

コンパクトリー群の実射影空間 の直積への自由作用について.

岩手大 人文社会科学部 石川洋一郎

§ 1. 序.

G をコンパクトリー群とすると、Robert. Oliver [1] は、次の結果を示した。即ち、 G が同次元の sphere の直積に自由に作用するための条件は、 G が $SO(3)$ を含まないことである。これに対して、 $X = \mathbb{R}P^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}P^{n_k}$ を実射影空間の直積とすると、 X 上の G の自由作用について、次の様な結果が得られました。

定理 A 単純リー群 G が X 上に自由に作用する条件は、

$$(1) \quad G = SO(3),$$

$$(2) \quad \exists n_i = 4m+3, \quad (m \text{ は非負整数である})$$

が成立することである。

定理 B コンパクト連結リー群 G が X 上に自由に作用する条件は、

$$(1) \quad G = T \times SO(3) \times \cdots \times SO(3),$$

$$(2) \quad \dim G \leq k$$

(T はトーラス群) が成立することである。

定理 C コンパクトリー群 G が X 上に自由に作用する条件は

$$(1) \quad G_0 = T \times SO(3) \times \cdots \times SO(3)$$

$$(2) \quad \dim G \leq k$$

(G_0 は G の単位成分) が成立することである。

§ 2. 準備.

定理を証明するために、次の二つの補題を必要とする。

X を G -空間とすると、 $ev^X: G \rightarrow X$ を $ev^X(g) = gx$ で定義される写像とする。

補題 1. コンパクト連結リー群 G が X 上に自由に作用するとき $(ev^X)_*: H_1(G; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z}_2)$ は単射である。

(証明) T を G の極大トーラスとすると、包含写像 $i: T \hookrightarrow G$ から誘導された写像 $i_*: H_1(T; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(G; \mathbb{Z}_2)$ は全射なので、 G がトーラス T のとき証明すればよい。

$T = S^1 \times \cdots \times S^1$ (l -times) とし、 $(a_1, \dots, a_l) \in \ker(ev^X)_*$ で $(a_1, \dots, a_l) \neq 0$ とする

$f_i: S' \rightarrow S'$ 及び $f: S' \rightarrow T$ を 次の如く定義する.

$$f_i(u) = \begin{cases} u, & (a_i \neq 0) \\ e, & (a_i = 0) \end{cases}$$

$$f(u) = (f_1(u), \dots, f_i(u))$$

このとき, f は単射で, $(ev_X \circ f)_*: H_1(S'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z}_2)$ は自明である. 今 f により誘導される X 上の自由 S' -作用を考えて, fiber 空間, $S' \rightarrow X \xrightarrow{p} X/S'$ のホモトピー完全列から, 同型 $p_*: H_1(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H_1(X/S'; \mathbb{Z}_2)$ が導かれる. 故に, $p_*: H^*(X/S'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ は全射となり, 予値する.

補題 2. G を単純リー群で, $\dim G \geq 2$ とする. このとき,

包含写像 $i: T \subset G$ (但し T は G の極大トーラス) から誘導された写像

$i_*: H_1(T; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(G; \mathbb{Z}_2)$ は単射でない.

§ 3. 定理の証明.

G をコンパクトリー群とし, $H \subseteq G$ を $\text{index } l < +\infty$ の部分群とする. X を H -空間とすると $\text{Map}_H(G, X) \approx X^l$ で H は X^l に自然な作用をもつ, 又, H が X に自由に作用すれば, G は X^l に自由に作用することになる. このことは定理 C を証明するのに使用される.

定理 A の証明 補題 1, 2 により $\#G \leq 1$ となり, $G \neq SU(2)$ となるので, $G = SO(3)$ となる。

補題 1 から $(eU^X)^* ; H^*(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(SO(3), \mathbb{Z}_2)$ は全射なので, $H^*(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(SO(3); \mathbb{Z}_2)$ も全射となる。故に, fiber 空間

$$SO(3) \longrightarrow X \longrightarrow X/SO(3)$$

に対して, $\mathbb{Z}_2$ -係数の spectral 列は自明となり Poincaré 多項式に於いて,

$$(1+t+t^2+t^3)g(t) = (1+t+\dots+t^m) \times \dots \times (1+t+\dots+t^{n_k})$$

が成立する。故にこの式の右辺は $1+t$ で割り切れる。このことから $n_i = 4m+3$ となる。

定理 B の証明 G をコンパクト連結リー群とすると

$$G \approx T \times H_1 \times \dots \times H_t / K$$

但し, H_i は単連結単純リー群で, T はトーラス群, そして K は $T \times H_1 \times \dots \times H_t$ の有限位数の中心である。このとき次の図式は可換となる,

$$\begin{array}{ccc} H_i & \longrightarrow & H_i K \\ & \searrow q & \downarrow p \\ & & H_i K / K \end{array}$$

このとき, $\ker q = H_i \cap K$ なので, $H_i / H_i \cap K \approx H_i K / K$ となる

従って, $H_i / H_i \cap K$ は単純リー群なので, 補題 1, 2 から,

$H_i / H_i \cap K \approx SO(3)$ となる。故に $H_i \approx SU(2)$ で $H_i \cap K \approx \mathbb{Z}_2$ となるので

$G = T \times SO(3) \times \dots \times SO(3)$ となる。

又補題1から $|kG| \leq k$ が成立する。

定理Cの証明 十分条件を証明すればよい。 G_0 を G の単位成分として、 $l = |G/G_0|$ とおく。 G_0 は $X = \mathbb{R}P^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}P^{n_k}$ に自由に作用するとする。このとき前に注意したことにより、 G は、 X^l に自由に作用することがわかる。 $1 \neq g \in G/G_0$ に対して g により生成された cyclic group は $SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$ に自由に作用するので G/G_0 に誘導される空間を M_g とおくと、 G は

$$\left(\prod_{1 \neq g \in G/G_0} M_g \right) \times \left(\prod X \right)$$

に自由に作用することがわかる。これで証明が終る。

文献

- [1] Robert Oliver. Free compact group actions on products of spheres. Lecture Notes in Math. No. 763. Springer 1978.
- [2] G. E. Bredon. Introduction to compact transformation groups. Academic Press. 1972.