delta_{ij}$$

より δ_{ij} は Kronecker のデルタである.

これらの係数の間には次の関係が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^m n_i = v.$$

$$p_{jk}^i = p_{kj}^i, \quad \sum_{j=0}^m p_{jk}^i = n_k.$$

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ki}^j = n_k p_{ij}^k.$$

第 i 種アソシエーションを表わす行列として

$$A_i = \|a_{\alpha\beta}^i\|, \quad \text{但し } a_{\alpha\beta}^i = \begin{cases} \alpha \text{ と } \beta \text{ が第 } i \text{ 種アソシエートなら } 1, \\ \text{そうでないときは} & 0. \end{cases}$$

とすれば, かつ

$$\sum_{i=0}^m A_i = G_0,$$

であるから

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^m p_{ij}^k A_k = A_j A_i$$

となることと分かる. したがって一次独立な $m+1$ 個のアソシエーション

行列 $A_0, A_1, \dots, A_m$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上 K 可換代数 $\mathcal{O}$ を張る. これを ソリューション代数 とする.

$$\mathcal{P}_i = \left\| p_{\alpha\beta}^i \right\|_{\alpha, \beta=0,1,\dots,m}, \quad i=0,1,\dots,m$$

とすれば

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} A_i = \mathcal{P}_i \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \quad K \text{ 上 } A_i \rightarrow \mathcal{P}_i.$$

この写像を定まる $\mathcal{P}_i$ は一次形式であって, $\mathcal{O}$ の正規表現を生成する. もし $\mathcal{P}_i, i=0,1,\dots,m$ のうちの $\mathcal{P}_i$ の固有値が有理数ならば, $\mathcal{O}$ の正規表現は有理数体内で $m+1$ 個の一次表現に分解されて, 従って $\mathcal{O}$ 自身もこれらの一次表現の一次結合として表わされる.

$$A_i G = G A_i = n_i G$$

なることを考慮して,

$$C = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_{10} & C_{11} & \dots & C_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m0} & C_{m1} & \dots & C_{mm} \end{array} \right\|$$

の形の non-singular な行列をあって

$$C P_i C^{-1} = \left\| \begin{array}{cccc} Z_{0i} = n_i & & & \\ & Z_{1i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Z_{mi} \end{array} \right\|, \quad i=0,1,\dots,m$$

とある. これから

$$Z = \begin{pmatrix} n_0 & n_1 & \cdots & n_m \\ z_{01} & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ z_{20} & z_{21} & \cdots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m0} & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{pmatrix}$$

とし、

$$C = Z^{-1}$$

とすれば良いことになり、

$$A_u^\# = \sum_{i=0}^m C_{ui} A_i, \quad u=0, 1, \dots, m$$

とするとこれは互に直交するアイデンティティであって

$$A_u^\# A_i = z_{ui} A_u^\#, \quad u=0, 1, \dots, m; i=0, 1, \dots, m.$$

であって、 $A_u^\#$ の階数 α_u は $A_i \rightarrow z_{ui}, i=0, 1, \dots, m$ の $0 \leq i \leq m$ の重複度である。従ってこれは

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m &= v \\ \alpha_0 z_{01} + \alpha_1 z_{11} + \alpha_2 z_{21} + \cdots + \alpha_m z_{m1} &= 0 \\ \alpha_0 z_{02} + \alpha_1 z_{12} + \alpha_2 z_{22} + \cdots + \alpha_m z_{m2} &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_0 z_{0m} + \alpha_1 z_{1m} + \alpha_2 z_{2m} + \cdots + \alpha_m z_{mm} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

が定められる。勿論 $\alpha_0=1$ ならばこれは見易い。

85. 正則・対称な PBIBD の存在の必要条件. アソシエーションを
由つた v 個の処理区、大きさ k の b 個のブロック、 k 次条件を満
たすように割り当てられているとき、これを 部分釣合型不完全フ

ブロック計画 PBIBD とする。

(1) 各ブロックは k 個の相異なる処理を含む。

(2) 各処理は r 個のブロックに現われる。

(3) 第 i 種アソシエートの各処理対は λ_i 個のブロックに現われる。

この場合も勿論 $vr = bk$ であり、又

$$n_0\lambda_0 + \dots + n_m\lambda_m = r(k-1)$$

であり、 $\lambda_0 = r$ とおくと

$$\sum_{i=0}^m n_i \lambda_i = rk.$$

$v=b$ 従って $r=k$ の場合は PBIBD は対称であるという。

この PBIBD の結合行列を N とすれば

$$NN' = rA_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m$$

さて

$$A_i = z_{0i} A_0^* + z_{1i} A_1^* + \dots + z_{mi} A_m^*, \quad i=0, 1, \dots, m$$

であつたから、 NN' を直交アイデンティティで表わして

$$NN' = p_0 A_0^* + p_1 A_1^* + \dots + p_m A_m^*$$

とすれば

$$p_0 = \sum_{i=0}^m z_{0i} \lambda_i = \sum_{i=0}^m n_i \lambda_i = rk,$$

$$p_i = \sum_{t=0}^m z_{it} \lambda_t, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

すなわち $p_i > 0$, $i=1, 2, \dots, m$ のとき、PBIBD は正則であるという。

以下では PBIBD は対称正則で且 $\mathbb{Q}_i$ の固有値がすべて有理

数の場合を考へる。説明を簡単にする爲に $m=2$ とし、これを一般の場合への拡張は簡単である。

$m=2$ の場合には、三つの直交する n 等行列 $A_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}} G_0, A_1^*, A_2^*$ はすべて有理行列である。これらより一次独立な列ベクトルを取り出して、援大なる n 等行列を S とする。すなわち

$$S = \| a_1^{0*} a_2^{0*} \dots a_{n/2+1}^{1*} a_{n/2+2}^{1*} \dots a_n^{2*} \|,$$

と、更に

$$Q_1 = \begin{pmatrix} a_2^{1*} \\ \vdots \\ a_{n/2+1}^{1*} \end{pmatrix} \| a_2^{0*} \dots a_{n/2+1}^{0*} \|, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} a_{n/2+2}^{2*} \\ \vdots \\ a_n^{2*} \end{pmatrix} \| a_{n/2+2}^{0*} \dots a_n^{0*} \|$$

とすれば

$$SS = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & Q_1 & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

より

$$v. |Q_1| \cdot |Q_2| \sim 1,$$

$$(|Q_1|, |Q_2|, G_0(Q_1), G_0(Q_2)) = 1,$$

より

$$S'NN'S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & P_1 Q_1 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 Q_2 \end{pmatrix}$$

である。対称性より $NN' \sim I_n$ である

$$v. P_1 P_2 |Q_1| |Q_2| \sim 1$$

より

$$\rho_1^{\alpha_1} \rho_2^{\alpha_2} \sim 1.$$

更ニ $G_p(N|N|')$ を計算すると

$$(-1, -1)_p \cdot (\rho_1^{\alpha_1}, \rho_2^{\alpha_2})_p \cdot (\rho_1, |Q_1|)_p \cdot (\rho_2, |Q_2|)_p \cdot (-1, \rho_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}} \cdot (-1, \rho_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}}$$

を得る。又、条件、 γ の重数 ϕ により

$$O_p = (-1, \rho_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}} \cdot (-1, \rho_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}} \cdot (\rho_1, \rho_2)^{\alpha_1 \alpha_2} (\rho_1, |Q_1|)_p (\rho_2, |Q_2|)_p = +1.$$

を得る。 $|Q_1||Q_2| \sim 0$ である。結果は $|Q_1|$ である。その接点判

別は O_p を用いて示すことができる。

(1) Group-divisible type: $v=b=mn$, $n=k$, λ_1, λ_2

$$\rho_0 = n^2, \quad \rho_1 = n^2 - v\lambda_2, \quad \rho_2 = n - \lambda_1$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = m-1, \quad \alpha_2 = (n-1)m.$$

$$(n^2 - v\lambda_2)^{m-1} (n - \lambda_1)^{(n-1)m} \sim 1.$$

$$O_p = (-1, \rho_1)_p^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot (-1, \rho_2)_p^{\frac{m(m-1)(m-1)}{2}} (\rho_1, n)_p^m (\rho_2, n)_p^m (\rho_1, \lambda_2)_p = 1.$$

(2) Triangular type or T_2 type: $v=b=\frac{n(n-1)}{2}$, $n=k$, λ_1, λ_2 .

$$\rho_0 = n^2, \quad \rho_1 = n + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2, \quad \rho_2 = n - 2\lambda_1 + \lambda_2$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = n-1, \quad \alpha_2 = n(n-3)/2.$$

$$[n + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2]^{n-1} [n - 2\lambda_1 + \lambda_2]^{\frac{n(n-3)}{2}} \sim 1.$$

$$O_p = (-1, \rho_1)_p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot (-1, \rho_2)_p^{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}} (\rho_1, n)_p \cdot (\rho_1, n-2)_p^{n-1} (\rho_2, 2)_p (\rho_2, n+1)_p (\rho_2, n-2)_p^{n-1} = 1.$$

(3) L_t type: $v=b=n^2$, $n=k$, λ_1, λ_2

$$\rho_0 = n^2, \quad \rho_1 = n + (n-t)\lambda_1 - (n-t+1)\lambda_2, \quad \rho_2 = n - t\lambda_1 + (t-1)\lambda_2$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = t(n-1), \quad \alpha_2 = (n-1)(n-t+1)$$

$$\rho_1^{t(n-1)} \rho_2^{(n-1)(n-t+1)} \sim 1.$$

$$O_p = (-1, p_1)_p^{\frac{t(n-1)(n-t-1)}{2}} \cdot (-1, p_2)_p^{\frac{(n-1)(n-t-1)(2n-t-2)}{2}} \cdot (-1, p_2)_p^{n-1} = 1$$

$\frac{1}{2}n$ is L_2 type. n is 1 or 12

$$O_p = (-1, p_1)_p^{n-1} = 1$$

n is 3.

References

1. Bose, R. C. & Connor, W. S. (1952) Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs, AMS, 23, 367—383.
2. Bruck, R. H. & Ryser, H. J. (1949) Non-existence of certain finite projective planes, Can. J. Math. 1, 88—93.
3. Connor, Jr, W. S. (1952) On the structure of balanced incomplete block designs, AMS, 23, 57—71.
4. Fisher, R. A. (1940) An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks, Ann. of Eugenics, 10, 62—75.
5. Fisher, R. A. & Yates, F. (1949) Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research. Hafner Publishing Company, New York.
6. Hasse, H. (1923) Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen. J. reine u. angewandte Math. 152, 205—224.
7. Ogawa, J. (1959) A necessary condition for existence of regular and symmetrical experimental designs of triangular type with partially balanced incomplete blocks, AMS, 30, 1063—1071.
8. Ogawa, J. (1960) On a unified method of deriving necessary conditions for exist-

- ence of symmetrical partially balanced incomplete block designs of certain types, *Bulletin of the International Statistical Institute*, 38, Part IV, 43-57.
9. 十 M) 淵次郎 (1965) 或種の $7^2 \times 7^2$ の 7^2 の存在性数学. 17. 65-72.
10. Ogawa, J. (1969) On the nonexistence of certain block designs, *The Univ. of North Carolina Monograph Series in Probability and Statistics No. 4*. The Univ. of North Carolina Press
11. Ogawara, M. (1964) A necessary condition for existence of regular and symmetrical PBIBD of T_m type. *Institute of Statistics Monograph Series No. 148*, The Univ. of North Carolina.
12. Raghavarai, D. (1960) A generalization of group divisible designs, *AMS* 31. 27-771.
13. Raghavarai, D. & Chandrasekharas, K. (1964) Cubic designs, *AMS* 35. 389-397.
14. Seiden, Ester (1963) On necessary conditions for the existence of some symmetrical and unsymmetrical triangular PBIB designs, *AMS* 34. 348-351.
15. Shrikhande, S. S. (1950) The impossibility of certain symmetrical balanced incomplete block designs, *AMS*. 21. 106-111.
16. Shrikhande, S. S. (1951) Impossibility of some affine resolvable balanced incomplete block designs, *Sankhyā* 11, 185-186.
17. Shrikhande, S. S. (1953) The non-existence of certain affine resolvable balanced incomplete block designs, *Canad. J. Math.*, 5, 413-420.
18. Shrikhande, S. S. (1959) The uniqueness of the L_2 association scheme, *AMS*, 30, 781-789.
19. Shrikhande, S. S. (1960) Relations between certain incomplete block designs, *Contributions to Probability and Statistics, Essays in Honor of Harold Hotelling*, Stanford Univ. Press 388-395.

20. Shrikhande, S. S., Raghavarao, D. and Tharthare, S. K. (1963) Non-existence of some unsymmetrical PBIB designs, *Canad. J. Math.*, 15, 686-701.
21. Singh, N. K. and Shukla, G. C. (1961). Non-existence of some PBIBD, *J. Indian Statist. Assoc.*, 1, 71-78.
22. Tharthare, S. K. (1963) Right angular designs, *AMS.*, 34, 1057-1067.
23. Vartak, M. N. (1958) On the Hare-Minkowski invariant of the Kronecker product of matrices, *Canad. J. Math.*, 10, 66-72.
24. Vartak, M. N. (1959) The non-existence of certain PBIB designs, *AMS.*, 30, 1051-1062.
25. Yamamoto, K. (1965) A necessary condition for existence of partially balanced incomplete block designs with an m -subset association scheme, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A.*, 19, 76-98.
26. Yamamoto, K. (1965) On an orthogonal basis of the eigenspaces associated with partially balanced incomplete block designs of a Latin square type association scheme, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A.*, 19, 99-104.